

Куклин В.М.

Институт высоких технологий,
Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина, пл. Свободы 4,
Харьков 77, 61077, Украина

Образование самоподобных пространственных структур в модуляционно-неустойчивых средах

Содержание

1. Введение	85
2. Формирование структур с линейчатыми спектрами	86
3. Механизмы формирования самоподобных пространственных структур	88
4. Модуляционные неустойчивости в условиях слабой надпороговости	90
5. Каскад неустойчивостей и формирование самоподобных структур на разных масштабах	94
6. Самоподобные структуры на поверхности и в объеме кристаллов	95
7. Заключение	98

Abstract

The energy loss processes in non-equilibrium media, which can change in workmanlike manner the form, shape and quality of nonlinear structures are discussed. It is shown, in media, where condition of modulation instability of mature structures is fulfilled and there is a small threshold crossing of that instability, the appeared line spectrum of structure causes to the cascade of instabilities, which produce the self-similar structure. The modulation instabilities of mature spatial structures in media with and without wave motions (i.e. the wave, propagating in medium with cubic nonlinearity, and the convective cells in a layer fluids) are considered. The conditions of appearance and experimental observations of the self-similar structures on the surface and in the volume of solid state are discussed.

1. Введение

В неравновесных нелинейных средах с конечным уровнем диссипации возможно формирование регулярных пространственных структур [1,2]. Ниже ограничимся рассмотрением механизмов образования самоподобных структур в неравновесных средах и системах с кубической нелинейностью, находящихся вблизи и несколько выше порога неустойчивости [3]. Как показано ниже, обязательным условием появления таких структур является возможность возникновения модуляционных неустойчивостей. Такие неустойчивости возникают в средах, где градиенты плотности энергии первичных возмущений способны возбуждать сравнительно медленные движения, причем последние явля-

ются вынужденными и в отсутствии поддерживающего их источника существовать не могут.

Как известно, периодические волны (или структуры) конечной амплитуды в средах с кубической нелинейностью являются неустойчивыми с возбуждением двух боковых спектров вынужденных возмущений, соответственно с большей и меньшей длиной волны. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны (или структуры). Что и определило название этого типа неустойчивостей — модуляционные. В условиях поглощения энергии возмущений в среде инкременты модуляционной неустойчивости уменьшаются и, вообще говоря, существует пороговая амплитуда начальной волны или структуры, при превышении которой неустойчивость развивается. Отме-

тим, что для наблюдения модуляционной неустойчивости в поглощающей среде, вообще говоря, должен существовать источник энергии, который поддерживает основную волну или структуру. Вблизи порога спектральная ширина неустойчивости невелика, амплитуды возникающих возмущений даже в режиме насыщения остаются много меньше амплитуды начальной волны (или структуры). Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости возмущений между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с основной волной (структурой), причем их действие на основную волну (структуру) носит интегральный характер. Именно поэтому можно считать, что такая система может быть определена как квазилинейная.

В работе отмечены две основные черты модуляционных неустойчивостей в средах с большим уровнем поглощения энергии. Во-первых, в результате обсуждаемых ниже механизмов конкуренции мод формируются узкие спектры боковых возмущений. В режиме насыщения неустойчивости развитая пространственная структура приобретает характерный линейчатый спектр. Во-вторых, формирование линейчатого спектра облегчает выполнение условий для следующей, уже модуляционной неустойчивости, которая развивается в рамках подобного сценария. Промодулированная в результате развития первичной модуляционной неустойчивости волна (или структура) подвергается модуляции из-за последующей неустойчивости уже на существенно большем масштабе. Можно убедиться в том, что каждая модуляция сохраняет черты основной волны (или структуры) в соответствующем масштабе, формируя, таким образом, самоподобную структуру.

Формирование самоподобных структур обусловлено в основном неравновесностью, диссипативными механизмами и нелинейностью и слабо зависит от дисперсионных характеристик среды. Как правило, высокая структурная четкость реализуется именно при слабой надпороговости неравновесных систем и сред. С другой стороны, близость к порогу и создает условия для реализации каскадов неустойчивостей, формирующих подобные друг другу пространственные структуры на разных масштабах, так как в условиях аномально малой ширины линий пространственного спектра структур инкремент (величина, обратная характерному времени развития) модуляционных неустойчивостей наибольший.

Кстати, пространственная четкость (то есть, достаточно длительное время сохранения определенной формы) обусловлена или фазовым синхронизмом мод, составляющих пакет, или узкой спектральной шириной пакета, описывающего нелинейное образование, причем ниже в основном реализуется второй случай.

2. Формирование структур с линейчатыми спектрами

В слабонеравновесных средах неустойчивости развиваются лишь после превышения параметром, который определяет характер неравновесности некоторого порогового значения. При небольшом превышении порога неустойчивости в узкой спектральной области, определяемой условиями $\text{Im } \omega|_{\delta=0} \equiv \gamma(\omega, k) > \delta(\omega, k)$ начинается рост возмущений с инкрементом $(\text{Im } \omega)_{eff} = \gamma(\omega, k) - \delta(\omega, k)$, где $\text{Im } \omega|_{\delta=0} \equiv \gamma(\omega, k)$ – инкремент неустойчивости в среде без потерь энергии, $\delta(\omega, k)$ – декремент поглощения энергии возмущений в отсутствие источника энергии (поддерживающего эти возмущения и приводящего к их росту), ω, k – соответственно, частота и волновое число возмущений, причем $(\text{Im } \omega)_{eff} \ll \gamma(\omega, k), \delta(\omega, k)$. Неустойчивости развиваются обыкновенно после превышения некоторого порога.

При небольшом превышении порога неустойчивости в узкой спектральной области начинается рост возмущений. Нелинейность, как известно, приводит к взаимодействию возмущений, имеющих различный пространственно-временной масштаб, по определенным законам, обусловленным видом нелинейности. При этом возникшие за счет синтеза или распада растущих мод новые возмущения оказываются в областях спектра, где они испытывают относительно сильное поглощение. Это обстоятельство значительно подавляет их рост и они во многих случаях не оказывают заметного влияния на развитие неустойчивости в целом. Кроме того, вблизи порога неустойчивости амплитуды возмущений даже в режиме насыщения остаются заметно меньше амплитуд накачки, что позволяет воспользоваться малостью их отношения, которое оказывается по порядку величины сравнимым с $(\text{Im } \omega)_{eff} / \delta(\omega, k)$.

Формирование обсуждаемых ниже пространственных структур обусловлено перераспределением энергии в сравнительно узких спектральных интервалах, управляется и поддерживается энергией начальной волны (или структуры) — накачки. Важно отметить, что подавление многих видов нелинейных взаимодействий дает возможность значительно упростить матричные элементы взаимодействия мод, что также облегчает описание систем.

Системы уравнений, описывающие процессы формирования структур во всех обсуждаемых в данной работе случаях фактически являются квазилинейными, так как воздействие неустойчивых мод на поле накачки является интегральным, а непосредственным взаимодействием неустойчивых мод можно пренебречь из-за наличия малого параметра, в частности, отношения амплитуды возбуж-

даемой моды к амплитуде поля накачки.

