

Контактная геометрия. Введение

Содержание

1. Контактные многообразия	3
1.1. Физическая и динамическая природа контактных структур	4
1.2. Координаты Дарбу	5
2. Контактные 3-Многообразия	5
2.1. Жесткие и ОТ контактные структуры.	6
2.2. Потоки Аносова.	7
2.3. Контактные структуры и слоения	7
3. Риманова геометрия и контактные структуры	8
4. Заключение	8

Abstract

Fundamental conceptions of contact geometry are expounded in this paper. The brief review of recent achievements in this field is given. For example, the conception of rigidness and fullness of contact structure, which are dominant in the modern 3-dimensional contact geometry, are considered. The connection between the contact structure and the riemannian geometry is regarded.

1. Контактные многообразия

В последнее время заметен очередной виток в развитии контактной топологии и геометрии связанный с новыми понятиями, идеями и инвариантами. Основным объектом исследования по прежнему является многообразие с наделенной на нем контактной структурой (контактное многообразие).

Определение 1 *Гладкое поле гиперплоскостей ξ на $2n - 1$ -мерном многообразии M называется контактной структурой, если ξ локально определено как $\xi = Ker(\alpha)$, где α - невырожденная гладкая 1-форма такая, что $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$.*

Это означает, что контактные структуры нигде не интегрируемы. Напомним, что согласно известной теореме Фробениуса интегрируемость распределения заданного 1-формой α означает что $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Форму α в определении контактной структуры часто называют контактной 1-формой, а контактным многообразием называют пару (M, ξ) .

Рассмотрим некоторые примеры контактных структур:

Пример 1 *Стандартная контактная структура в \mathbb{R}^{2n-1} .*

В координатах $(z, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$ рассмотрим следующие 1-формы:

$$\alpha_1 = dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i - y_i dx_i,$$

$$\alpha_2 = dz + \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$$

Легко проверить, что $\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^{n-1} \neq 0, i = 1, 2$, поэтому каждая из рассмотренных форм является контактной 1-формой, а соответствующее поле гиперплоскостей — контактной структурой. Координаты (z, x_i, y_i) называются координатами Дарбу.

Заменяя координаты полярными координатами (r_i, θ_i) получаем контактную структуру в полярных координатах:

$$\alpha_1 = dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 d\theta_i$$

Пример 2 Стандартная контактная структура на S^{2n-1} .

Рассмотрим $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ со стандартной метрикой. В координатах $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ определим форму

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i$$

которая является полем нормалей к расслоению Хопфа $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Эта контактная структура является проективацией стандартной симплектической структуры $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ (т.е. $\omega_0 = d\alpha_0$) на \mathbb{C}^n .

Пример 3 Группы Ли. Пусть G — унимодулярная 3-мерная группа Ли и ее алгебра Ли \mathfrak{g} — не абелева. Тогда можно определить нетривиальную билинейную форму:

$$\nu : (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge d\beta,$$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$.

Если $\nu(\alpha, \alpha) > 0$, то α определяет контактную структуру на G и индуцирует контактную структуру на любом факторе — многообразии G/Γ , где Γ -дискретная подгруппа, действующая на G левыми сдвигами.

1.1. Физическая и динамическая природа контактных структур

Определение 2 Пусть M — гладкое многообразие, ξ_1 и ξ_2 — контактные структуры на нем. Будем говорить, что ξ_1 и ξ_2 — контактоморфны, если существует диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ такой, что

$$f^* \xi_1 = \xi_2.$$

Определение 3 Будем говорить, что контактные структуры ξ_1 и ξ_2 — изотопны, если их можно включить в непрерывное семейство контактоморфных контактных структур. Т. е. в пространстве контактоморфных контактных структур существует гомотопия связывающая одну контактную структуру с другой.

Оказывается, что гомотопные контактные структуры — контактоморфны, что подтверждает следующий результат:

Теорема 1 (8) [?] Пусть ξ_t — однопараметрическое семейство контактных структур на M . Тогда существует изотопия Ψ_t , такая что

$$\Psi_t \xi_0 = \xi_t$$

В доказательстве этого утверждения используется так называемый 'трюк Мозера', когда требуемая деформация ищется в классе потоков определяемых векторными полями. Также как и в случае симплектической структуры на многообразии,

с контактной структурой можно связать векторные поля сохраняющие эту контактную структуру. Такие поля называют контактными векторными полями.

