

Бифуркации Хаотических Режимов Обратимого Отображения при Взаимодействии Резонансов и Аттракторов

В.Ю. Гончар А.В.

Институт теоретической физики

ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт" НАН Украины

А.В. Тур

Université Paul Sabatier, Observatoire Midi-Pyrénées, France

и

В.В. Яновский

Институт монокристаллов НАН Украины

310001, Харьков, Украина, e-mail:yanovsky@ISC.UA

Содержание

1. Введение	3
2. Общий анализ отображения.	4
3. Взаимодействие аттрактора с различными элементами Гамильтоновых систем.	6
3.1. Влияние аттрактора на неподвижные точки.	7
3.2. Взаимодействие аттрактора с островом устойчивости.	9
3.3. Хаотические режимы.	13
4. Заключение	18

Аннотация

В работе рассмотрено простейшее обратимое отображение. В этом отображении острова устойчивости сосуществуют с аттракторами. Возникают новые явления, связанные с их взаимодействием. Изучены хаотические режимы и предельные состояния. Показана непредсказуемость предельных состояний: аттрактор или уход на бесконечность в рассматриваемом отображении. Такая непредсказуемость связана с фрактальной геометрией начальных данных, соответствующих различным асимптотическим режимам.

1. Введение

Исследование взаимодействия резонансов, важнейших элементов Гамильтоновой динамики, привело к формированию представлений о динамическом хаосе в гамильтоновых системах низкой размерности [1,2,3]. Большую роль в развитии таких представлений играли исследования простых отображений, таких как например, отображения Чирикова [4,5]. Столь же важную роль для диссипативных систем играют различные аттракторы, странные аттракторы. С последними тесно связаны представления о динамическом хаосе в диссипативных системах [6,7]. Простые модели диссипативных систем, как например отображение Хенона [8] или [9,10], позволяют понять многие общие свойства динамического хаоса. В последнее время интенсивно исследуются системы, занимающие промежуточное положение между гамильтоновыми и диссипативными системами—так называемые обратимые системы [11,12]. С физической точки зрения исключительно важно, что в таких системах могут одновременно сосуществовать в фазовом пространстве как основные элементы гамильтоновых систем, так и диссипативных. Впервые такое сосуществование было обнаружено в модели В-лазера [13]. Сосуществование и следовательно, взаимодействие основных элементов гамильтоновых систем

(резонансов) и основных элементов диссипативных систем (аттракторов), приводит к большому многообразию новых явлений в таких обратимых системах. Наиболее детально исследованы бифуркации неподвижных точек в обратимых системах [13,14,15], которые наблюдаются в различных физических системах [15,16,17]. Исследование взаимодействия резонансов с аттракторами начато в [18] и привело к обнаружению ряда интересных явлений. В данной работе продолжается изучение взаимодействия аттракторов с различными элементами Гамильтоновых систем, такими как острова устойчивости. Для этого предложено простое обратимое отображение, возникающее при обобщении, широко используемой в физике, модели осциллятора под воздействием δ -образных толчков. Обобщение заключается в зависимости частоты осциллятора от скорости. Полученное 2-мерное отображение относится к обратимым отображениям в котором сосуществуют как элементы гамильтоновой динамики так и аттрактор. Положение аттрактора определяется свободным параметром модели, что позволяет исследовать его влияние при приближении к выбранному объекту (неподвижной точке, острову устойчивости и т.п.). В работе подробно исследована структура фазового пространства этого отображения и влияние аттрактора на основные его элементы например, неподвижные точки, острова устойчивости. Получены бифуркации, возникающие при взаимодействии с аттрактором неподвижных точек и островов устойчивости. Найден универсальный закон перестройки границ островов устойчивости, связанный с α серией бифуркаций. Исследованы хаотические режимы в этом отображении. Обнаружена сильная перемежаемость хаотических режимов и аномальная диффузия. Получена модель нового типа для описания динамики, описываемой исходным отображением. Удивительным свойством этой модели (или упрощенного отображения) является совпадение траекторий, построенных в соответствии с этой моделью, с траекториями полученными согласно исходного отображения. Такое совпадение траекторий наблюдается именно в хаотическом режиме и на больших временах τ , при наличии небольшого числа локальных отклонений между этими траекториями. Показана непредсказуемость предельных состояний: аттрактор или уход на $\pm\infty$ в рассматриваемом отображении. Такая непредсказуемость связана с фрактальной геометрией начальных данных, соответствующих различным асимптотическим режимам.

2. Общий анализ отображения.

Рассмотрим отображение, в котором реализуются одновременно некоторые свойства, типичные для гамильтоновых и для диссипативных систем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \epsilon(a - y_n)x_n \\ x_{n+1} &= (x_n + y_{n+1}) \bmod 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Фазовое пространство этого отображения - это цилиндр $R \times S$, где $x \in [-1, 1]$ и точки $x = +1, x = -1$ отождествляются. Другими словами x играет роль угловой координаты на цилиндре. Отображение (1) имеет неподвижные точки $P^* = (x^*, y^*)$, координаты которых легко вычислить $P_n^* = (0, 2n)$, $2n \neq a$.

Таким образом все неподвижные точки расположены при $x=0$ и целых четных значениях y ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тип этих точек в зависимости от параметров ϵ и a определяется решениями характеристического уравнения для собственных значений λ :

$$\lambda^2 - \text{Tr} L \cdot \lambda + \text{Det} L = 0 \tag{2}$$

здесь L - матрица Якоби линейного отображения в окрестности неподвижной точки. Стандартная классификация неподвижных точек по значениям $\text{Tr} L$ и $\text{Det} L$ изображена на Рис.1 в компактной форме. Вычисляя $\text{Det} L$ и $\text{Tr} L$ для отображения (1) в окрестности неподвижной точки получим

$$\text{Det} L = 1 \quad \text{Tr} L = 2 - \epsilon(a - y_n^*) \tag{3}$$

Где $y^+ = 2n$ - положение соответствующей неподвижной точки по оси y .

Равенство $\text{det} L = 1$ означает, что неподвижные точки могут быть только двух типов: гиперболические (седловые) и эллиптические (центры) (см. Рис.1). Обратим внимание, что только эти типы неподвижных точек и могут реализоваться в гамильтоновых или консервативных системах. Области реализуемости гиперболических и эллиптических точек удобно изображать на плоскости параметров (r_n, ϵ) , где $r_n \equiv a - y_n^*$ (см. Рис.2). Кривые разделяющие области эллиптических и гиперболических точек определяются уравнением $r_n = \frac{4}{\epsilon}$. Численный анализ отображения (1) полностью согласуется с найденными координатами и критерием типов неподвижных точек. Другим важным элементом, определяющим фазовый портрет отображения (1), является семейство особых решений

$$y_n = a, \quad x_{n+1} = (x_n + a) \bmod 2 \tag{4}$$

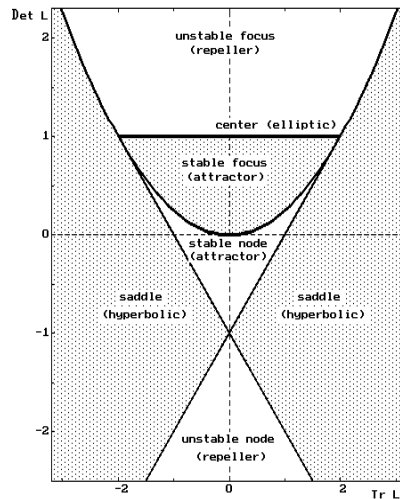


Рис. 1. Н

а этом рисунке в компактной форме изображены области, соответствующие различным типам неподвижной точки (или n -циклов) на плоскости параметров $(DetL, TrL)$. L -матрица Якоби в неподвижной точке (n -цикла). Тип точки (n -цикла) указан внутри соответствующей области. Исключение составляет центр (эллиптическая), лежащий на линии $DetL = 1$ и не относящийся к структурно устойчивому случаю. Наглядно видно, что устойчивые неподвижные точки (n -циклы) занимают конечную часть (stable focus, stable node) бесконечной плоскости параметров. Эллиптическая точка-центр $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ ($\theta \neq 0, \pi$). Гиперболическая точка-седло $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$ или $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$. Аттрактор (attractor) $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ (λ_1, λ_2 — реальные) - устойчивый узел, (λ_1, λ_2 — комплексные) -устойчивый фокус. Репеллер (Repeller) $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$: (λ_1, λ_2 —реальные) -неустойчивый узел; (λ_1, λ_2 —комплексные) -неустойчивый фокус.

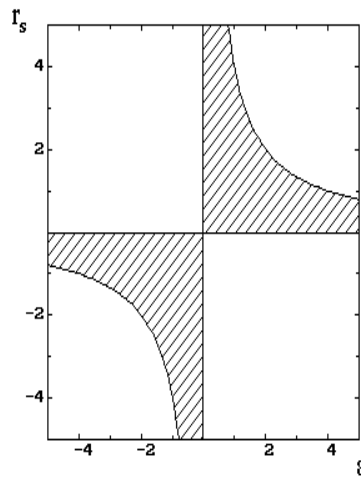


Рис. 2. На плоскости параметров (r_s, ϵ) показаны области эллиптических точек (заштрихованная область) и гиперболических точек (белая область). $r_s = a - y_s$ расстояние от аттрактора до соответствующей неподвижной точки. Граница определяется уравнением $r_s = 4/\epsilon$.