Любая пространственная периодическая (или квазипериодическая) структура при своем формировании в слабонадпороговой неравновесной диссипативной сплошной среде имеет своей причиной некоторый процесс — первичную неустойчивость, — который обладает определенным инкрементом (обратным характерным временем развития) и насыщающейся нелинейностью. После достижения амплитудой структуры некоторого конечного значения происходит сужение спектра пространственных мод из-за нелинейного механизма их конкуренции, ибо процессы переноса по спектру энергии возмущений оказываются в рассматриваемых нами условиях подавленными. И лишь потом, если амплитуда структуры достаточно велика, а спектральная ширина вполне мала, могут возникать условия для реализации вторичной неустойчивости.

Развитие первичной неустойчивости в слабонадпороговом случае обычно ограничивается нелинейными механизмами, после чего можно наблюдать сужение спектра возмущений. Обсудим механизмы конкуренции мод, обеспечивающие такое сужение растущих спектров, в случаях как волновых (то есть там, где могут распространяться волновые возмущения) и неволновых сред (то есть сред, где возмущения имеют не волновой характер, например вихревые процессы, локализованные, нераспространяющиеся возмущения).

В волновых средах, которые находятся вблизи и несколько выше порога устойчивости амплитуды неустойчивых мод изменяются значительно медленнее, чем их фазы. Это приводит к тому, что фаза каждой моды поля при развитии неустойчивости быстро подстраивается к своему квазистационарному значению. Именно этот процесс и определяет пространственную структуру возмущения, причем следует особо отметить, что вид пространственной структуры растущего возмущения задан начальными фазами мод и в значительной степени формируется уже на начальной, линейной по амплитудам мод стадии процесса [4,5]. Рост амплитуд спектра приводит к уменьшению уровня накачки, при этом моды с большими значениями расстройки (то есть, на периферии зоны линейной неустойчивости) становятся затухающими. Ширина спектра неустойчивости постепенно уменьшается.

В неволновых средах, где фазы пространственных мод или отсутствуют или их изменения не существенны, механизм конкуренции мод несколько иной. Вблизи и несколько выше порога устойчивости область возбуждаемых пространственных мод весьма мала и условия их генерации практически не отличаются. На характер конкуренции мод слабо влияет даже некоторое отличие их инкрементов, вообще говоря, зависящих от волновых чисел возмущений. Инкремент мод конечной амплитуды ра-

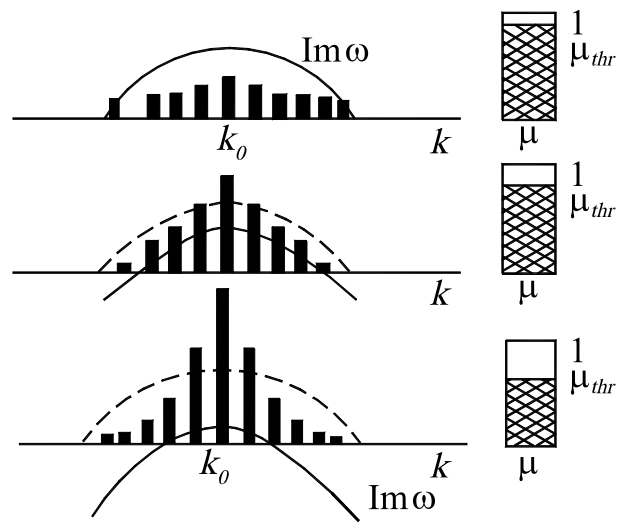


Рис. 1. Эволюция мод спектра и уровня накачки μ .

вен разности линейного инкремента и нелинейного слагаемого, пропорционального суммарной интенсивности спектра в целом. Поэтому рост спектра приводит к уменьшению инкрементов всех мод практически до нуля и резкому замедлению процесса неустойчивости. Получившая преимущества из-за начальных условий или в результате воздействия внешнего шума одна (или несколько) мода приводит к уменьшению амплитуд мод остального спектра. Это уменьшение суммарной интенсивности остального спектра может позволить растущей моде еще больше увеличить свою амплитуду и продолжить процесс подавления других мод спектра. Ширина линий спектра развитой неустойчивости оказывается не только много меньше естественной их ширины (то есть, ширины спектра в отсутствие неравновесности), но и продолжает уменьшаться, так что в спектре выживает лишь одна мода (см. например, [6]).

Эти механизмы конкуренции мод обусловлены, так называемым, "истощением накачки". Обратим внимание на навязанное в неравновесной среде диссипативными процессами сужение спектра волнового пакета и формирование линий с аномально узкой спектральной шириной. То есть, с такой шириной, которая оказывается много меньше ширины спектра возмущений (шума) в диссипативной среде в равновесном случае.

Таким образом, в результате действия механизмов конкуренции мод в системе, находящейся вблизи порога неустойчивости, как правило, наблюдается эффект сужения спектра развивающейся неустойчивости вплоть до превращения его в линейчатый.

Именно эти явления и объясняют известный парадокс нелинейных систем со слабой надпороговостью. Полученные в результате развития неустойчивости в экспериментах и при численном модели-

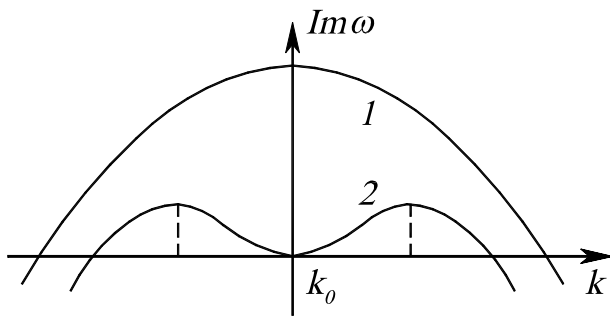


Рис. 2. Вид инкремента как функции волнового числа мод спектра в случае начальной стадии формирования первичной структуры (1) и в случае развитой структуры, когда реализованы условия для развития вторичной модуляционной неустойчивости (2).

ровании развитые структуры конечной амплитуды имеют сравнительно простой вид, обусловленный линейчатым спектром. Это на первый взгляд неожиданно, так как такие линейчатые спектры более характерны были бы для линейных сред, где взаимодействие мод отсутствует. Оказывается, именно потому, что воздействие спектра на отдельную моду носит интегральный характер, и векторная природа нелинейности, а также перенос энергии по спектру существенно подавлены, становится вероятным реализация данных эффективных механизмов конкуренции мод, в результате которых и формируются линейчатые спектры. Формирование линейчатого спектра возникающей структуры в (ω, k) пространстве в результате развития первичной неустойчивости в случае слабой надпороговости провоцирует развитие вторичной — модуляционной неустойчивости (если, конечно, выполнены условия её существования), которая фактически черпает энергию на свое развитие из энергии, запасенной в развитой первичной структуре.

Вторичные неустойчивости обычно появляются на заключительной стадии процесса формирования первичной структуры для всех систем, где выполнены условия развития модуляционных неустойчивостей. Отметим, что процессы уменьшения спектральной ширины области первичной неустойчивости здесь весьма важны, ибо снижают пороги и характерные времена вторичных модуляционных неустойчивостей. Последние возникают при превышении амплитудой структуры некоторого порогового значения. В этом случае нелинейный инкремент неустойчивости, в максимуме которого располагались основные моды первичной структуры, уменьшается до нуля и при дальнейшем росте амплитуды первичной структуры возникают новые области неустойчивости вблизи этих основных мод.

При превышении порога и при развитии вторичной неустойчивости следует ожидать возникнове-

ния модуляции амплитуды первичной структуры, которая в свою очередь является более крупномасштабной структурой, подобной первичной.