Определение 4 Пусть (M, ξ) — контактное многообразие. Гладкое поле X называется контактным векторным полем, если

$$\mathcal{L}_X \alpha = g\alpha,$$

где α — контактная форма, определяющая контактную структуру ξ , а g — некоторая гладкая функция.

Понятно, что контактное векторное поле сохраняет контактную структуру ξ . Векторное поле, сохраняющее выбранную контактную форму называется Рибовским векторным полем ассоциированным с этой формой.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1 Для каждой контактной формы α , существует единственное поле X_α такое, что

$$\begin{aligned} \alpha(X_\alpha) &= 1, \\ \mathcal{L}_{X_\alpha} \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Это поле и называется полем Рибы.

ГИПОТЕЗА ВАЙНШТЕЙНА: Интегральные траектории Рибовского поля замкнутого контактного многообразия всегда содержат замкнутую орбиту.

Отметим, что частично решение этой проблемы дано в [5] для ОТ-контактных структур на замкнутых 3-многообразиях (см. ниже).

Гипотеза Вайнштейна является контактным аналогом симплектической гипотезы Арнольда о существовании и количестве замкнутых орбит Гамильтонова потока.

Приведем еще примеры контактных структур, имеющих физическое происхождение.

Пример 4 Контактная структура на кокасательном расслоении.

Рассмотрим произвольное n -мерное многообразие V . Стандартная симплектическая структура $\omega_0 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ на кокасательном расслоении единичных ковекторов T^*V индуцирует на расслоении $S^{n-1}(T^*V)$ контактную 1-форму $\alpha_0 = \mathbf{p}d\mathbf{q}$, для произвольной Римановой метрики на V . Здесь $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ определяет локальные координаты на V , а $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ — линейные координаты на слое T^*V кокасательного расслоения. Таким образом определенная контактная структура на этом расслоении называется Луивиллевой контактной структурой ξ_0 .

Можно показать, что определенное поле гиперплоскостей не зависит от выбора метрики на

$S^{n-1}(T^*V)$. Можно показать, что поток определяемый полем Рива является ни чем иным, как геодезическим потоком на многообразии V , а орбиты геодезического потока являются решением уравнения движения частицы без потенциала.

Пример 5 Гамильтоновы Системы.

Векторное поле X на симплектическом $2n$ -многообразии (M, ω) называется Луивиллевым векторным полем, если $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ (\mathcal{L}_X обозначает производную Ли вдоль векторного поля X). Пусть $Q \subset M$ — вложенная гиперповерхность. Гиперповерхность Q — называется гиперповерхностью контактного типа, если в некоторой окрестности U этой гиперповерхности существует трансверсальное Луивиллево поле $X : U \rightarrow TM$.

Как нетрудно проверить, каждая гиперповерхность контактного типа является контактным многообразием с контактной формой $\alpha = i(X)\omega$.

Интересным примером гиперповерхностей контактного типа являются гиперповерхности уровня Гамильтониана механической системы. Рассмотрим механическую систему с функцией Гамильтона H и гиперповерхность $H = \text{const}$. Очевидно, что векторное поле ∇H ортогонально гиперповерхности $H = \text{const}$ и Луивиллево. Поэтому гиперповерхность $H = \text{const}$ является контактным многообразием размерности $2n - 1$.

Пример 6 Пример из квантовой механики.

Пусть (N, ω) является $(2n - 2)$ -мерным симплектическим многообразием, чья симплектическая форма представляет кохомологический класс $[\omega]$. Тогда N допускает комплексное линейное расслоение L с $U(1)$ — связностью формы кривизны $2\pi\sqrt{-1}\omega$. L единственно с точностью до калибровочного преобразования и называется преквантованием (pre-quantization) (N, ω) . Форма связности ограниченная на S^1 — расслоение M (ассоциированное с L) определяет контактную структуру на M . Можно показать, что каждый слой M является замкнутой орбитой Ривовского поля.