Физический смысл такого решения - это периодическая или почти периодическая траектория (в зависимости от того, рационально или иррационально число a , соответственно), каждая точка которой за один шаг итерации поворачивается на угол a не меняя положения по оси y . С этой точки зрения a играет роль не

только положения этой траектории по оси y , но и числа вращения [19] одновременно. С другой стороны, семейство таких траекторий ($y = a$) притягивает к себе остальные траектории и поэтому является аттрактором. Положение и структура этого аттрактора определяется величиной ϵ ; так, если a рационально, т.е. $a = p/q$ (где p, q - целые взаимно простые числа), то аттрактор состоит из семейства периодических траекторий периода q , при a - иррациональном, из семейства почти периодических траекторий. Отдельно следует отметить случай $\dot{a} = 2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом значении аттрактор пересекает одну из неподвижных точек. Легко видеть, что в этом случае все точки аттрактора являются неподвижными точками отображения (1), т.к. $x_{n+1} = (x_n + 2k) \bmod 2 \equiv x_n$.

Локальный анализ отклонений траекторий от аттрактора по оси y приводит к уравнению $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n(1 + \epsilon x)$. Откуда следует, что точки аттрактора лежащие в области $\max(-1, -\frac{2}{\epsilon}) < x < 0$ устойчивы, а остальные неустойчивы. Однако в силу равенства единице одного из собственных значений характеристического уравнения, этого анализа на устойчивость недостаточно. Необходим анализ нелинейных поправок, которые и определяют характер поведения траекторий. С аналогичной трудностью сталкиваются в непрерывных системах в случае нулевых частот.

При малых ϵ область устойчивости совпадает с полупериодом $[-1, 0]$ и в этом случае усредненное по периоду притяжение к аттрактору носит экспоненциальный характер $-e^{-\gamma n}$. В этом легко убедиться используя формальное решение для координаты y_n отображения (1)

$$y_{n+1} = a - (a - y_0) \prod_{i=0}^n (1 + \epsilon x_i) \tag{5}$$

Где x_i - положения по x точки на i - шаге итераций, y_0 - начальное положение по y . Записывая произведение как

$$\prod_{i=0}^n (1 + \epsilon x_i) = e^{(n+1) \frac{\sum_{i=0}^n \ln(1 + \epsilon x_i)}{n+1}} \equiv e^{(n+1) \langle \ln(1 + \epsilon x_i) \rangle} \tag{6}$$

(здесь угловые скобки означают усреднение по времени вдоль траектории) и предполагая эргодичность, заменим среднее по времени средним по пространству. Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \ln(1 + \epsilon x) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(1 + \epsilon x) dx = \\ &= \frac{(1 + \epsilon) \ln(1 + \epsilon) - (1 - \epsilon) \ln(1 - \epsilon)}{2\epsilon} - 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Величину γ можно оценить при $\epsilon \ll 1$.

$$\gamma \approx \frac{\epsilon^2}{6} \tag{8}$$

Малость декремента γ (при малых ϵ) объясняется тем, что притяжение на одном полупериоде x_n сменяется отталкиванием на другом. Общее притяжение к аттрактору связано с усредненными квадратичными поправками по периоду x_n .

3. Взаимодействие аттрактора с различными элементами Гамильтоновых систем.

Опишем теперь грубо фазовый портрет отображения (1). При значении $y=a$ располагается аттрактор (4). При $\epsilon > 0$ выше аттрактора (по оси y) располагаются только седловые неподвижные точки. Ниже аттрактора до значения $y = a - \frac{4}{\epsilon}$ располагаются эллиптические неподвижные точки (центры); каждая такая точка окружена типичными периодическими траекториями, образующими островки устойчивости (см. Рис.3). Ниже значения $y = a - 4/\epsilon$ все неподвижные точки - гиперболические (седла). С изменением ϵ ширина зоны эллиптических точек меняется. При больших значениях ϵ , $y = a - 4/\epsilon$ может лежать выше ближайшей к аттрактору с низу неподвижной точки. В этом случае все неподвижные точки гиперболические. При $\epsilon < 0$ расположение типов неподвижных точек меняется (согласно Рис.2). Так, ниже аттрактора лежат только гиперболические точки, эллиптические точки располагаются выше аттрактора до значения $y = a - 4/\epsilon$, выше которого все неподвижные точки - гиперболические. Такая картина фазового пространства отображения (1) позволяет ограничиться изучением случая $\epsilon > 0$ (т.к. случай $\epsilon < 0$ аналогичен ему, с учетом описанных выше изменений) и выделить две качественно различных области поведения траекторий. Это область выше аттрактора и область ниже его.

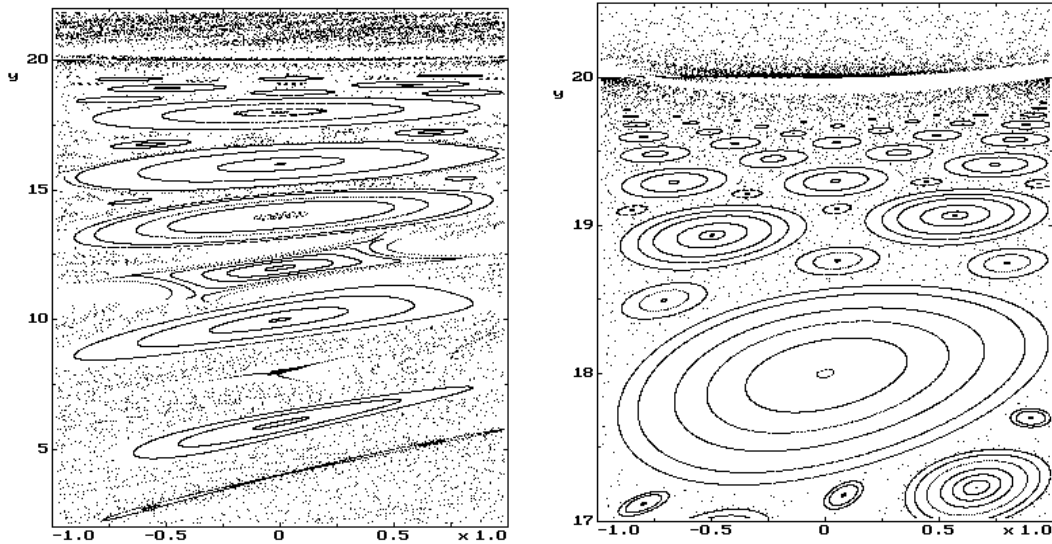


Рис. 3. Слева показана часть фазового пространства отображения (1). Аттрактор располагается при $y = a = 20$. В полосе между аттрактором и $y = a - 4/\varepsilon$ ($\varepsilon = 0.2515$), располагаются неподвижные точки при соответствующих четных значениях y . Каждая эллиптическая точка окружена периодическими траекториями, образующими острова устойчивости. Два острова устойчивости, соответствующие $\varepsilon r_s \approx 2$ и $\varepsilon r_s \approx 3$ имеют аномально малые размеры. Вблизи нечетных значений y легко заметить вторичные острова устойчивости, окружающие эллиптические 2-циклы. Ниже $y = a - 4/\varepsilon$ видна гиперболическая неподвижная точка и эллиптический 2-цикл вблизи нее. Выше аттрактора, располагаются гиперболические неподвижные точки. Серый фон образован траекториями, огибающими острова устойчивости и выходящими на аттрактор. Справа показана область вблизи аттрактора насыщенная островами устойчивости более высоких порядков, образующих сложную упорядоченную структуру.

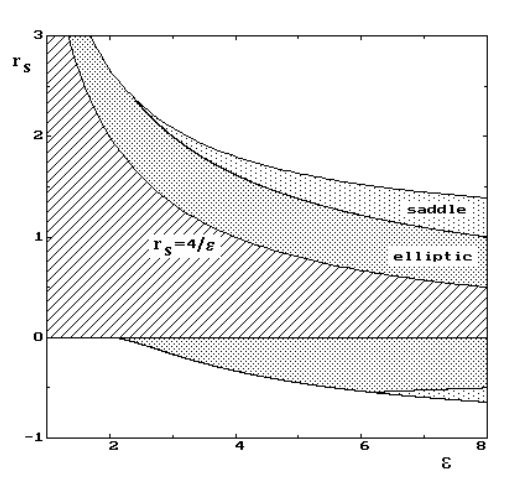


Рис. 4. Часть плоскости параметров (r_s, ε) , на которой изображены области существования 2-цикла, возникающего при перестройке типа неподвижной точки. Тип 2-цикла указан внутри заштрихованных областей. Граница разделяющая их, соответствует значениям параметров при которых наблюдается смена типов 2-циклов. Область с другим видом штриховки $r_s \leq 4/\varepsilon$ - область эллиптического типа неподвижной точки.

3.1. Влияние аттрактора на неподвижные точки.