Все эти явления дают основания считать появление вторичной неустойчивости вынужденным нарушением симметрии, а модуляцию — распределенными дефектами основной структуры [7,8].

Относительная слабость вторичного процесса приводит к тому, что отвечающая ему вторичная неустойчивость имеет сравнительно узкую спектральную ширину вблизи волновых чисел первичной структуры. В средах с наиболее характерной кубической нелинейностью такие вторичные процессы носят характер модуляционных неустойчивостей диссипативного (или резистивного) типа. Формирование крупномасштабной структуры — модуляции основной структуры, — таким образом, является скорее общим правилом, чем исключением в тех случаях, когда первичный процесс и имеющая место в этих условиях вторичная неустойчивость развиваются в узких интервалах в пространстве волновых чисел, а рост возмущений вне этих интервалов сильно подавлен. Другими словами, имеют место малые превышения над порогами первичной, вторичной и последующих неустойчивостей, что позволяет ввести в рассмотрение характерные числа R_i ($i = 1, 2, \dots$) — параметры порядка, определить их критические значения $R_{cr,i}$, а затем показать, что обратные времена развития первичного, вторичного и последующих процессов, а также амплитуды основной структуры и огибающих выражаются через соответствующие параметры надпороговости $\varepsilon_i = (R_i - R_{cr,i})/R_{cr,i}$.

Отметим также, что наличие малого параметра $\varepsilon \propto (\text{Im } \omega)_{eff}/\gamma(\omega, k)$ (как впрочем и отношение амплитуд развитой вторичной структуры (модуляции) к амплитуде первичной) приводит к тому, что интенсивности спектров неустойчивых мод даже на нелинейной стадии каждой последующей неустойчивости каскада оказываются много меньше интенсивностей уже развитой структуры мод, отвечающих процессу насыщения предыдущей неустойчивости, не говоря уже об интенсивности начальной волны, что дает возможность, используя соответствующие малые параметры задачи, значительно упростить матричные элементы взаимодействия мод и облегчает описание подобных систем. Это обстоятельство также позволяет корректно рассмотреть развитие и насыщение таких неустойчивостей.

3. Механизмы формирования самоподобных пространственных структур

Обычно эволюционное уравнение в средах с кубической нелинейностью, описывающее формирование пространственных структур может прини-

мать вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_k a_k &\equiv \frac{\partial a_k}{\partial t} + \varepsilon(k) a_k \\ &= \iiint dk_1 dk_2 dk_3 a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \\ &\quad \times (V_{kk_1 k_2 k_3} + \alpha S_{kk_1 k_2 k_3}) + f_k, \quad (1) \end{aligned}$$

где a_k – Фурье-образ возмущений. Матричные элементы взаимодействия пространственных мод V и S определяются видом взаимодействия возмущений в системе и отвечают за формирование основной мелкомасштабной структуры и её модуляции – распределенного дефекта (при малых α), соответственно. В ряде случаев второе слагаемое под интегралом может отсутствовать ($S = 0$), тем не менее, при развитии первичной структуры в системе возникают условия для последующей неустойчивости, так называемого, модуляционного типа, которая приводит к образованию крупномасштабного распределенного дефекта.

Отметим, что во многих случаях возникновение первичных структур происходит с флуктуационного уровня и начальные возмущения весьма малы в сравнении с амплитудами развитых структур, хотя возможны и процессы формирования структур при конечном уровне амплитуд пространственных мод. Величина $\varepsilon(k)$ имеет локальные максимумы вблизи $|k| = |k_{1i}|$, ($i = 1, 2, \dots$) и быстро убывает при удалении от этих точек, причем, если величины волновых векторов $|k|$ заметно отличаются от $|k_{1i}|$, то $\varepsilon(k) < 0$ что и определяет сильное подавление таких возмущений.

Однако, этого мало для формирования пространственной структуры. Выбор системой ориентации происходит также за счет наличия у функций $\sim V$ и S (или у соответствующего интеграла – потенциала Ляпунова, если последний существует) локальных минимумов в этих направлениях (точнее, для определенной ориентации связанных групп обратных векторов структуры).

Оператор \hat{L}_k определяет выбор вида спектра в k -пространстве, и задается типом неравновесности и диссипативными процессами. По существу, этот линейный оператор задает характерные значения длин волновых векторов (обратных характерному размеру) среды. Собственные значения оператора и длины собственных волновых векторов определим как $\varepsilon(k_{1i})$ и $|k_{1i}|$ соответственно.

Нелинейные слагаемые, пропорциональные V и S соответственно, позволяют учесть основные нелинейные взаимодействия. По существу, практически не изменяя характерных равновесных размеров (и, тем самым, длин собственных векторов $|k_{1i}|$), нелинейное слагаемое, пропорциональное V , определяет их ориентацию, то есть формирует пространственную периодическую структуру – решетку.

В процессе формирования первичной структуры происходит значительное сужение спектральной ширины возмущений вблизи основных векторов решетки $|k_{1i}|$ вплоть до возникновения линейчатого спектра, механизмы формирования которого обсуждались в предыдущих разделах. Это и определяет ярко выраженную пространственную четкость первичной структуры.

Когда формирование первичной структуры почти закончено, и спектральные амплитуды развитой структуры достигают величин $\varepsilon(k_{ij}) / \min V$ влияние на эволюцию системы более слабого физического механизма, обусловленного наличием дополнительного взаимодействия ($\sim S$ или генерируемого оператором V в случае развитой неустойчивости), возрастает. При достижении интенсивности первичной структурой некоторых критических (пороговых) значений, возникает вторичная неустойчивость модуляционного типа. Очевидно, в таком случае должны существовать зависящие от $|a_k|^2$ некоторые характерные числа R (параметры порядка) и их критические (пороговые) значения R_{cr} . Величина превышения над порогом (надпороговость) вторичной неустойчивости $\varepsilon_2 = (R_{2\max} - R_{2cr}) / R_{2cr}$ (где $R_{2\max}$ – величина, соответствующая стационарному состоянию при $\alpha = 0$, или полученная в пренебрежении развитием вторичной неустойчивости при $S = 0$) определяет не только характерные времена развития вторичного процесса, а также интенсивность и пространственные масштабы модуляции первичной структуры. Важно заметить, что инкременты (обратные характерные времена развития) вторичной неустойчивости возрастают при сужении спектральных линий первичной структуры. При $\varepsilon_2 \ll 1$ максимальные преимущества будут иметь пространственные возмущения с векторами $k = k_{2i}$ располагающимися вблизи векторов первичной мелкомасштабной структуры – решетки k_{1i} , причем $|k_{2i} - k_{1i}| / |k_{1i}| \propto \varepsilon_2$.