1.2. Координаты Дарбу

Известно, что на римановом многообразии существуют локальные инварианты. Иными словами локально два многообразия могут быть не изометричны. Препятствием служит кривизна риманова многообразия. Естественно спросить являются ли локально два контактных многообразия контактноморфными. Удивительным является тот факт, что ответ является положительным. Это подтверждает следующая теорема:

Теорема 2 (Darboux) Пусть (M, α) — $(2n - 1)$ -мерное контактное многообразие. Для каждой

точки $p \in M$ существует ее окрестность U такая, что

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i \quad p = (0, 0, \dots, 0),$$

т.е. в достаточно малой окрестности точки контактные структуры контактноморфны.

Это означает что, во-первых контактные структуры не допускают локальных инвариантов и во-вторых, что на контактном многообразии мы всегда можем выбрать атлас с координатами Дарбу (см. пример 1).

Замечание 1 Аналогичный результат справедлив и для симплектических структур на четномерных многообразиях.

Каждая контактная структура индуцирует Ривовское поле и динамические свойства этого поля являются важными топологическими инвариантами. Можно было бы ожидать, что инварианты контактных структур могут возникать в окрестности замкнутых траекторий Ривовских полей. Однако контактные структуры не имеют даже таких инвариантов:

Теорема 3 Для каждого узла Γ трансверсального данной контактной структуре ξ на трехмерном контактном многообразии M , существует трубчатая окрестность $U_\epsilon(\Gamma)$ и цилиндрические координаты (r, θ, z) в которых контактная структура имеет следующий вид:

$$\xi_{U_\epsilon(\Gamma)} = \text{Ker}(\cos r^2 dz + \sin r^2 d\theta)$$

ВЫВОД: Исследование контактных структур представляет проблему глобального, а не локального характера.

2. Контактные 3-Многообразия

Как нами было замечено ранее контактные структуры существуют локально на каждом нечетномерном многообразии. Глобальная проблема существования представляет собой нетривиальную задачу, которая решена в трехмерном случае Мартине:

Теорема 4 (Martinet) На каждом замкнутом ориентируемом многообразии существует контактная структура.

В доказательстве этого утверждения используется теорема Ликориша [9] гласящая, что каждое ориентируемое замкнутое многообразие может быть получено из трехмерной сферы с помощью скручиваний Дена вдоль узла в S^3 .

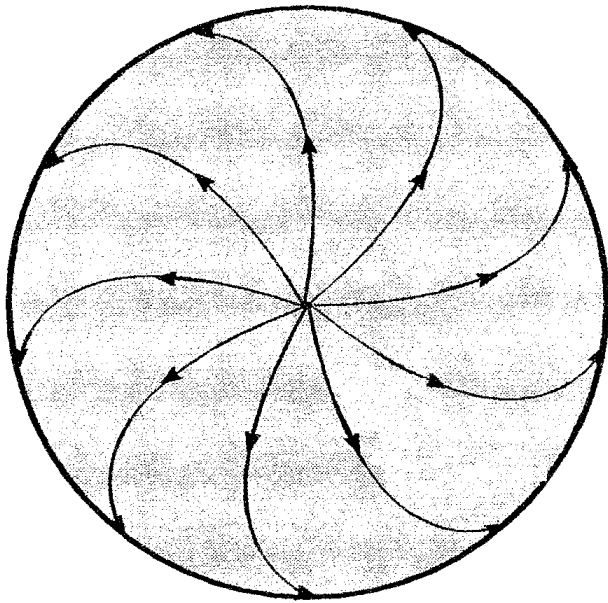


Рис. 1.

2.1. Жесткие и ОТ контактные структуры.

Естественно задать следующий вопрос:

Вопрос 1 Являются ли контактные структуры получаемые скручиваниями Дена из стандартной контактной структуры на S^3 контактоморфными стандартной контактной структуре?

Этот вопрос был изучен Бенекуином в работе [2]. Оказалось, что в процессе скручиваний Дена получаются контактные структуры, которые в контактной топологии получили название "overtwisted" (ОТ) контактных структур. Таким образом теорема Мартине переформулируется следующим образом

Теорема 5 На каждом замкнутом ориентированном 3-многообразии существуют ОТ структуры.

Бенекуин ввел понятие жесткой контактной структуры, которое является основным и центральным понятием современной контактной топологии.