В рассматриваемом отображении влияние аттрактора на неподвижные точки легко изучать, т.к. положение аттрактора (по оси y) определяется произвольным параметром a . Меняя величину этого параметра мы можем перемещать аттрактор и наблюдать изменения происходящие с неподвижными точками или любыми другими хорошо определенными элементами фазового портрета по мере приближения аттрактора. Из

предыдущего анализа (см. Рис.2) легко понять какие изменения происходят с неподвижными точками при приближении к ним аттрактора. Действительно $r_n = a - y_n^*$ - расстояние от аттрактора до выбранной неподвижной точки и следовательно, Рис.2 описывает изменение типа неподвижной точки при приближении к ней аттрактора. Пусть при фиксированном $\epsilon >$ аттрактор расположен выше неподвижной точки на расстоянии $r_n \gg \frac{4}{\epsilon}$. Тогда эта точка гиперболическая (см. Рис.2). При приближении аттрактора на расстояние $4/\epsilon$ неподвижная точка претерпевает бифуркацию и переходит в эллиптическую. Эта точка остается эллиптической при дальнейшем приближении аттрактора до момента пересечения ее аттрактором. При этом эллиптическая точка переходит в гиперболическую. Дальнейшее удаление аттрактора в область отрицательных y не отражается на типе неподвижной точки. Таким образом наблюдается два типа влияния аттрактора на неподвижные точки. Нелокальное влияние - бифуркация при приближении его на некоторое критическое расстояние (в данном случае на $4/\epsilon$) и локальное влияние при пересечении аттрактором неподвижной точки. Обратим внимание, что описанные выше бифуркации неподвижных точек не сопровождаются рождением в их окрестности других неподвижных точек, как при нарушающих симметрию бифуркациях обратимых систем [13,14,20,21]. Для более глубокого понимания происходящих бифуркаций нам потребуется предварительный анализ возможных 2-циклов отображения (1). Систему уравнений определяющую координаты 2-цикла легко получить из отображения (1)

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 - \epsilon(a - y_1)x_1 \\ x_2 &= (x_1 + y_2) \bmod 2 \\ y_1 &= y_2 - \epsilon(a - y_2)x_2 \\ x_1 &= (x_2 + y_1) \bmod 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Используя второе и четвертое уравнение системы (7), можно доказать, что координаты 2-цикла по оси y симметричны относительно линии $y_s = s$ (где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т.е.

$$y_1 = y_s + \Delta y, \quad y_2 = y_s - \Delta y \tag{10}$$

Число s - нумерует 2-циклы и определяет их положения по оси y . Координаты точек 2-цикла по оси x также легко выразить через неизвестные значения Δy как (см. (7))

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\Delta y}{\epsilon(r_s - \Delta y)} \\ x_2 &= \frac{2\Delta y}{\epsilon(r_s + \Delta y)} \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $r_s = a - y_s$ - расстояние от аттрактора до положения линии симметрии y_s , при s -четном y_s совпадает с положением неподвижной точки вблизи которой расположен 2-цикл. Подставляя соотношения (8) и (9) в последнее уравнение системы (7) получим уравнение определяющее Δy

$$\frac{2\Delta y}{\epsilon(r_s - \Delta y)} = \left(y_s + \Delta y - \frac{2\Delta y}{\epsilon(r_s + \Delta y)} \right) \bmod 2 \tag{12}$$

Прежде всего рассмотрим 2-циклы, рождающиеся вблизи неподвижных точек $p^* = (0, 2n)$, $s = 2n$. В этом случае y_s есть четное число и уравнение (10) упрощается.

При выводе этого уравнения мы использовали малость Δy в момент рождения 2-цикла, что позволяет избавиться от операции взятия модуля. Тривиальное решение $\Delta y = 0$ соответствует старой неподвижной точке, которая является тривиальным 2-циклом. Тогда для 2-цикла получим

$$\Delta y^2 = \frac{\epsilon r_s^2 - 4r_s}{\epsilon} \tag{13}$$

Для того чтобы существовали решения уравнения (11), определяющие координаты 2-цикла, необходимо выполнение условия

$$\frac{\epsilon r_s^2 - 4r_s}{\epsilon} > 0 \tag{14}$$

Это условие ограничивает значения параметров r_s и ϵ при которых существуют 2-циклы вблизи неподвижных точек. Однако, кроме этого условия необходимо учесть еще одно ограничение. Легко заметить, что для того, чтобы решения уравнения (11) удовлетворяли исходному уравнению (10) необходимо выполнение дополнительного условия:

$$\left| \frac{2\Delta y(r_s, \epsilon)}{\epsilon(r_s - \Delta y(r_s, \epsilon))} \right| \leq 1 \tag{15}$$

Геометрически это условие означает, что как только одна из координат x_1 или x_2 2-цикла достигает $x = 1$, 2-цикл исчезает (см.(9)). Условия (12) и (13) определяют область параметров на плоскости (r_s, ϵ)

при которых существуют 2-циклы вблизи неподвижных точек. Несложный анализ позволяет получить эти области в явном виде:

$$\begin{aligned} \epsilon > 0, & \quad \frac{4}{\epsilon} \leq r_s \leq \frac{(2+\epsilon)^2}{\epsilon(1+\epsilon)} \\ \epsilon > 2, & \quad \frac{(2-\epsilon)^2}{\epsilon(1-\epsilon)} \leq r_s \leq 0 \\ \epsilon < 0, & \quad \frac{(2-\epsilon)^2}{\epsilon(1-\epsilon)} \leq r_s \leq \frac{4}{\epsilon} \\ \epsilon < -2, & \quad 0 \leq r_s \leq \frac{(2+\epsilon)^2}{\epsilon(1+\epsilon)} \end{aligned} \quad (16)$$

Графически эти области изображены на Рис.4. Проанализируем теперь типы 2-циклов вблизи неподвижных точек. Для этого снова используем характеристическое уравнение (2) где в качестве L необходимо подставить произведение матриц Якоби линейных отображений 2-цикла. Избегая технически громоздких, но простых вычислений приведем выражения для основных характеристик матриц Якоби 2-цикла:

$$\text{Det } L_{12} = 1, \quad \text{Tr } L_{12} = 2 - \frac{4\epsilon r_s(r_s^2 + \Delta y^2)}{(r_s^2 - \Delta y^2)} + \epsilon^2 (r_s^2 - \Delta y^2) \quad (17)$$

Для найденных значений Δy согласно уравнению (11) получим:

$$\text{Tr } L_{12} = 2(1 - \epsilon^2 r_s^2 + 4\epsilon r_s) \quad (18)$$

Из равенства следует (см. Рис.1), что 2-циклы могут быть только двух типов: эллиптические и гиперболические. Условие эллиптичности 2-циклов вблизи неподвижных точек легко получить:

$$\frac{2}{\epsilon} (1 - \sqrt{2}) < r_s < \frac{2}{\epsilon} (1 + \sqrt{2}) \quad (19)$$

В остальной области параметров 2-циклы гиперболические (см. Рис.4). Обозначим критические значения параметра $\epsilon - \epsilon_c$, при $\epsilon < \epsilon_c$ реализуются только эллиптические 2-циклы. При изменении r_s , (вблизи неподвижных точек) они равны $\epsilon_{c1} = \sqrt{2}$ в области $r_s > 0, \epsilon > 0$ и в области $r_s < 0, \epsilon > 0$ (см. Рис.4). Теперь можем обсудить более детально бифуркации неподвижных точек под воздействием аттрактора.

Начнем с нелокального влияния. Пусть при фиксированном $\epsilon > \epsilon_{c1} = \sqrt{2}$ аттрактор значительно удален от выбранной гиперболической неподвижной точки ($r_s \gg 1$). При приближении аттрактора на расстояние $r_s = \frac{(2+\epsilon)^2}{\epsilon(1+\epsilon)}$, вблизи гиперболической неподвижной точки рождается гиперболический 2-цикл конечного размера ($\Delta y = \frac{2+\epsilon}{1-\epsilon}, |x_1 - x_2| = \frac{2+\epsilon}{1-\epsilon}$). Рождение этого 2-цикла происходит по жесткому сценарию. При дальнейшем приближении аттрактора к неподвижной точке на расстояние $r_s = \frac{2}{\epsilon} (1 + \sqrt{2})$ гиперболический 2-цикл переходит в эллиптический и его характерный размер уменьшается.

Следующий качественный переход происходит при достижении $r_s = 4/\epsilon$. При этом значении эллиптический 2-цикл умирает в гиперболической неподвижной точке, которая меняет свой тип на эллиптический. Аналогичный сценарий нелокального воздействия аттрактора реализуется и в области $0 < \epsilon < \epsilon_{c1} = 2$. Отличие заключается в отсутствии стадии гиперболического 2-цикла (см. Рис.4).

Таким образом, бифуркацию неподвижной точки при нелокальном влиянии аттрактора графически можно изобразить диаграммой Рис.5. Перейдем к локальному воздействию при пересечении аттрактором эллиптической неподвижной точки ($r_s = 0$). Начнем с области $\epsilon > \epsilon_{c2} = 1 + \sqrt{2}$.