Отметим, что расположение в пространстве волновых чисел всех максимумов вторичной неустойчивости в окрестности каждого из векторов основной решетки в определенной степени геометрически подобно расположению системы собственных волновых векторов основной решетки с коэффициентом подобия $\varepsilon_2 \ll 1$, что приводит к обратному данному коэффициенту подобия в реальном пространстве $\varepsilon_2^{-1} \gg 1$ для первичной и вторичной структур. Амплитуда модуляции первичной структуры также оказывается пропорциональной ε_2 , причем механизм уменьшения спектральной ширины вторичной неустойчивости подобен тому, который формировал практически линейчатый спектр первичной неустойчивости. Так что и в этом случае можно говорить о высокой пространственной четкости вторичной структуры – модуляции первичной структуры. Можно ввести параметр, определяющий дефектность первичной – ос-

новой структуры — решетки, то есть, отношение интенсивности модуляции к интенсивности основной структуры

$$d = \sum |a_{k_{2i}}|^2 / \sum |a_{k_{1i}}|^2, \quad (2)$$

которое оказывается также пропорциональным ε_2 . Очевидно, линейчатый спектр первичной и вторичной структур также способен привести к неустойчивости последних. В этом случае дальнейший сценарий развития подобен рассмотренному выше и результатом следующей ещё более слабой неустойчивости каскада неустойчивости будет еще более крупномасштабная модуляция структуры. Существенно, что если умножить интенсивность возмущений на объем элементарной ячейки каждой из развитых структур в обычном пространстве, то получим величину, которая практически не меняется на всех масштабах самоподобной структуры, то есть, в частности,

$$(1/k_{2i})^D \sum |a_{k_{2i}}|^2 \approx (1/k_{oi})^D \sum |a_{k_{1i}}|^2, \quad (3)$$

где D — размерность структуры¹.

Важно отметить, что именно сужение спектральных линий вблизи основных волновых векторов первичной решетки вплоть до формирования линейчатого спектра весьма важный процесс, обусловленный 1) слабой надпороговостью и значительным поглощением энергии возмущений вне интервала линейной неустойчивости и 2) влиянием насыщающей нелинейности, приводящей к конкуренции мод спектра и уменьшению для большинства мод их эффективных инкрементов до нуля с последующим превращением их в декременты.

Именно наличие этого механизма формирования узких спектральных линий предыдущей неустойчивости приводит к возникновению и усилению следующей неустойчивости, результатом которой становится крупномасштабная модуляция развитой структуры. Спектр последней модуляционной неустойчивости в процессе её развития превращается также в линейчатый, что создает условия и снижает порог для последующей еще более медленной неустойчивости, которая приводит к модуляции структуры на еще больших масштабах. В результате последовательного развития каскада неустойчивостей в пространстве волновых векторов формируется самоподобная структура со все уменьшающимся масштабом, которая может в

¹ Например, в двумерном случае ($D = 2$), если в поле наблюдения прибора (микроскопа) при соответствующем увеличении попадает одна ячейка на n -ном масштабе самоподобной структуры, то не только форма, но и интенсивность (яркость) изображения не должны зависеть от номера n , то есть от выбранного масштаба, причем, если разрешение прибора в этом режиме заведомо не позволяет выделять элементы мелкомасштабных элементов структуры, то они будут восприниматься как фон.

определенном смысле рассматриваться как фрактал. В обычном пространстве с развитием последовательных неустойчивостей каскада неустойчивости происходит увеличение масштаба возникающих структур.

Для реализации первичной пространственной структуры с линейчатым спектром необходимо выполнение следующих условий.

1. Слабое превышение над порогом первичной линейной неустойчивости возмущений с определенным абсолютным значением волнового вектора, при этом вне достаточно малой окрестности этого значения в пространстве волновых векторов амплитуды всех возмущений быстро затухают.
2. Нелинейные взаимодействия возмущений — пространственных мод, описываются матричными элементами, имеющими локальные минимумы вблизи фиксированного набора волновых чисел в данной окрестности линейной неустойчивости.

Для формирования вторичной и последующих неустойчивостей также требуется выполнение определенных условий:

3. Система должна быть восприимчива к возникновению модуляционных неустойчивостей развитых структур подобного типа.
4. Максимальная амплитуда и ширина спектра каждой неустойчивости должны быть достаточными для превышения порога последующей неустойчивости каскада.

4. Модуляционные неустойчивости в условиях слабой надпороговости

Модуляционная неустойчивость в волновой среде. Рассмотрим развитие каскада неустойчивостей [9] в нелинейной волновой среде с кубической нелинейностью и с конечным уровнем поглощения волновой энергии. Будем полагать, что для медленно меняющихся комплексных амплитуд волновых возмущений справедливо уравнение Лайтхилла [10], описывающее распространение нелинейных волн:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i A |A|^2 + g, \quad (4)$$

где δ — декремент затухания колебаний, g — внешний источник, поддерживающий монохроматическую волну конечной амплитуды A с волновым числом, равным $k = k_1^*$. Без ограничения общности можно положить $k_*^1 = 0$. Переменные t, x —

это соответствующим образом нормированные время и координата. Это уравнение, как и его обобщения (уравнения Гинзбурга-Ландау и уравнение Невела-Вайтхеда [11]), описывают в рамках определенных ограничений множество физических процессов, среди которых эволюция ветровых волн, неустойчивость Толмина-Шлихтинга в гидродинамических течениях, динамику волн концентрации при химических превращениях, многочисленные плазменные неустойчивости, нестабильность волн в средах с кубической нелинейностью и ряд других явлений [12,13].

Ниже ограничимся одномерным случаем. Уравнение (4) можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} = & -\delta A_k + ik^2 A_k \\ & - i \int dk_1 dk_2 dk_3 A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \\ & \times \delta(k - k_1 - k_2 + k_3) + g, \end{aligned} \quad (5)$$

где A_{k_i} – Фурье-образ амплитуды возмущения A .

Рассмотрим хорошо известную модуляционную неустойчивость [10] монохроматической волны конечной амплитуды $u_1 \exp\{i\varphi_1\}$, где $u_1 = A_{k_1^*}$, $\varphi_1 = \varphi_{k_1^*}$ – амплитуда и фаза волны. В этом случае, в результате неустойчивости возбуждаются спектры колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа основной моды конечной амплитуды $k_+ > k_1^*$ и $k_- < k_1^*$. Каждая пара симметрично расположенных относительно основной волны мод k_+, k_- непосредственно взаимодействует с полем основной волны, причем, выполняется следующее соотношение $k_+ + k_- = 2k_1^*$, которое обусловлено видом нелинейности. Вообще говоря, при $k_1^* = 0$, $k_+ = k_- = k$.

Уравнения для основной моды и мод неустойчивых спектров можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = & u_1 \left(-\delta + 2 \sum_k u_k^2 \sin \Phi_k \right) + g, \\ \frac{du_k}{dt} = & u_k (-\delta - 2u_1^2 \sin \Phi_k), \\ \frac{d\Phi_k}{dt} = & \frac{d}{dt}(\varphi_k + \varphi_{-k} - 2\varphi_1) \\ = & 2k^2 - 2(u_1^2 - u_k^2) - 2(u_1^2 - 2u_k^2) \cos \Phi_k, \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже использована известная симметрия задачи [5], которая состоит, в частности, в равенстве амплитуд возбуждаемых мод $u_k = u_{-k}$. При рассмотрении процессов с характерными временами, значительно превышающими обратный декремент поглощения возмущений δ^{-1} , производными по времени можно пренебречь. Из уравнений (6), считая, что декремент поглощения достаточно большой и пренебрегая производной по времени, получим значение амплитуды основной моды, поддерживаемой

внешним источником

$$u_1 = \left\{ -g \left[-\delta + 2 \sum_k u_k^2 \sin \Phi_k \right]^{-1} \right\}. \quad (7)$$

Полагая, что изменения во времени амплитуды неустойчивых мод происходят значительно медленнее, чем их фазы, пренебрежем также производной по времени от общей фазы связанных мод (канала неустойчивости) в третьем уравнении системы (6). Тогда для фазы Φ_k справедливо выражение [5]:

$$\cos \Phi_k = -\frac{u_1^2 - u_k^2 - k^2}{u_1^2 + 2u_k^2}. \quad (8)$$

Уравнение для возмущений с волновым числом k в этих условиях может быть представлено в виде

$$\frac{du_k}{dt} = u_k \left\{ -\delta + u_1^2 \left[1 - \frac{u_1^2 - u_k^0 - k^2}{u_1^2 + 2u_k^2} \right] \right\}. \quad (9)$$

Наибольшим линейным инкрементом обладает мода с $k = k_{20} = u_1(t=0) = u_{10}$, однако сужение спектра происходит в окрестности несколько меньшего значения $k = k_2^* < k_{20}$. Если в начальный момент $u_1^2(t=0) = u_{10}^2 > \delta$, то развивается модуляционная неустойчивость.