Определение 5 Контактная структура на 3-многообразии называется ОТ структурой (см. выше) если существует вложенный диск \mathcal{D} (в дальнейшем называемый ОТ-диском), характеристическое слоение $(T\mathcal{D} \cap \xi)$ которого имеет вид такой как показано на рисунке 1, причем касание диска с контактной структурой происходит на границе и в центре диска. В противном случае контактная структура называется жесткой контактной структурой.

Собственно основным результатом Бенекуина является следующая теорема.

Теорема 6 Стандартная контактная структура (S^3, ξ_0) является жесткой.

(Это значит что ответ на Вопрос 1 — отрицательный).

С другой стороны Элиашберг доказал следующее [3]:

Теорема 7 Пусть (M, ξ) — замкнутое контактное многообразие. Тогда в каждом гомотопическом классе полей гиперплоскостей существуют ОТ структуры, при этом две контактные структуры из одного гомотопического класса изотопны.

Таким образом классификация ОТ контактных структур с точностью до изотопии сводится к гомотопической классификации полей гиперплоскостей.

Обычно очень нелегко доказать жесткость данной контактной структуры. Одним из способов доказать жесткость, является конструкция наполнения, описываемая ниже.

Определение 6 Если существует компактное симплектическое многообразие (W, ω) такое, что $\omega|_{\xi}$ принадлежит конформному классу $\{f\alpha; f > 0\}$ симплектической структуры на ξ (которая определена контактной структурой $(M = \partial W, \xi)$), тогда контактная структура (M, ξ) называется наполненной (fillable) и многообразии (W, ω) называется симплектическим наполнением (M, ξ) .

Пример 7 Контактная структура на тотальном пространстве S^1 -расслоения над замкнутой поверхностью Σ трансверсальная каждому слою является наполненной.

Для этого достаточно заметить, что D^2 -расслоение над Σ , ассоциированное с S^1 -расслоением, является симплектическим наполнением для ξ .

Следующая глубокая теорема принадлежит Громову:

Теорема 8 [4] Наполненные контактные структуры являются жесткими.

Как следствие получаем результат Бенекуина:

Следствие 1 Стандартная контактная структура на S^3 является жесткой.

Действительно, стандартная контактная структура на S^3 является симплектическим наполнением стандартной симплектической структуры на единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^4$ (см. пример выше).

Отметим, что не всякая жесткая контактная структура является наполненной [6].

2.2. Поток Аносова.

В этом разделе мы рассмотрим связь контактных структур с динамическими системами.

Определение 7 *Невырожденный гладкий поток ϕ_t на замкнутом 3-многообразии M^3 называется потоком Аносова, если существует ϕ_t инвариантное непрерывное разложение касательного расслоения $TM = T\phi \oplus E^{uu} \oplus E^{ss}$ такое, что для некоторой римановой метрики на M и для некоторого числа c выполнено:*

$$\begin{aligned} \forall v \in E^{uu}, \forall t > 0, |(\phi_t)_*v| &\geq \exp(ct)|v|, \\ \forall v \in E^{ss}, \forall t < 0, |(\phi_t)_*v| &\geq \exp(ct)|v| \end{aligned}$$

Расслоения $E^u = T\phi \oplus E^{uu}$ и $E^s = T\phi \oplus E^{ss}$ определяют в этом случае слабое Аносовское разложение и соответствующие им слоения называются нестабильным и стабильным слоением соответственно.

Определение 8 *Биконтактной структурой на многообразии называется трансверсальная пара (ξ, ν) контактных структур с противоположной ориентацией.*

С каждым потоком Аносова можно связать биконтактную структуру. Определим поля ξ и ν так, чтобы они содержали направление $T\phi$ и образовывали угол $+45$ и -45 градусов с расслоениями E^s и E^u .

Теорема 9 [7] *Пара распределений (ξ, ν) таким образом связанная с потоком Аносова является биконтактной структурой.*

Обратное вообще говоря неверно. Поток определенной биконтактной структурой не всегда является потоком Аносова. Однако поток, задаваемый биконтактной структурой, является так называемым проективным Аносовским потоком (РА-flow).