При пересечении аттрактором эллиптической неподвижной точки она переходит в гиперболическую и рождается эллиптический 2-цикл. Рождение 2-цикла происходит в мягком режиме ($\Delta y \approx -r_s, |x_1 - x_2| \approx r_s$). При дальнейшем удалении аттрактора в отрицательном направлении оси y , 2-цикл расширяется и при достижении $r_s = \frac{2}{\epsilon} (1 - \sqrt{2})$ 2-цикл превращается в гиперболический. Когда расстояние достигает $r_s = \frac{(2-\epsilon)^2}{\epsilon(1-\epsilon)}$ гиперболический 2-цикл исчезает.

В области $2 < \epsilon < \epsilon_{c2}$ влияние аттрактора отличается только отсутствием стадии гиперболического 2-цикла (см.Рис.4). Таким образом локальное влияние аттрактора можно описать диаграммой Рис.5b. При обратном движении аттрактора в локальном случае бифуркация происходит согласно Рис.5а, а в нелокальном согласно Рис.5b. Следовательно, только эти бифуркации реализуются как при локальном, так и при нелокальном влиянии аттрактора на неподвижные точки в рассматриваемом отображении. Численное исследование отображения (1) полностью подтверждает характер расположения и тип 2-циклов в фазовом пространстве в соответствии с приведенным выше анализом.

3.2. Взаимодействие аттрактора с островом устойчивости.

Острова устойчивости - следующий хорошо определенный объект (см.Рис.3), влияние аттрактора на который приводит к его качественным изменениям. Для изучения этих изменений выберем ϵ так, чтобы в фазовом

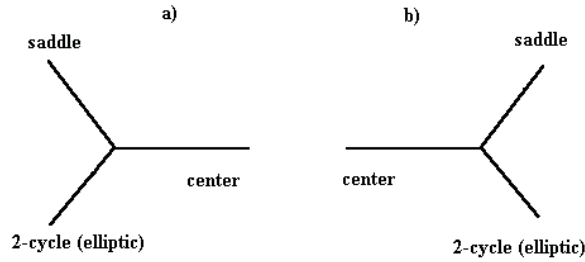


Рис. 5. Схематическое изображение бифуркации (удвоения) при приближении аттрактора к неподвижной точке. а) в нелокальном, в) в локальном случаях. По сути случай а) соответствует обратной бифуркации в).

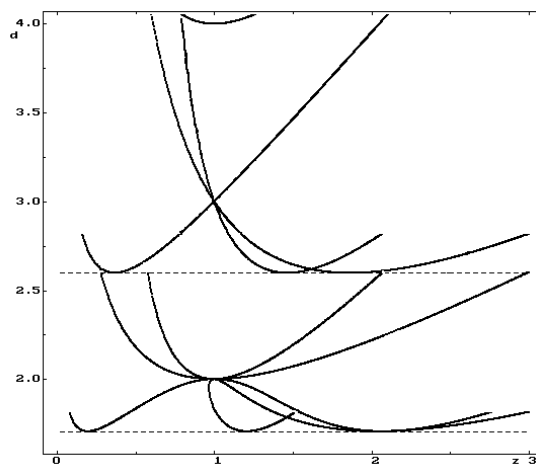


Рис. 6. Глобальное поведение первых n -циклов ($n = 2, 3, 4$) вблизи неподвижных точек под воздействием аттрактора. Горизонтальная ось $Z = 1 + \varepsilon x_i$ (Здесь x_i - координата i точки входящей в соответствующий n -цикл). Вертикальная ось εr_s . Рисунок наглядно демонстрирует рождение и исчезновение n -циклов, а также изменение их x - координат под воздействием аттрактора (при изменении r_s). Значение ε - определяет только границу существования n -циклов (на приведенном рисунке $\varepsilon = 2$). Граница существования определяется достижением одной из его x -координат 1, т.е. $z = 1 + \varepsilon = 3$. Для каждого из приведенных n -циклов легко определить критическое значение при котором он исчезает ($\Delta_2 = \varepsilon r_s = 4$, $\Delta_3 \approx 2.598$, $\Delta_4 \approx 1.72$, , которые не зависят от ε) Для $n = 3, 4$ в точках пересечения ветвей $\varepsilon r_s = 3$ и $\varepsilon r_s = 2$ соответственно, происходит схлопывание в нуль островов устойчивости. При выбранном значении ε после исчезновения 2-цикла граница острова устойчивости определяется 3-циклом гиперболического типа. При уменьшении ε вне границы острова устойчивости рождается эллиптический 3-цикл. Исчезновению 3-циклов предшествует слияние гиперболического и эллиптического 3-циклов. При значении $\varepsilon r_s < \Delta_3$ граница острова устойчивости определяется 4-циклом гиперболического типа и все эти явления повторяются с ним. Аналогичные изменения являются типичными для n -циклов более высокого порядка в рассматриваемой системе.

пространстве существовала только одна эллиптическая неподвижная точка и следовательно, только один остров устойчивости в окрестности $y=0$. Для этого необходимо чтобы $\varepsilon > 2$. При таком значении ε остров устойчивости в окрестности $y=0$ будет наблюдаться при $0 < r_s < 4/\varepsilon$ (см.Рис.2). Уменьшая r_s , т.е. приближая аттрактор к острову устойчивости будем наблюдать изменения, происходящие с ним под влиянием аттрактора. Начнем с наиболее удаленного положения аттрактора $r_s = 4/\varepsilon$ ($\varepsilon = 2.1$), при котором рождается (вследствии бифуркации см. Рис.5) эллиптическая неподвижная точка, окруженная островом устойчивости. Прежде всего, отметим существенное отличие в структуре острова устойчивости отображения (1) и островов устойчивости гамильтоновых систем. Обычно остров устойчивости ограничен сепаратрисами соединяющими 2 гиперболические неподвижные точки. Такова, например, структура обычного резонанса. В изучаемой системе, граница островов устойчивости состоит из траекторий соединяющих точки гиперболического п-

цикла, лежащего на границе. В этом заключается основное отличие от островов устойчивости гамильтоновых систем. Значение n зависит от расстояния r_s от аттрактора до эллиптической неподвижной точки. Поэтому рассмотрим более детально поведение n - циклов вблизи неподвижных точек. Наиболее удобно демонстрировать поведение n - циклов на рисунке изображающем положение x - координат точек n - цикла в зависимости от εr_s (см. Рис.6). При этом удобными переменными является $z = 1 + x$ - горизонтальная ось на Рис.6. Полученные зависимости не меняются от положения или номера неподвижной точки и в определенном смысле от ε (ε определяет только допустимую по z область существования n - цикла). Поэтому этот рисунок содержит универсальную информацию о поведении n - циклов. Так вверху этого рисунка изображены координаты (по оси x) 2 - цикла в зависимости от εr_s ($\varepsilon r_s = \frac{(1+z)^2}{z}$). Легко видеть, что при $\varepsilon r_s < 4$ 2 - цикл исчезает. Величина r_{s*} при котором происходит рождение 2 - цикла уже зависит от ε (см. (13)) и соответствует рождению 2 - цикла с координатами $x = 1$, что в используемых переменных z означает $z = 1 + \varepsilon$.

Таким образом, при фиксированном ε ни одна ветвь n - цикла не может выходить за $z = 1 + \varepsilon$. На Рис.6 для определенности выбрано $z = 1 + \varepsilon$, т.е. $z_c = 1 + \varepsilon = 3$. При значениях $\varepsilon r_s > 4$ до исчезновения 2 - цикла рождается гиперболический 3 - цикл. Именно этот 3 - цикл после рождения эллиптической неподвижной точки ($\varepsilon r_s = 4$) и соответственно острова вблизи нее, определяет границу острова устойчивости внутри которой располагаются траектории острова устойчивости. Размер острова устойчивости, ограниченного гиперболическим 3 - циклом, с приближением аттрактора (т.е. с уменьшением εr_s) уменьшается и при $\varepsilon r_s = 3$ обращается в нуль. Это соответствует исчезновению острова устойчивости при $r_s = 3$.