Рассматривая уравнения (6)–(8), легко увидеть, что амплитуды неустойчивых мод изменяются значительно медленнее, чем их фазы, что позволяет в явном виде получить уравнение, описывающее поведение мод спектра (9). Из этого уравнения и уравнения (7) следует, что при развитии неустойчивости рост спектра приводит к уменьшению уровня накачки, эффективный инкремент для всех мод уменьшается, причем для мод, находящихся на периферии зоны линейной неустойчивости, инкремент превращается со временем в декремент. Таким образом, конкуренция мод за счет механизма "истощения накачки" приводит к сужению спектра развитой неустойчивости.

Ниже ограничимся случаем $u_{10}^2 - \delta \ll \delta$, при этом ширина спектра неустойчивости относительно невелика: $\Delta k \ll k_{20}$, то есть

$$\begin{aligned} k_{20} - \Delta k < k < k_{20} + \Delta k, \\ -k_{20} - \Delta k < k < -k_{20} + \Delta k, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Delta = (u_{10}^2 - \delta)/2k_{20}$. Режим процесса возбуждения колебаний отвечает слабому превышению над порогом неустойчивости (слабой надпороговости). Именно в этом случае суммарные фазы каждого канала Φ_k неустойчивости "подстраиваются" под медленные изменения амплитуд колебаний. Рассматривая систему уравнений (6), можно показать, что амплитуда основной моды изменяется от величины u_{10} до $\delta^{1/2}$. При этом моды неустойчивого спектра (10) сначала нарастают, а затем, при смене

знака правой части (9) уменьшают свою амплитуду. Ширина спектров уменьшается и, в конечном итоге, остаются только моды с $k = \pm k_2^*$. Амплитуда $u_{k_2^*}$ приближается к

$$u_{k_2^*} = \{[g\delta^{-1} - \delta]/2\}^{1/2}. \quad (11)$$

Отметим здесь, что в результате развития данной первичной модуляционной неустойчивости (имеющей порог по амплитуде основной волны) возбуждается спектр мод (10), ширина которого в процессе неустойчивости быстро уменьшается, а амплитуда растет. Реально неустойчивость развивается с характерным временем, примерно на порядок и более превышающим обратный максимальный линейный инкремент неустойчивости γ_{1eff}^{-1} где $\gamma_{1eff} = (u_{10}^2 - \delta)$. Таким образом, формируется линейчатый спектр, состоящий из основной моды и двух боковых сателлитов (с $k = \pm k_2^*$). Отношение

$$Def = 2u_{k_2^*}^2/u_{k_1^*}^2, \quad (12)$$

определяет глубину модуляции основной волны (или уровень дефектности, определенный для структур с распределенными дефектами) с характерным размером $2\pi/k_2^*$, где $k_2^* = [\delta - (g\delta^{-1} - \delta)/2]^{1/2}$. Отметим, что суммарная интенсивность $I = \sum_{k_n^*} u_{k_n^*}^2$ в результате развития модуляционной неустойчивости не изменяется.

При рассмотрении процесса неустойчивости на нелинейной стадии взаимодействием нарастающих мод непосредственно, то есть без участия волны накачки, фактически пренебрегли, что связано с наличием малого параметра — отношением амплитуд нарастающих мод к амплитуде волны накачки (12). Подобный подход в описании систем вблизи порога неустойчивостей и построение на его основе нелинейной теории насыщения этих неустойчивостей обсуждался ранее в работах [14,15].

Важно, однако, заметить, что сужение спектров первичных неустойчивостей — весьма жесткое условие для формирования каскада неустойчивостей, о котором речь пойдет ниже. Так как, именно сужение спектров волн конечной амплитуды всегда снижает пороги неустойчивостей, в частности модуляционного типа, на что было обращено внимание ещё в работах [16–19].

Модуляционная неустойчивость в неволевых средах. Эффект гидродинамического динамо. Впервые о возможности возникновения модуляционной неустойчивости системы конвективных ячеек в чрезвычайно продуктивной модели Проктора-Сивашинского-Письмена [20,14] было заявлено в докладе [21,15]. Эта модуляция системы развитых конвективных ячеек в тонком слое жидкости между плохо проводящими тепло горизонтальными поверхностями обусловлена генерацией вихрей иной природы, нежели те, которые

формируют конвективную структуру. В результате развития модуляционной неустойчивости в системе развитой регулярной структуры конвективных ячеек кроме их крупномасштабной модуляции, возникают также плоские вихри большого размера. Другими словами, это эффект гидродинамического (вихревого) динамо [22], которое в отличие от рассмотренных хорошо известных физических моделей в среде со спиральной гидродинамической турбулентностью (подробнее см. обзор [23]) является регулярным процессом и не обязательно обусловлен наличием нескомпенсированной спиральности в системе.

Модель Проктора-Сивашинского, в результате модификации автором работы [20], описывает конвекцию, подобную рассмотренной выше, однако с учетом тороидальной скорости $\vec{U} = \text{rot}(\vec{e}_z\Psi)$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon^2\Phi - (1 + \nabla^2)^2\Phi \\ &\quad + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\Phi|\Phi|^2) + \gamma\nabla\Phi \times \nabla\Psi, \quad (13) \\ \nabla^2\Psi &= \nabla\nabla^2\Phi \times \nabla\Phi, \end{aligned}$$

где γ — величина обратная числу Прандтля $\text{Pr} = \nu/\kappa$, характеризующему неравновесное состояние жидкости, ν — кинематическая вязкость, здесь κ — удельная температуропроводность, $\varepsilon \ll 1$, причем решение можно искать в форме

$$\Phi = \varepsilon \sum_j a_j \exp(i\vec{k}_j\vec{r}). \quad (14)$$

Для случая $\gamma = 0$ для медленных амплитуд a_j можно получить эволюционное уравнение [25,26]:

$$\dot{a}_j = a_j \left(1 - \sum_{i=1}^N V_{ij}|a_i|^2 \right), \quad (15)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями $V_{jj} = 1$, $V_{ij} = (2/3)(1 + 2(\vec{k}_i^2\vec{k}_j^2)^2) = (2/3)(1 + 2\cos\vartheta)$, где ϑ — угол между векторами \vec{k}_i и \vec{k}_j . Вообще говоря, ширина интервала неустойчивости в k -пространстве представляет собой кольцо — средний радиус которого равен единице, а ширина порядка величины относительной надпороговости ε , т.е. много меньше единицы. Во время развития неустойчивости из-за роста нелинейных членов, эффективный инкремент

$$(1 - \varepsilon^{-2}(1 - k^2) - \sum_{i=1}^N V_{ij}|a_i|^2) \quad (16)$$

мод, лежащих вне весьма малой окрестности вблизи единичной окружности будет убывать и может изменить знак, что приведет к быстрому сужению спектра практически к единичной окружности в k -пространстве [25,26].