Определение 9 *Невырожденный гладкий поток ϕ_t на замкнутом 3-многообразии M называется проективным Аносовским потоком если проективизация $T\phi_t$ дифференциала потока индуцированная на проективизированном нормальном расслоении $S^1(TM/T\phi)$ обладает свойствами Аносовского потока. А именно:*

1. *Найдутся четыре попарно различные попарно антиподальные непрерывные сечения E_{\pm}^u и E_{\pm}^s расслоения $S^1(TM/T\phi)$ инвариантные относительно индуцированного потока $T\phi$.*
2. *Орбита каждой точки не лежащая на этих сечениях притягивается к E_{\pm}^u когда $t \rightarrow \infty$ и к E_{\pm}^s когда $t \rightarrow -\infty$.*

Оказывается, что проективные потоки Аносова и биконтактные структуры являются двойственными объектами. А именно справедлива

Теорема 10 [7]

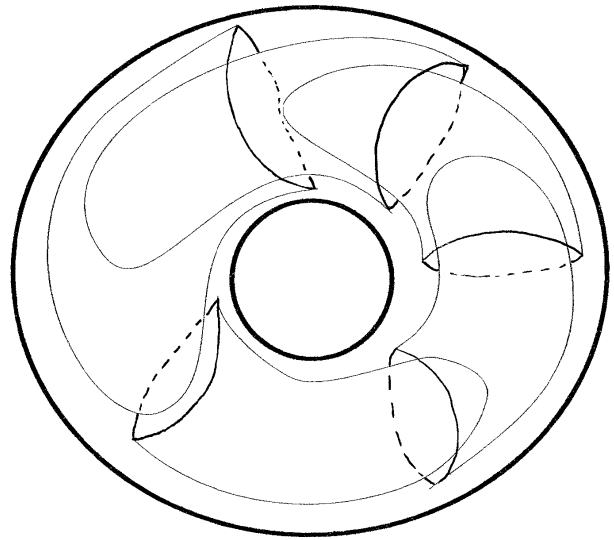


Рис. 2.

1. *Каждый проективный поток Аносова определяет биконтактную структуру также как и обычный поток Аносова.*
2. *Поток определенный биконтактной структурой является проективным Аносовским потоком.*

Оказывается, что если потребовать от проективного Аносовского потока некоторые свойства регулярности, то биконтактная структура определенная этим потоком будет состоять из жестких контактных структур.

2.3. Контактные структуры и слоения

Напомним, что слоением коразмерности q на n -мерном многообразии M называется разбиение M на $n - q$ -мерные подмногообразия, являющиеся касательными к интегрируемому $n - q$ -мерному распределению на M . Если распределение имеет коразмерность 1 и задано 1-формой α , то согласно теореме Фробениуса интегрируемость распределения эквивалентна уравнению $\alpha \wedge d\alpha = 0$. В случае $n = 3$ существует аналог ОТ структур, это слоения с рибовскими компонентами (см. рис. 2). Оказывается, что слоения без рибовских окмпонент (на самом деле здесь имеется ввиду обобщенная рибовская компонента, для простоты изложения мы не останавливаемся на определении и отсылаем автора к [10]) могут быть аппроксимированы жесткой контактной структурой (Элиашберг). Замечательным свойством слоений без рибовских компонент является их минимизируемость для некоторой метрики (все слои становятся локально минимальными подмногообразиями). Такие слоения называются тугими. Оказывается, что свойство слое-

ния быть тугим влечет отсутствие рибовских компонент. Наконец отметим, что согласно теореме Новикова каждое слоение на трехмерной сфере обладает рибовской компонентой. Однако, как отмечалось выше трехмерная сфера обладает жесткой контактной структурой, поэтому полной аналогии между жесткостью контактных структур и тугими слоениями нет.

3. Риманова геометрия и контактные структуры

В силу того, что контактные структуры не имеют локальных инвариантов, изучать локально геометрические свойства контактных структур на римановом многообразии бессмысленно. Однако геометрическое происхождение контактных структур все же дает возможность нового подхода к изучению интересных классов контактных структур на римановых многообразиях.