При дальнейшем приближении аттрактора размеры 3 - цикла и следовательно острова устойчивости увеличиваются, и при некоторых значениях r_s вне острова устойчивости рождается еще и эллиптический 3 - цикл. При $\Delta_3 = \varepsilon r_s = 2.59807621$ эти 3 - циклы сливаются и исчезают. И граница острова устойчивости ограничивается при $\varepsilon r_s < \Delta_3$ гиперболическим 4 - циклом, родившимся при εr_s несколько больших Δ_3 . С этим 4 - циклом при приближении аттрактора наблюдаются такие же изменения, как и описанные выше изменения с 3 - циклом. Более того, качественная картина аналогична и для n - циклов более высокого порядка, рождающихся и исчезающих по мере приближения аттрактора к неподвижной точке. Все эти события происходят до значения $\varepsilon r_s = 0$ после которого исчезает остров устойчивости, а эллиптическая точка переходит в гиперболическую неподвижную точку согласно сценария, описанного в разделе 2. В эту картину необходимо внести некоторые изменения, которые могут возникать, при уменьшении ε . Они вполне очевидны из Рис.6, так в частности при уменьшении ε область существования по z n - циклов уменьшается и может возникать щель по εr_s , при существовании которой, например после исчезновения 2 - цикла, 3 - цикл рождается только после прохождения по εr_s , некоторой области значений (принадлежащих щели). В этом случае граница острова устойчивости после исчезновения 2 - цикла не ограничивается 3 - циклом, а имеет обычную структуру. И только при достижении εr_s , при котором рождается 3 - цикл, граница острова устойчивости ограничивается 3 - циклом. Аналогичные щели по параметру εr_s , в зависимости от ε , могут возникать и для других n - циклов, а также по этой причине могут отсутствовать стадии рождения (и существования) эллиптических n - циклов вне острова устойчивости. Рис.6 построен на основе решения точных уравнений для соответствующих n - циклов, а не на основании моделирования с помощью отображения (1). Исследование поведения при отображении (1), полностью подтверждает описанное выше, поведение n - циклов и островов устойчивости. При приближении аттрактора начиная $r_{s2} = 4/\varepsilon$ наблюдается остров устойчивости, ограниченный траекториями соединяющими точки гиперболического 3-цикла. Точки лежащие вне острова устойчивости притягиваются к аттрактору вдоль неустойчивых ветвей 3-цикла и выходят на аттрактор. ($\varepsilon = 2$). Приближение аттрактора до значения $r = r_{s3}$ ($r_{s4} = 1.1305$ при $e = 2.1$) не приводит к качественной перестройке границы острова устойчивости. Изменения наблюдаются в небольших смещениях положений точек 3-цикла и изменении его формы. При $r = r_{s3}$ гиперболический 3-цикл исчезает и рождается гиперболический 4-цикл, который и формирует теперь границу острова устойчивости. Бифуркации рождения 4-цикла, предшествует стадия рождения внутри острова устойчивости 7-цикла (цикла промежуточной кратности), выход которого на границу и его исчезновение предшествует рождению 4-цикла. Далее наблюдается серия бифуркаций, заключающаяся при $r = r_{sn}$ в исчезновении n - цикла и рождении $n + 1$ - цикла гиперболического типа. Этому переходу предшествует рождение внутри острова устойчивости циклов промежуточной кратности. Пример бифуркации перехода от 3-цикла к 4-циклу показан на Рис.7. Таким образом, приближение аттрактора к острову устойчивости порождает бесконечную серию бифуркаций, усложняющих границу острова устойчивости. Эта серия бифуркаций характеризуется последовательностью критических расстояний ($r_{s2}, r_{s3}, r_{s4}, \dots, r_{s\infty}$ ($r_{s\infty} = 0$)) от аттрактора до соответствующей эллиптической неподвижной точки, при которых происходит переход от n - цикла к $n+1$ - циклу. Несколько первых критических значений r_{sn} легко определить из условия существования n - циклов (см. Рис.7).

Стадии перестройки границ острова устойчивости под влиянием аттрактора, предшествует явление ано-

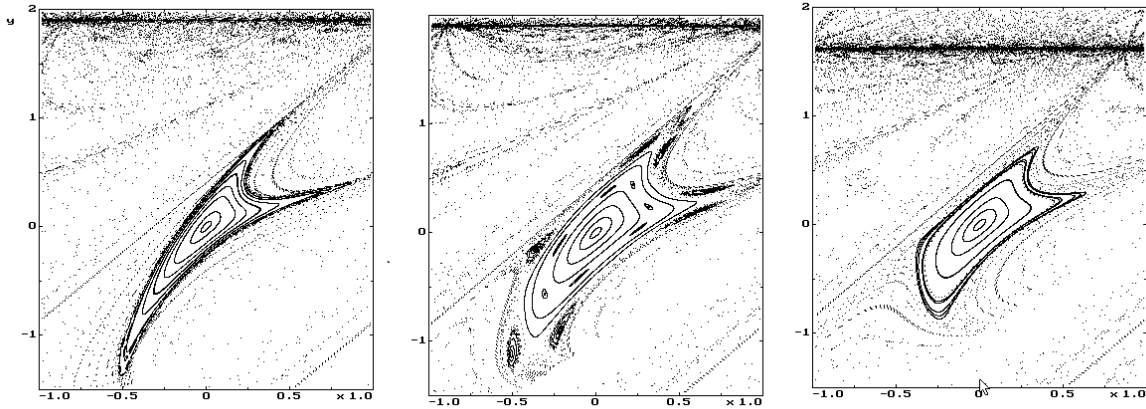


Рис. 7. Изображен переход от острова устойчивости с границей, определяемой гиперболическим 3-циклом (слева), к острову устойчивости ограниченным гиперболическим 4-циклом (справа). Этот переход происходит при приближении аттрактора к острову устойчивости. Между ними показана промежуточная стадия, предшествующая переходу, связанная с рождением внутри острова устойчивости цикла промежуточной кратности. В данном случае хорошо виден 7-цикл внутри острова устойчивости.

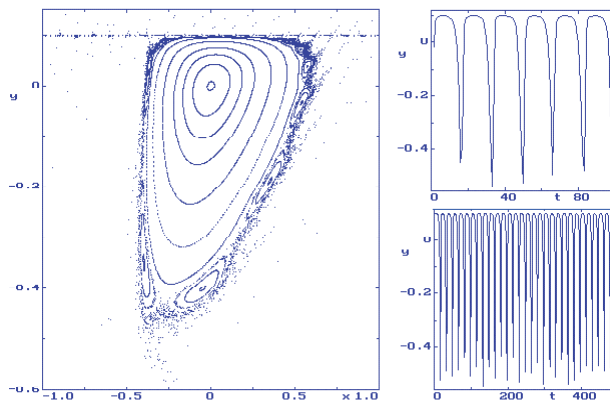


Рис. 8. Деформация острова устойчивости при приближении к нему аттрактора (справа). Хорошо виден узкий коридор между аттрактором и островом устойчивости, возникновение которого объясняет перемежаемость движений. Примеры перемежаемых траекторий приведены справа. Ламинарной фазе соответствует движение вдоль этого коридора.

мального уменьшения острова устойчивости. Другими словами, существуют такие значения ϵr_{sn} , при которых острова устойчивости резко уменьшаются в размерах (см. Рис.3), т.е. колапсируют в нуль. Это явление легко заметить, например при $\epsilon r_{s1} = 3$, $\epsilon r_{s2} = 2$. В области $\epsilon r_s \approx 2$ граница острова устойчивости формируется 4 - циклом и характерные размеры острова совпадают с характерными размерами 4 - цикла. Простые вычисления (предполагая малость 4-цикла) позволяют оценить характерные размеры 4-цикла как

$$\Delta x_{b4} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \sqrt{\epsilon r_s - 2}$$

$$\Delta y_{b4} \approx \frac{\sqrt{\epsilon r_s - 2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

где, Δx_{b4} , Δy_{b4} –характерные размеры по оси x и y соответственно. Эти соотношения и объясняют anomalously малые размеры острова устойчивости при $\epsilon r_s \approx 2$. В области $\epsilon r_s \approx 3$ граница острова формируется 3-циклом и аналогичные оценки для него позволяют оценить характерные размеры острова устойчивости

как

$$\Delta x_{b3} \approx \frac{2}{\varepsilon} \left| \frac{3 - \varepsilon r_s}{2 - \varepsilon r_s} \right|$$

$$\Delta y_{b3} \approx \frac{3}{\varepsilon} \left| \frac{3 - \varepsilon r_s}{2 - \varepsilon r_s} \right|$$

Из этих соотношений также следует аномальное уменьшение размеров острова при $\varepsilon r_s \approx 3$. Численное моделирование подтверждает в области $\varepsilon r_s \approx 2$ и $\varepsilon r_s \approx 3$ полученные оценки характерных размеров островов устойчивости (см. Рис.3).

Все значения, при которых наблюдается колапс островов устойчивости, можно упорядочить по расстояниям от соответствующей неподвижной точки (в окрестности которой располагается исследуемый остров устойчивости), до аттрактора обозначив их εr_{sn} . Значения εr_{sn} можно легко вычислить замечая, что колапс острова происходит при совпадении частоты движения по n -циклу $2\pi/n2$, ограничивающего остров устойчивости с частотой линеализованных движений в окрестности неподвижной точки, т.е. с резонансом по этим частотам. Простые вычисления позволяют получить εr_{sn} как

$$\varepsilon \bar{r}_{sn} = 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right) \quad (20)$$

Это соотношение при $n \gg 1$ упрощается и приводит к асимптотическому закону

$$\bar{r}_{sn} \simeq \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2\pi}{n} \right)^2 \quad (21)$$

определяющего положения аттрактора, при которых происходит колапс острова устойчивости, окруженного гиперболическим n -циклом. Численное моделирование подтверждает закономерность (20) и (21), обнаруживая аномальное уменьшение островов устойчивости при этих значениях.