Развитие возмущений, спектр которых уже располагается на единичной окружности в k -пространстве, как показывает численный анализ уравнения (15), происходит следующим образом [6]: Из начальных флуктуаций быстро возбуждается широкий спектр по ϑ . Интенсивность этого спектра можно оценить, приравняв правую часть (15), или нелинейный инкремент (16) нулю. Затем более медленная стадия развития неустойчивости определяется только конкуренцией мод. Получившаяся на начальном этапе развития неустойчивости пространственная мода с максимальной амплитудой начинает подавлять соседние моды и тем сильнее, чем на большем расстоянии по ϑ они от нее находятся. Вблизи этой основной моды формируется регулярный спектр, амплитуда которого растет, а ширина уменьшается. При приближении амплитуды центральной — основной моды к единице, ширина спектра стремится к нулю. Но при этом начинают нарастать, так называемые, боковые спектры, центры которых отстоят по ϑ от основной моды на $\pm\pi/2$. Амплитуды этих боковых спектров растут, а ширина их синхронно убывает. Спустя достаточно большое время, в десятки раз превосходящее обратный инкремент линейной неустойчивости, из вновь образованного "бокового" спектра "выживает" лишь одна мода, амплитуда которой сравнивается с амплитудой первоначальной лидирующей моды. В конечном итоге остаются две моды равной амплитуды, сдвинутые по ϑ на $\pi/2$. Физически это соответствует возникновению сначала валиковой конвективной структуры, модуляция которой постепенно усиливается (амплитуда модуляции растет, а длина волны уменьшается) пока не сформируются поперечные валы и конвективная структура станет представлять собой квадратные ячейки.

Оказывается, что и при $\gamma \neq 0$, сценарий формирования обсуждаемой выше конвективной структуры конечной амплитуды подобен, однако развитая структура квадратных ячеек в свою очередь оказывается уже модуляционно неустойчивой. Но прежде чем переходить к рассмотрению модуляционной неустойчивости конвективных ячеек конечной амплитуды, сделаем одно важное замечание.

Несмотря на то, что модель Проктора-Сивашинского-Письмена [20] была выведена для чисел Прандтля порядка единицы, она также оказывается справедливой и для описания эволюции развитой структуры конвективных ячеек для которых, $\Phi \propto \varepsilon$. Причем, модуляционная неустойчивость этой структуры возникает лишь при малых числах Прандтля [21].

Дело в том, что при выводе уравнений (13), приведенных выше, предполагалось, что $\gamma \cdot \Psi \propto \gamma \cdot \Phi^2 \propto \varepsilon^2$, причем $\gamma \propto 1$. В случае рассмотрения модуляционной неустойчивости развитой структуры конвективных ячеек оказывается, что отличные

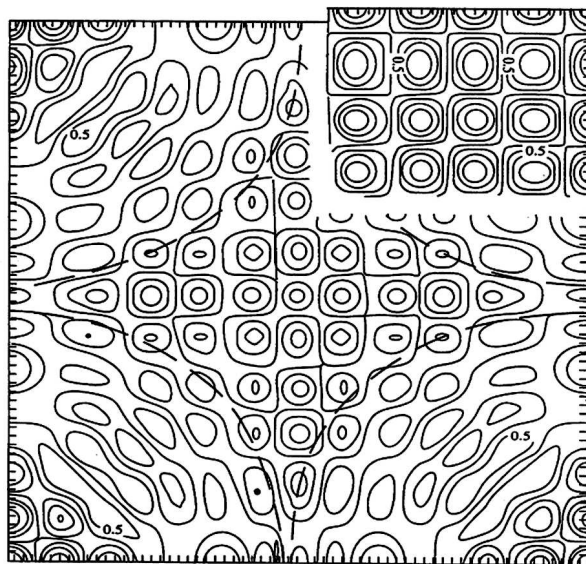


Рис. 3. Регулярный дефект в конвективной структуре. В правом верхнем углу фрагмент первичной невозмущенной структуры. Пунктиром показаны характерные линии тока крупномасштабных вихрей.

от нуля значения $\Psi \propto (\Delta k/k) \cdot \Phi^2$, где в свою очередь $(\Delta k/k) \propto \varepsilon$. Таким образом, модель [20] может быть применима для описания модуляционной неустойчивости уже развитой структуры конвективных ячеек лишь при $\gamma \propto 1/|\varepsilon$, так как только в этом случае выполняется условие $\gamma \cdot \Psi \propto \varepsilon^2$.

Этот случай малых чисел Прандтля является достаточно экзотическим, однако следует иметь в виду, что при значениях этого числа порядка единицы конвективные структуры в идеальной сухой атмосфере стабильны, как показано, например, в работе [24]. В реальной атмосфере для выяснения условий возникновения модуляционной неустойчивости развитых конвективных структур (подобная неустойчивость, как следует из наблюдений, наверняка имеет место) следует учитывать дополнительные источники энергии и момента импульса, такие как распределенный нагрев восходящих потоков конденсирующимся паром, вращение планеты, сдвиговые потоки и т.д., что способно изменить, в частности, и область значений числа Прандтля, соответствующих подобной модуляционной неустойчивости.

Порог вторичной неустойчивости определяется обращением в нуль $\varepsilon_2 = 27b^2\Gamma^2/20 - 1$, где $\Gamma = \varepsilon\gamma$, $b = \sqrt{5/3}a$ — перенормированная амплитуда возмущений. При превышении порога ($\varepsilon_2 > 0$) возникают условия для существования вторичной неустойчивости, причем максимумы инкремента

$$\text{Im } \omega_{\max} = 1 - 6b^2/5 + 27\Gamma^2b^4/200 + 2/27\Gamma^2 \quad (17)$$

находятся вблизи основных мод первичной струк-

туры ($k_x = \pm 1, k_y = 0$ и $k_x = 0, k_y = \pm 1$) на взаимно перпендикулярных направлениях на расстояниях от этих точек, равных $\Delta = (\sqrt{2}/b\Gamma)|\varepsilon_2| < 1$. При приближении в пространстве волновых чисел к модам первичной структуры инкремент модуляционной неустойчивости стремится к нулю. Появление в результате модуляционной неустойчивости крупномасштабных вихревых возмущений приводит к возникновению сдвиговых течений и деформирует конвективную структуру на больших масштабах.