Определение 10 Пусть (M, g) — риманово многообразии. И пусть $\sigma \subset TM$ - распределение размерности 1. С каждым таким распределением естественным образом связывается симметрическая билинейная форма B -аналог второй фундаментальной формы

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z),$$

где X и Y лежат в распределении σ , а Z является единичным вектором нормали к распределению.

Определение 11 Распределение σ называется вполне геодезическим, если каждая геодезическая касающаяся его в одной точке касается его и в любой ее точке.

Как и в случае подмногообразий верна следующая теорема:

Теорема 11 Распределение σ на римановом многообразии M является вполне геодезическим, тогда и только тогда, когда $B = 0$.

Пусть теперь (M, ξ) — риманово контактное многообразие. Будем называть ξ вполне геодезической контактной структурой, если ξ является вполне геодезическим распределением на M .

Пример 8 Стандартная контактная структура на S^3 является вполне геодезической контактной структурой.

Как нетрудно показать вполне геодезические контактные структуры существуют не на всех замкнутых ориентируемых 3-многообразиях. Это связано с тем, что двойственным объектом (имеется ввиду ортогональное векторное поле к контактной структуре) к вполне геодезическому распределению, являются римановы векторные поля, существующие

не на всех многообразиях, например гиперболические формы (в любой метрике!) не допускают римановых векторных полей.

Напомним определение риманова векторного поля:

Определение 12 Пусть (M, g) — риманово многообразии. Невырожденное векторное поле X называется римановым, если

$$\mathcal{L}_X g_\sigma = 0,$$

где g_σ — метрика индуцированная на распределении σ , ортогональном полю X .

Недавно авторами полностью изучен вопрос существования вполне геодезических контактных структур на компактных трехмерных фактор многообразиях однородных пространств. Существует интегральное препятствие делающее невозможным существование вполне геодезических контактных структур на компактных многообразиях по образцу $Sol, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ геометрий [1]. На остальных компактных терстоновских многообразиях существует естественная модельная вполне геодезическая контактная структура за исключением случая многообразий по образцу $S^2 \times S^1$. В этом случае авторами доказана невозможность существования вполне геодезической контактной структуры.

Ясно, что вполне геодезические контактные структуры, являются контактным аналогом вполне геодезических слоений, которые по определению являются тугими. Поэтому естественным представляется вопрос о жесткости таких контактных структур.

Гипотеза 1 (Болотов) *Вполне геодезическая контактная структура на замкнутом 3-многообразии является наполненной (по крайней мере жесткой).*

4. Заключение

Контактные многообразия имеют явно физическое происхождение и поэтому представляют несомненный интерес как для математиков так и для физиков. Взрыв новых идей и понятий в современной симплектической и контактной геометрии несомненно должен повлечь за собой физические обобщения. Несмотря на то что большинство физических примеров контактных структур являются жесткими и даже симплектически наполненными, мы уверены что, например, такое понятие как ОТ структура обретет свое физическое значение. К сожалению, за пределами обзора остались вопросы, связанные с теорией узлов и симплектической теории поля, но мы надеемся что данный обзор послужит отправной точкой для дальнейшего изучения современной контактной геометрии.

Список литературы

- [1] Терстон У. Трехмерная геометрия и топология I. – Москва: МЦНМО. – 2001.
- [2] Bennequin D. Entrelacements et equations de Pfaff // Asterisque. – 1983. – V. 107–108. – P. 83–161.
- [3] Eliashberg Ya. Classification of overtwisted contact structures on tree manifolds // Invent. Math. – 1989. – V. 99. – P. 623–637.
- [4] Gromov M. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math. – 1985. – V. 82. – P. 307–347.
- [5] Hofer H. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three // Invent.math. – 1993. – V. ?? – P. 515–563.
- [6] Honda K. 3-dimensional methods in Contact Geometry. Preprint. – 2003.
- [7] Mitsumatsu Y. Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds // Ann. l'Inst. Fourier. – 1995. – V. 45. – P. 1407–1421.
- [8] Gray J.W. Some global aspects of contact structures // Ann. Math. – 1959. – V. 69. – P. 421–450.
- [9] Liekovich W. A Foliation for 3-manifold // Ann. Math. – 1965. – V. 82. – P. 414–420.
- [10] Eliashberg Y., Thurston W. Confoliations // A.M.S University Lecture Series. – 1998.