Перейдем теперь к асимптотическому закону распределения значений r_{sn} , определяющих критические расстояния до аттрактора, при которых происходит качественная перестройка границы острова устойчивости. Так как значения r_{sn} расположены в интервале $[r_{sn}, r_{sn+1}]$, а сам этот интервал с ростом n существенно сужается, естественно предположить, что расстояния r_{sn} подчиняются аналогичному закону типа (21). Следовательно,

$$r_{sn} = \frac{A}{\varepsilon} n^{-\delta}, \quad (22)$$

где $A = (2\pi)^2$, $\delta = 2$.

Таким образом, аттрактор существенно влияет на изменение структуры границы островов устойчивости. При его приближении она претерпевает бесконечную серию бифуркаций. Значения, при которых происходит качественная перестройка границы (r_{sn}), удовлетворяют экспоненциальному закону (22). Перейдем теперь к описанию еще одной особенности, возникающей в структуре острова устойчивости под влиянием аттрактора. При приближении его к острову устойчивости возникает асимметрия в геометрическом расположении границы острова устойчивости (см. Рис. 8). Такое явление ранее наблюдалось в поведении резонанса под влиянием аттрактора [22]. В рассматриваемом отображении оно происходит аналогично и заключается в вытеснении аттрактором границы острова устойчивости. При этом наблюдается характерная перемежаемость в поведении "траекторий" лежащих вне острова устойчивости (если вне острова реализуется хаотический режим, т.е. при больших ε). Механизм перемежаемости связан с существованием узкой по y зоны между аттрактором и островом устойчивости. В этой зоне траектория меняется только по x направлению, не меняя положения по y . Такая часть траектории соответствует ламинарному участку траектории. Выходя из этой области, траектория совершает хаотическое блуждание и снова попадает в узкую зону между аттрактором и границей острова устойчивости. В этом и заключается механизм перемежаемости таких траекторий. Вследствие близости аттрактора такая перемежаемость наблюдается до выхода на аттрактор, т.е. она носит промежуточный характер.

3.3. Хаотические режимы.

Перейдем к описанию стохастических режимов. Возникающие особенности их связаны с тем, что в рассматриваемой модели не реализуется как основной сценарий стохастичности диссипативных систем [7,10], так и основной сценарий стохастичности гамильтоновых систем - перекрытие резонансов [4]. Первый, по причине отсутствия странного аттрактора, второй из-за того, что траектории притягиваются к аттрактору $y = a$ при

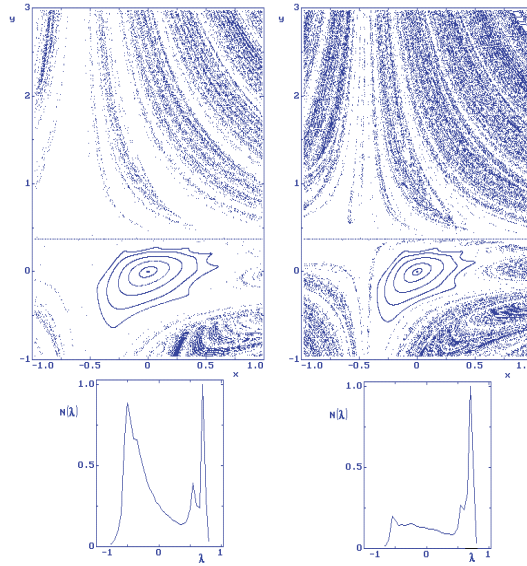


Рис. 9. Справа показана часть фазовой плоскости на которой черным цветом отмечены области хаотической фазы, белым – ламинарный при $a = 0.37, \varepsilon = 1.7$. Соответствие цветов и величины локального показателя Ляпунова, вычисляемого за 15 итераций, показаны на диаграмме ниже. $N(\lambda)$ - число траекторий с показателем Ляпунова λ . Остров устойчивости, принадлежащий ламинарной фазе показан на рисунке периодическими траекториями. Слева аналогичный рисунок при $a = 0.37, \varepsilon = 2.2$. Из сравнения видно сохранение перемежаемости ламинарных и хаотических фаз движений, а также увеличение с ε меры хаотической фазы.

любом малом $\varepsilon \ll 1$, огибая острова устойчивости. При этом выделяются две характерные области: выше аттрактора $y > a$ и полоса $a < y < a - 4/\varepsilon$. Третья область $y < a - 4/\varepsilon$ качественно похожа на область $y > a$.

Наиболее просто устроена область фазового пространства выше аттрактора (аналогично область $y < a - 4/\varepsilon$), в которой располагаются только неподвижные точки гиперболического типа. Траектории "рассеиваясь" на гиперболических точках притягиваются к аттрактору при $\varepsilon < 1$ (см. рис.4) или уходят на $+\infty$. В некотором смысле эта часть фазового пространства напоминает цилиндрический бильярд с рассеивателями в местах неподвижных точек ($P^* = (0, 2n)$).

Очевидно, что в этой области должен реализоваться стохастический режим эволюции траекторий. Однако такая картина дополнительно усложняется за счет возникновения n -циклов в фазовом пространстве, которые вносят вклад в рассеивание траекторий. Кроме этого при $\varepsilon > 1$ аттрактор теряет устойчивость, что дополнительно усложняет картину движений в рассматриваемом отображении. Для выделения областей с детерминированным и хаотическим поведением используем показатель Ляпунова [10], характеризующий разбегание близких траекторий. Будем классифицировать области фазового пространства по значению показателя Ляпунова l_n (определяемого за n -итераций, $n=15$) для пар близких траекторий, начальные точки которых принадлежат этой области. Тогда отмечая области хаотической фазы с $l_n > 0.1$ - черным цветом и ламинарной фазы с $l_n < 0.1$ - белым, легко выделить области хаотического и детерминированного поведения.

Типичная картина этих областей при $a = 2.5, \varepsilon = 1.7$ показана на рис. 9. Единственный остров устойчивости, расположенный в области не хаотических режимов, также изображен на рис.9. С увеличением ε мера фазового пространства с хаотическим поведением возрастает (см. например рис.9, при $\varepsilon=2.2$). Из этих рисунков видна сложная перемежаемая структура геометрического расположения хаотических и ламинарных фаз движений. Основные компоненты ламинарной фазы состоят из областей занятых островками устойчивости, области вблизи аттрактора и вертикальной полосы ($x = -1/\varepsilon$) сужающейся на $\pm\infty$. Основное свойство, выделяющее последнюю из областей фазового пространства связано с тем, что при начальном положении в ней точки за один шаг итерации сколь угодно близко приближаются к аттрактору. Оценим эту область используя отображение (1).

Пусть за один шаг итераций, исходная точка (x, y) приближается к аттрактору на расстояние меньше $\delta \ll 1$. Тогда $\delta > |\bar{y} - a| = |y - a| |1 + \varepsilon x|$. Здесь \bar{y} - означает следующее значение y после одного шага по времени. Откуда искомая область фазового пространства ограничивается условием

$$|y - a| < \frac{\delta}{|1 + \varepsilon x|} \quad (23)$$

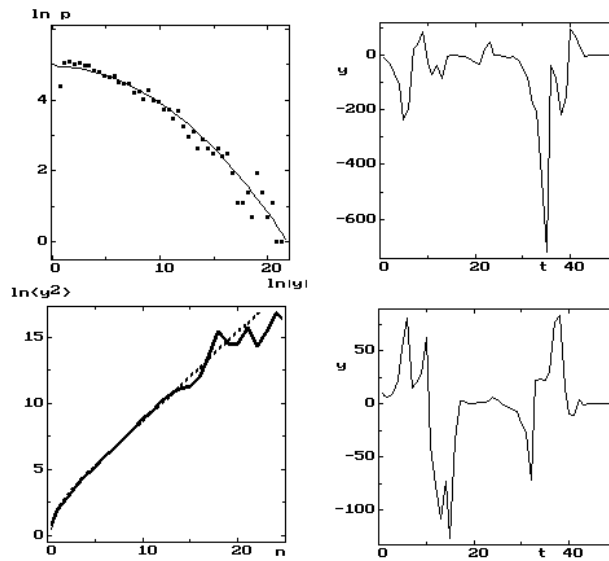


Рис. 10. Слева дано сравнение логнормального распределения y - координат (сплошная линия) с "экспериментальными" значениями функции распределения (точки), полученными при численном моделировании по значениям координат y_i . Для удобства график дан в логарифмических масштабах. Такое распределение поясняет хорошее согласие теоретического закона для изменения $\langle y^2 \rangle$ от n при аномальной диффузии (пунктирная линия на рисунке ниже) с полученным при численном моделировании (сплошная линия). С другой стороны это распределение означает сильную перемежаемость траектории в y -направлении. Примеры двух типичных перемежаемых траекторий от n приведены справа.