Уравнение, описывающее эволюции спектров неустойчивости имеет следующий вид:

$$\dot{b}_j = b_j - \sum_j^N V_{ij} |b_i|^2 b_j + \sum_{i,n,m}^N W_{jinm} b_i b_n b_m, \quad (18)$$

где коэффициенты взаимодействия V_{ij} определены выше, а для W_{jinm} справедливы выражения [8]:

$$W_{jinm} = (\vec{k}_i \times \vec{k}_n)(\vec{k}_m \times \vec{k}_j) \times \left[\frac{k_i^2 - k_n^2}{(\vec{k}_i + \vec{k}_n)^2} + \frac{k_i^2 - k_m^2}{(\vec{k}_i + \vec{k}_m)^2} \right] \delta_{\vec{k}_j, \vec{k}_i + \vec{k}_n + \vec{k}_m}. \quad (19)$$

Можно показать, что в условиях симметрии возникающих возмущений, уравнения для основных мод конвективных ячеек (каждая из которых имеет амплитуду равную b) и для наиболее быстро растущих мод спектра b_d (в режиме, когда в результате рассмотренных выше механизмов конкуренции остальной спектр подавлен) модуляционной неустойчивости имеют вид

$$\dot{b} = b(1 - b^2 - 4b_d^2), \quad (20)$$

$$\dot{b}_d = b_d(1 - b^2 - b_d^2) + \frac{2}{27\Gamma^2} b^2 b_d \theta(\varepsilon_2), \quad (21)$$

где появление порога модуляционной неустойчивости качественно описано с помощью тета-функции $\theta(\varepsilon_2)$. При превышении порога модуляционной неустойчивости, в результате её развития амплитуды мод первичной структуры уменьшаются от величин, сравнимых с единицей до значений $b_\infty^2 = 20/27\Gamma^2$, в то время как амплитуды основных растущих мод спектров достигают значений $b_{d\infty} = 1/2(1 - b_\infty^2)^{1/2}$. Интенсивность (то есть, величина $I = \sum |b_{k_i}|^2$) первичной структуры без возникновения модуляционной неустойчивости (при $\Gamma^2 < 20/27$ первичная структура устойчива) и интенсивность дефектной структуры, которая является результатом развития данной неустойчивости оказываются равны. Дефектность развитой структуры (2) оказывается равной ε_2 .

Взаимодействие между модами, определяющими модуляцию (моды распределенного дефекта) и модами основной структуры обусловлено существованием крупномасштабных вихрей, линии тока которых в реальном пространстве могут быть представлены в виде

$$\psi \approx \varepsilon^2 \varepsilon_2 b^2 [\cos(l_0 \xi) - \cos(l_0 \eta)], \quad (22)$$

где $l_0 = \varepsilon \delta$, $\xi = \sqrt{\varepsilon} x$, $\eta = \sqrt{\varepsilon} y$ и отношение характерного линейного размера крупномасштабных вихрей L_V и линейного размера конвективной ячейки L_C равно $L_V/L_C \approx (b\varepsilon\varepsilon_2)^{-1}$. Возникновение таких крупномасштабных вихрей и представляет собой одну из возможных реализаций эффекта гидродинамического динамо.

5. Каскад неустойчивостей и формирование самоподобных структур на разных масштабах

Обсудим на примере модуляционно неустойчивой волны природу формирования каскада неустойчивостей. Рассмотренная в предыдущем разделе модуляционная неустойчивость монохроматической волны формирует новое состояние — модулированную волну, которая, как это следует из приведенного ниже рассмотрения [9], в свою очередь является нестабильной. Покажем, что в результате вторичной модуляционной неустойчивости формируется ещё более крупномасштабная модуляция уже ранее промодулированной основной волны. Для описания вторичной модуляционной неустойчивости положим начальным состоянием системы сформированный в результате первичной неустойчивости линейчатый спектр, состоящий из трех мод. Именно формирование линейчатого спектра модулированной волны при насыщении первичной модуляционной неустойчивости создает условия для превышения порога вторичной модуляционной неустойчивости. В результате вторичной неустойчивости в окрестности мод $k = \pm k_2^*$ возникают спектры неустойчивых возмущений с волновыми числами равными $\pm(k_2^* + \kappa)$. Как и прежде, можно убедиться в том, что моды $\pm(k_2^* + \kappa)$ имеют одинаковые по абсолютной величине значения амплитуды.

Уравнения для амплитуд возмущений с $k = k_2^*, (k_2^* + \kappa)$ и для суммарных фаз в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{du_{k_2^*}}{dt} &= u_{k_2^*} [-\delta - u_1^2 \sin \Phi_{k_2^*} - 4u_\kappa^2 \sin \Phi_\kappa], \\ \frac{du_\kappa}{dt} &= u_\kappa [-\delta - u_1^2 \sin \Phi_\kappa - 2u_{k_2^*}^2 (\Phi_{k_2^*} - \Phi_\kappa)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_\kappa}{dt} &= \frac{d}{dt} (\varphi_\kappa + \varphi_{-\kappa} - 2\varphi_1) \\ &= 2(k_2^* + \kappa)^2 - 2(u_1^2 + 2u_{k_2^*}^2 - u_\kappa^2) \\ &\quad - 2(u_1^2 + 2u_\kappa^2) \cos \Phi_\kappa \\ &\quad + 4(u_{k_2^*}^2 + 2u_\kappa^2) \cos(\Phi_{k_2^*} - \Phi_\kappa) \end{aligned} \quad (23)$$

причем к ним следует добавить уравнения (5). Можно убедиться в том, что максимальный линей-

ный инкремент вторичной неустойчивости равен

$$\begin{aligned} \gamma_{2eff} &= -\delta + [u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2} \\ &\approx 2u_{k_2^*}^4/u_1 \approx (u_{10}^2 - \delta)^2/2u_1^2 \quad (24) \end{aligned}$$

при этом $\sin \Phi_\kappa = -u_1^2/[u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2}$, $\sin(\Phi_{k_2^*} - \Phi_\kappa) \approx -\cos \Phi_\kappa = 2u_{k_2^*}^2/[u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2}$, так как $\Phi_{k_2^*} \approx -\pi/2$. Для наиболее быстро растущих мод на линейной стадии развития вторичной модуляционной неустойчивости $(k_2^* + \kappa)^2 = u_1^2 + 2u_{k_2^*}^2$ и сдвиг волнового числа κ относительно волновых чисел мод первичной неустойчивости k_2^*

$$\kappa^* = k_2^* u_{k_2^*}^2 / u_1^2 = k_2^* (u_{10}^2 - \delta) / 2u_1^2. \quad (25)$$

Можно показать, рассматривая уравнения (13) и (16), что в результате развития вторичной неустойчивости происходит сужение её спектра. Фактически в спектре вторичной неустойчивости сохраняются моды с волновыми числами $\pm(k_2^* + \kappa^*)$. Отношение характерных времен развития первичной и вторичной модуляционных неустойчивостей

$$\tau_{1M}/\tau_{2M} = \gamma_{2eff}/\gamma_{1eff} = (u_{10}^2 - \delta)/2u_1^2, \quad (26)$$

а также отношение пространственных масштабов модуляции основной волны из-за последствий развития первичной и вторичной неустойчивости

$$L_{1M}/L_{2M} = (\kappa^*/k_2^*) \approx (u_{10}^2 - \delta)/2u_1^2, \quad (27)$$

совпадают. Таким образом, последующие каскады неустойчивости формируют все более крупномасштабные структуры — модуляции, для которых выполнено условие (3). Такие структуры являются масштабно-инвариантными.

Отметим, также, что интенсивность (то есть, величина $I = \sum_{k_n^*} u_{k_n^*}^2$) структуры, сформировавшейся в результате первичной модуляционной неустойчивости и интенсивность структуры, которая является результатом развития вторичной модуляционной неустойчивости также оказываются равны.