Эта область симметрична относительно оси $x = -1/\varepsilon$ и хорошо видна на Рис.10. Следует заметить, что при выборе начальной точки с $x = -1/\varepsilon$ она оказывается на аттракторе за один шаг итераций, более того, если в процессе итераций одно из значений x_i совпадает с $x = -1/\varepsilon$, то $y_{i+1} = a$ (см.(5)). В остальной части фазового пространства ламинарная фаза перемежается хаотической фазой самоподобным, фрактальным образом. (см. Рис. 9). Рассмотрим структуру хаотических траекторий. Численные эксперименты указывают на существование высокой степени перемежаемости таких траекторий. Природу этой перемежаемости можно понять исходя из соотношения (5). Действительно, можно предположить, что значения x_i являются случайными с однородным распределением в интервале $[-1, 1]$. Последнее предположение естественно в силу топологии фазового пространства. В этом случае значения y_i определяются произведением большого числа случайных сомножителей (см.(5)). В силу центральной предельной теоремы [22] функция распределения значений y_i стремится к логнормальному распределению. В свою очередь это означает аномальный рост статистических моментов с ростом их порядка. Такие величины, обладающие этим свойством, рассматриваются как переменные (см. например [23]), причина этого заключается в большой вероятности отклонений (т.е. выбросов) от среднего значения. Последнее обстоятельство является типичным свойством перемежаемости. Таким образом, перемежаемость движений естественна с вероятностной точки зрения в рассматриваемом отображении. На рис.10 приведен характерный пример перемежаемой траектории и сравнение функции распределения значений y , полученной при численном моделировании с логнормальным распределением.

С качественной точки зрения траектория совершает случайные блуждания уходя от аттрактора и затем возвращаясь к нему. Такой характер движения напоминает броуновское движение. Наиболее интересен характер таких движений вдоль оси y , в силу геометрии фазового пространства (цилиндр). Используя предположение о независимости x_i при различных i , легко вычислить среднеквадратичное отклонение траекторий по y от аттрактора. Действительно из соотношения (5) следует

$$(y_{n+1} - a)^2 = (y_0 - a)^2 \prod_{i=0}^n (1 + \varepsilon x_i) \tag{24}$$

После усреднения получим

$$\langle (y_{n+1} - a)^2 \rangle = (y_0 - a)^2 (1 + 2\varepsilon \langle x \rangle + \varepsilon^2 \langle x^2 \rangle)^{n+1} \tag{25}$$

Предполагая однородность по x (т.е. $\langle x \rangle = 0$ and $\langle x^2 \rangle = 1/3$) вычислим среднее квадратичное отклонение

$$\langle (y_n - a)^2 \rangle = (y_0 - a)^2 e^{n \ln(1 + \varepsilon^2/3)} \quad (26)$$

Экспоненциальный характер роста среднеквадратичного отклонения со временем n указывает на аномальный характер диффузии. На Рис. 10 показано сравнение (25) со среднеквадратичным отклонением полученным численно и усредненным по различным начальным данным. Хорошее согласие достигается на временах меньших некоторого числа итераций $n=15-30$. Причина этого связана с увеличением роли выбросов при больших n и с необходимостью увеличения статистики для подавления их. Причину хаотического блуждания траекторий можно понять исходя из самого отображения (1). При достаточно больших y_i вращение по x навязывается значениями y_i и поэтому второе отображение можно упростить заменяя его $x_{n+1} = (y_{n+1}) \bmod 2$. После этого отображение (1) эффективно одномеризуется

$$y_{n+1} = y_n - \varepsilon (a - y_n) (y_n, \bmod 2) \quad (27)$$

Следует отметить, что полученное отображение (26) не является строгим следствием отображения (1). Скорее его можно рассматривать как новую модель, описывающую поведение по y более сложного отображения (1). Из отображения (26) становится очевидным диффузионное блуждание по y .

Действительно, рассмотрим график y_{n+1} от y_n . Характерной чертой этого графика является монотонное возрастание его с y_n с наложенными на него периодическими осцилляциями монотонно растущей амплитуды. При отсутствии нарастания амплитуд осцилляций мы сталкиваемся с типичной ситуацией, используемой для описания детерминированной диффузии (см. например [24,25,26]). В нашем случае амплитуда осцилляций возрастает с ростом y . Поэтому возможность совершить больший скачок в сторону возрастания y выше, чем в сторону убывания y . С этим и связан аномальный характер диффузии.

Таким образом модель (26) объясняет диффузионное движение и его аномальность в терминах, принятых при исследовании хаоса простых динамических систем. Отметим, что учет точного отображения $x_{n+1} = (x_n + y_{n+1}), f, 2$, а не упрощенного, не влияет принципиально на описанную выше картину и фактически означает дополнение ее внешними случайными шумами. При более детальном изучении модели (26) можно обнаружить как совпадающие элементы, так и отличия от исходного отображения (1). Так, положения неподвижных точек отображения (24) $y_a^* = a$ и $y_{2k}^* = 2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) совпадают соответственно с положением аттрактора и неподвижных точек по оси y в отображении (1). Критерий устойчивости аттрактора (т.е. $y_a^* = a$) легко получить в виде $2 < \varepsilon(a \bmod 2) < 0$. Другими словами неподвижная точка устойчива, если $a \in \bigcup (2n - \frac{2}{\varepsilon}, 2n)$ (объединению открытых интервалов), где n —целые числа. Неподвижные точки отображения (26) устойчивы если $0 < \varepsilon r_s < 2$. Это означает, что критерий устойчивости неподвижных точек отображения (1) и (26) не совпадают (см. разделы 1,2). С другой стороны, повышенная устойчивость аттрактора при расположении его по y вблизи $2n$, действительно наблюдается в результате численного моделирования в соответствии с отображением (1), (см. рис.11), однако без асимметрии которая следует из критерия устойчивости согласно отображению (26).

Тем не менее, несмотря на эти различия оказывается, что модель (26) описывает правильно основные черты траектории отображения (1). Сравним поведение y_i в отображении (1), с соответствующей траекторией отображения (26) при совпадающих по y начальных условиях. Типичный пример показан на Рис.12., в области параметров a и ε соответствующих хаотическому поведению траекторий. Сравнение этих траекторий указывает на удивительное согласие: траектория модели (26) значительно отклоняясь при некоторых временах от аналогичной траектории отображения (1), восстанавливает близость на более больших временах и глобально хорошо описывает траекторию отображения (1). Это совпадение хорошо заметно на одновременном возврате на аттрактор после длительного случайного блуждания в области фазового пространства значительно удаленной от аттрактора. Следует подчеркнуть, что все это наблюдается в области хаотического поведения траекторий, в которой две исходно близкие траектории даже в самом отображении (1) экспоненциально разбегаются со временем. Сам факт существования моделей аналогичных (26)—открывает новые возможности в описании хаотических явлений. Более того, точка зрения о непредсказуемости хаотических траекторий с изменением начальных условий, оказывается не переносится на изменение закона движения. Другими словами, возможны радикальные изменения законов движения (как в выше описанном случае) при которых сохраняется близость (в определенном смысле) траекторий с одинаковыми начальными условиями, но различными законами движения. Насколько нам известно, существование таких моделей не обсуждалось в литературе.

Рассмотрим теперь интересный вопрос о предсказуемости предельных режимов. Как отмечалось ранее при $\varepsilon > 1$ аттрактор теряет устойчивость и "траектории" могут переходить из области выше аттрактора в область ниже его и наоборот. Поэтому при $\varepsilon > 1$ в отображении (1) в принципе возможны 3 предельных режима движения. Это уход на $+\infty$ и $-\infty$ и выход на аттрактор. Такое небольшое число предельных состояний делает естественным вопрос о предсказуемости выхода на эти режимы (см. [18],[27,28]). Для анализа этого

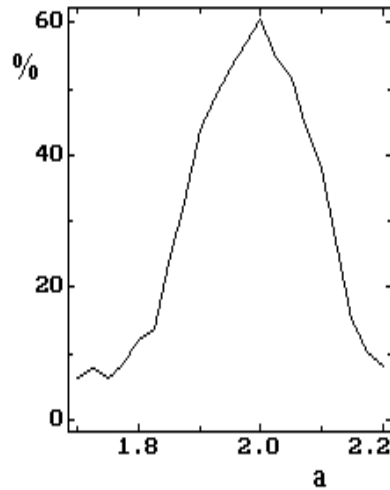


Рис. 11. График демонстрирует повышенную устойчивость аттрактора при его расположении вблизи целых четных значений y . По вертикальной оси откладывается в процентах доля траекторий выходящих на аттрактор из выбранной и фиксированной части фазового пространства, по горизонтальной оси - положение аттрактора $y=a$. Значение ε выбирается достаточно большим ($\varepsilon=2.1$) при котором заведомо следует ожидать потери устойчивости аттрактора. Полуширина построенной функции близка к $2/\varepsilon$.

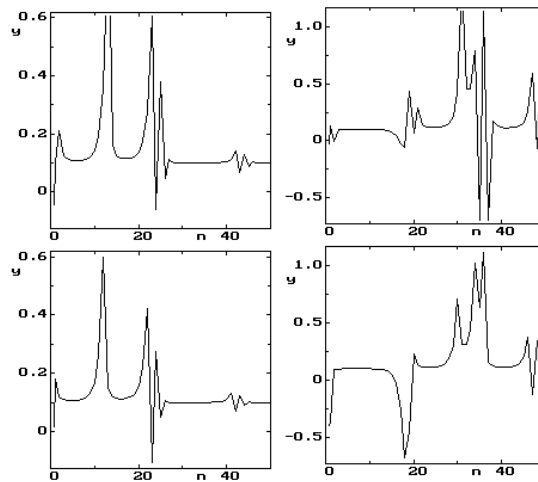


Рис. 12. Сравнение траектории y_n (с 2-мя различными начальными условиями) точного отображения (1)–сплошная линия на верхних рисунках, с соответствующими траекториями модели (24)-на нижних рисунках. Легко увидеть удивительное согласие этих траекторий на больших временных масштабах, проявляющееся даже в таких тонких деталях как в совпадении времен возврата на аттрактор и ухода с него. Следует подчеркнуть, что это сравнение проводится в области стохастического режима ($\varepsilon = 2.1$) и совпадение восстанавливается даже после существенных локальных отклонений траекторий при некоторых значениях n .

вопроса на фазовой плоскости будем отмечать черным цветом, начальные положения траекторий уходящих на $\pm\infty$ и белым, выходящих на аттрактор при $n \rightarrow \infty$.

На Рис.13 хорошо видна геометрическая структура фазового пространства, определенная в соответствии с выше приведенной классификацией точек. Область острова устойчивости окружена типичными периодическими траекториями и также показана на Рис.13. Вторая характерная область (см.(21)) притяжения к ат-

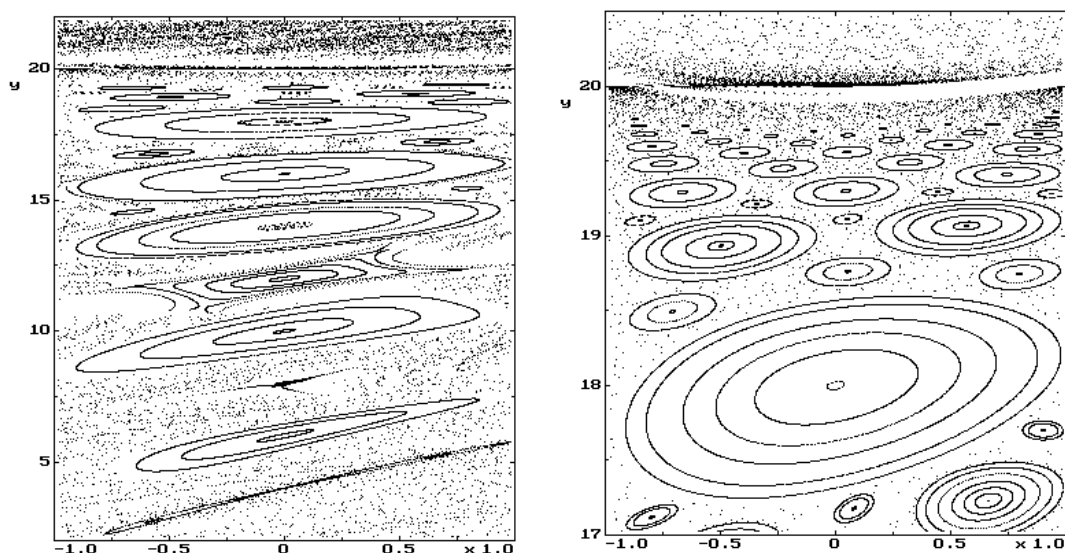


Рис. 13. Фрактальная структура фазового пространства. Начальные точки траекторий стремящихся в бесконечность при $n \rightarrow \infty$ отмечены черным цветом, притягивающиеся к аттрактору-белым. Ясна принципиальная непредсказуемость предельных режимов (аттрактор, ∞). Часть фазового пространства, отмеченная белым квадратом (слева) увеличена в 10^5 раз на правом рисунке. Хорошо заметно сохранение фрактальной структуры на малых пространственных масштабах.

трактору хорошо заметна на Рис.13. В остальной области структура начальных данных носит более сложный самоподобный (фрактальный) характер. Характерная линейчатая структура простирается вглубь на много порядков. Для иллюстрации этого, справа на Рис.13 показана небольшая часть фазового пространства увеличенная в 10^5 раз, отмеченная слева белым квадратом. Хорошо заметно сохранение типичной линейчатой структуры даже при таком сильном увеличении масштабов. Такая фрактальность фазового пространства означает, что две сколь угодно близкие начальные точки могут выходить на разные предельные режимы при $n \rightarrow \infty$.

Другими словами, имеет место экспоненциальная чувствительность начальных данных к выходу на различные предельные состояния. В определенном смысле можно сказать, что в рассматриваемой системе при $\varepsilon > 1$ реализуется сильная стохастичность, проявляющаяся в непредсказуемости даже предельных состояний, т.е. нельзя ответить на вопрос, какая начальная точка выйдет при $n \rightarrow \infty$ на аттрактор, а какая на $\pm\infty$. Следует ожидать, что при наличии нескольких предельных состояний (аттракторов) в системах со стохастическими режимами, такая сильная стохастичность будет иметь место в случае общего положения.

В заключение обсудим связь между локальным показателем Ляпунова Рис. 9 и фрактальной структурой фазового пространства Рис.13. Сравнивая эти рисунки можно заметить, что траектории выходящие на аттрактор, соответствуют ламинарной фазе, а уходящие на $\pm\infty$ турбулентной фазе движений. Это означает, что фрактальная структура может быть определена и при разделении случайных и ламинарных движений. Существование такой связи в общем случае, требует дополнительных исследований с привлечением других систем, в которых реализуется сильная стохастичность.

4. Заключение

Явления, возникающие благодаря взаимодействию резонансов и аттракторов, могут иметь место и в более сложных системах, чем системы описанные выше.

С физической точки зрения их важность изученных явлений состоит в том, что они касаются наиболее общих элементов динамических систем, а именно аттракторов (основной элемент диссипативных систем) и резонансов (основной элемент консервативных систем). Большое число физических эффектов было открыто при изучении этих элементов по отдельности. Естественно ожидать возростание интересных явлений при изучении взаимодействий между ними.

Дальнейшие исследования в этой области приведут к пониманию наиболее общих и важных свойств взаимодействия и возможно также к новым сценариям как ламинарного режима, так и турбулентного режима в подобных системах.

Список литературы

- [1] A.J.Lichtenberg , M.A. Liberman. Regular and Stochastic Motion, Springer, New York, 1983
- [2] R.H.G. Helleman in Nonlinear Mechanis in: Fundamental Problems in Statistical Mechanics, v.5 North-Holl. Publ.,Amsterdam, 1980, 165.
- [3] N.B. Abraham, J.P. Gollub, H.L. Swinney, Physica 11D, 1984, 252.
- [4] B.V. Chirikov, Phys. Rep. 52, 1979, 263.
- [5] K.Tomita Chaotic Response of nonlinear Oscillators, Phys.Rep.86, 1982, 113.
- [6] J.P. Eckman, Rev. Mod. Phys. 53, 1981, 643.
- [7] E.Ott , Rev. Mod. Phys. 53, 1981, 655.
- [8] M. Henon , Commun. Math. Phys., 50, 1976, 69.
- [9] R.M. May , Nature 261, 1976, 163.
- [10] H.G. Shuster, Deterministic Chaos, Physik-Verlag, Weinheim, 1984
- [11] V.I. Arnold, M.B. Sevryuk, in Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics Mir, Moskow, 1986, 31.
- [12] M.B. Sevryuk, Lecture notes in mathematics, v.1211, Reversible systems,Springer, Berlin,1986
- [13] A. Politi, G.L. Oppo, R. Badii , Phys. Rev. A, 486-490, 1986, 33.
- [14] T.Post, H.W. Capel, G.R.W. Quispel, J.P. Van der Weele , Phys. A, 164, 1990, 625.
- [15] J.A.G. Roberts, G.R.W. Qwispel, Phys. Rep. v.216, 1992.
- [16] F.T. Arecchi , Nucl. Phys. B 2, 1987, 13.
- [17] V.Yu. Gonchar, P.N. Ostapchuk, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Phys. Lett A, 152, 1991, 287.
- [18] V. Yu. Gonchar, E.Y. Svirinovskaya, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Phys. Lett A 174, 1993, 421.
- [19] V.I. Arnold, Dopolnitelnie glavi teorii obiknovennih differencialnih uravneniy., Moscow, Nauka 1978
- [20] R.J. Rimmer, J. Differ Equations 29, 1978, 329.
- [21] R.J. Rimmer, Mem. Am. Math. Soc. 41 (272), 1983, 1.
- [22] A.N. Kolmogorov DAN SSR, 31, 2, 1941,99.
- [23] Ia.B.Zeldovich, S.A. Molchanov, A.A.Ruzmaikin, D.D.Sokolov, UFN (Physics Uspekhi), v.152, 1, 1987
- [24] T. Geisel , J. Nierwetbery , Phys. Rev. 48, , 1982, 7.
- [25] S. Grossman , H. Fujisaka , Phys. Rev. 26 A, 1982, 1775.
- [26] H. Haken. Synergetics, Ed. Springer. Berlin-Heidelbery-New York-Tokyo, 1982.
- [27] E.Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I.Kan, J. Yorke , Phys. Rev. Lett v.71, N25, 1993, 4134.
- [28] J.C.Sommerer, E. Ott., Nature v.365, 1993, 138.