6. Самоподобные структуры на поверхности и в объеме кристаллов

Любая кристаллическая решетка в объеме и на поверхности твердого тела формируется в результате некоторого процесса — процесса упорядочения — первичной неустойчивости, обладающей определенным обратным характерным временем развития и насыщающейся нелинейностью. Эта нелинейность обусловлена отклонением от положения равновесия достаточно однородной подсистемы атомов, внутри которой преобладают двухчастичные взаимодействия с ближайшими соседними атомами. Очень часто нелинейность кубическая или выше (чаще всего соседних атомов больше, но их

вклад во взаимодействие не всегда равноценный и именно поэтому доминируют лишь некоторые типы взаимодействий). Источником неравновесности являются возмущения плотности среды, обусловленные перегревом, а значительное поглощение энергии в процессе упорядочения — неустойчивости обусловлено эффективным выносом энергии упругими волнами из этой области.

Процесс возникновения первичной структуры в целом определяется, прежде всего, доминирующим механизмом взаимодействия элементов, который формирует её геометрию, характерные размеры и ориентацию. Можно предположить, что на стадии первичного процесса формирования периодической структуры происходит за счет сужения спектра возмущений плотности из-за нелинейного механизма конкуренции возмущений, подобного рассмотренным выше².

Однако, кроме основного механизма взаимодействия элементов, в системе зачастую присутствует ряд и более слабых взаимодействий, проявляющих себя лишь в условиях, когда процесс построения основной (первичной структуры) близок к завершению [27,28].

Структура поверхности кристалла всегда привлекала внимание исследователей. Прежде всего, потому, что отличия структуры поверхностного слоя от внутренней структуры кристалла были несомненны, в частности существовали поверхностные регулярные образования, линейные размеры которых значительно превышали соответствующие размеры элементарных ячеек кристалла. Полагали [29,30], что твердое тело всегда стремится понизить свою поверхностную (а значит и общую) свободную энергию, образуя при этом на своих границах "горную" структуру холмов и долин. Так, например, известны поверхностные крупномасштабные ромбовидные регулярные образования на поверхности монокристалла кремния (так называемая, "7×7 ячейка", где располагаются 12 выпуклостей электронной плотности, соответствующих позициям отдельных атомов [31]).

Поверхностные слои атомов, характер взаимодействия и соответствующее расположение которых отличаются от подобных параметров атомов, входящих в состав объемных слоев решетки, уже на масштабах, сравнимых с размерами элементарной ячейки, демонстрируют отклонения в регулярности, отмеченные, например, в экспериментах [32,33]. Были замечены периодические отклонения в положениях локальных максимумов электронной плотности на расстояниях значительно

² Амплитуды возмущений плотности в аморфной перегретой среде не малы, однако можно предположить, что в условиях большого уровня потерь энергии на излучение упругих волн и вследствие взаимодействия и конкуренции мод формируются узкие линейчатые спектры, соответствующие пространственно периодическим структурам, подобно тому, как они формируются в конвективно-неустойчивой среде.

превышающих характерный размер элементарной ячейки графита, но какие-либо искажения границы в направлении нормали к поверхности образца не обсуждались.

На рис. 4 представлены результаты экспериментальных исследований [27] поверхности графита методом сканирующей туннельной микроскопии (СТМ). Исследования проводили в воздушной среде на сканирующем туннельном микроскопе СТМ-1, описанном в работе [33].

Разрешение в горизонтальной плоскости XU меньше 1.4 \AA , а по вертикали — 0.7 \AA . В качестве зонда использовались иглы, приготовленные способом электрохимического травления с вытяжкой. Очистка поверхности графита производилась скалыванием верхнего слоя непосредственно перед измерением. На рис. 4а,б,в представлены топографические изображения участков высоко ориентированного графита при различном увеличении, полученные сканированием в режиме стабилизации туннельного тока. Время сканирования участков — 10–20 сек. На рис. 4а представлено изображение участка высоко ориентированного графита при максимальном увеличении. Наблюдаются упорядоченные ряды гексагональной структуры графита: шестиугольник состоит из атомов с разным уровнем локальной плотности состояний. Отметим, что параметры элементарной ячейки согласуются с данными, представленными в работах других авторов.

На отдельных участках образцов обнаружена периодическая модуляция поверхностной электронной плотности (крупномасштабная гофрировка), характер которой подобен (с коэффициентом подобия близким к 10) мелкомасштабной модуляции электронной плотности в пределах элементарной ячейки на поверхности графита (см. рис. 4б). На другом образце (см. рис. 4в) была обнаружена поверхностная гофрировка, продольные линейные размеры которой на два порядка превосходят соответствующие размеры элементарной ячейки (размер вертикальной модуляции поверхности здесь лишь вдвое больший, чем в предыдущем случае, показанном на рис. 4б). Отметим, что линейный масштаб модуляции поверхностной электронной плотности, обсуждаемый в работе [32], соответствует продольному масштабу гофрировки, изображенной на рис. 4б.

Продольный масштаб гофрировки, изображенный на рис. 4в, на порядок больше. Наблюдаемые отличия в характерных размерах модуляции поверхности графита связаны, видимо, с различными модификациями его внутренней структуры. Возможно, что в случае, изображенном на рис. 4б, представлена наиболее распространенная аллотропная форма углерода — графит с гексагональной структурой. Рис. 4в соответствует, как

можно предположить, ромбоэдрической упаковке графита. Важным в полученных экспериментальных данных является не столько факт наличия вертикальной составляющей модуляции, а скорее, несомненное подобие первичной структуры — элементарной ячейки и вторичной структуры — модуляции поверхности электронной плотности, по крайней мере, в случае, изображенном на рис. 4б.

Причиной модуляционной неустойчивости, формирующей самоподобные структуры могут быть сдвиговые напряжения, обусловленные нелинейным взаимодействием первичной структуры с несобственными возмущениями недивергентного типа (подобными вихревым возмущениям, рассмотренным в разделе 4.), которые вблизи поверхности способны существенно усиливаться. Наличие поверхности снимает проблему выяснения природы нагрузок на элементарную ячейку кристалла и подход [34,35] к описанию устойчивости решетки может оказаться конструктивным. Вместо одного устойчивого положения отдельного атома в поверхностных слоях могут появиться два и больше таких положений. Сдвиг атомных слоев в глубине кристалла заметно ослабляется, поэтому вблизи поверхности происходит наложение однотипных периодических решеток друг на друга с последующим поворотом одной из них по отношению к более глубоко лежащей на небольшой угол ϕ . Такие структуры носят название структур Муара (Moire structures), причем период крупномасштабной модуляции полностью определяется углом поворота ϕ — с уменьшением ϕ период растет³.

Несоответствие масштабов первичной структуры (периода решетки) в плоскостях, касательных к поверхности каждого из кристаллических слоев, способно приводить к появлению нормальных к этой поверхности напряжений вблизи границы кристалла. Эти силы, действующие как в вертикальном, так и в горизонтальном (то есть, параллельно макроскопической поверхности образца) направлениях, могут при относительно низком уровне флуктуаций реализовать некоторое равновесное состояние. Это равновесное состояние должно иметь определенную глубину вертикальной модуляции поверхности кристалла, чтобы совместить масштабы на поверхности и в объеме. Очевидно, формирование пространственной модуляции поверхностного слоя происходит в условиях воздействия более слабого физического механизма, поэтому роль флуктуаций, сопровождающих этот процесс, мо-

³Поверхностный слой кристалла может оказаться развернут на небольшой угол относительно следующего за ним слоя также из-за выхода на поверхность достаточного количества дислокаций одного знака [36,37]. При этом на поверхности кристалла вполне может возникнуть, так называемая, сверхрешетка, т.е. решетка, обладающая той же топологией, что и основная, но имеющая больший период, зависящий от угла разворота.

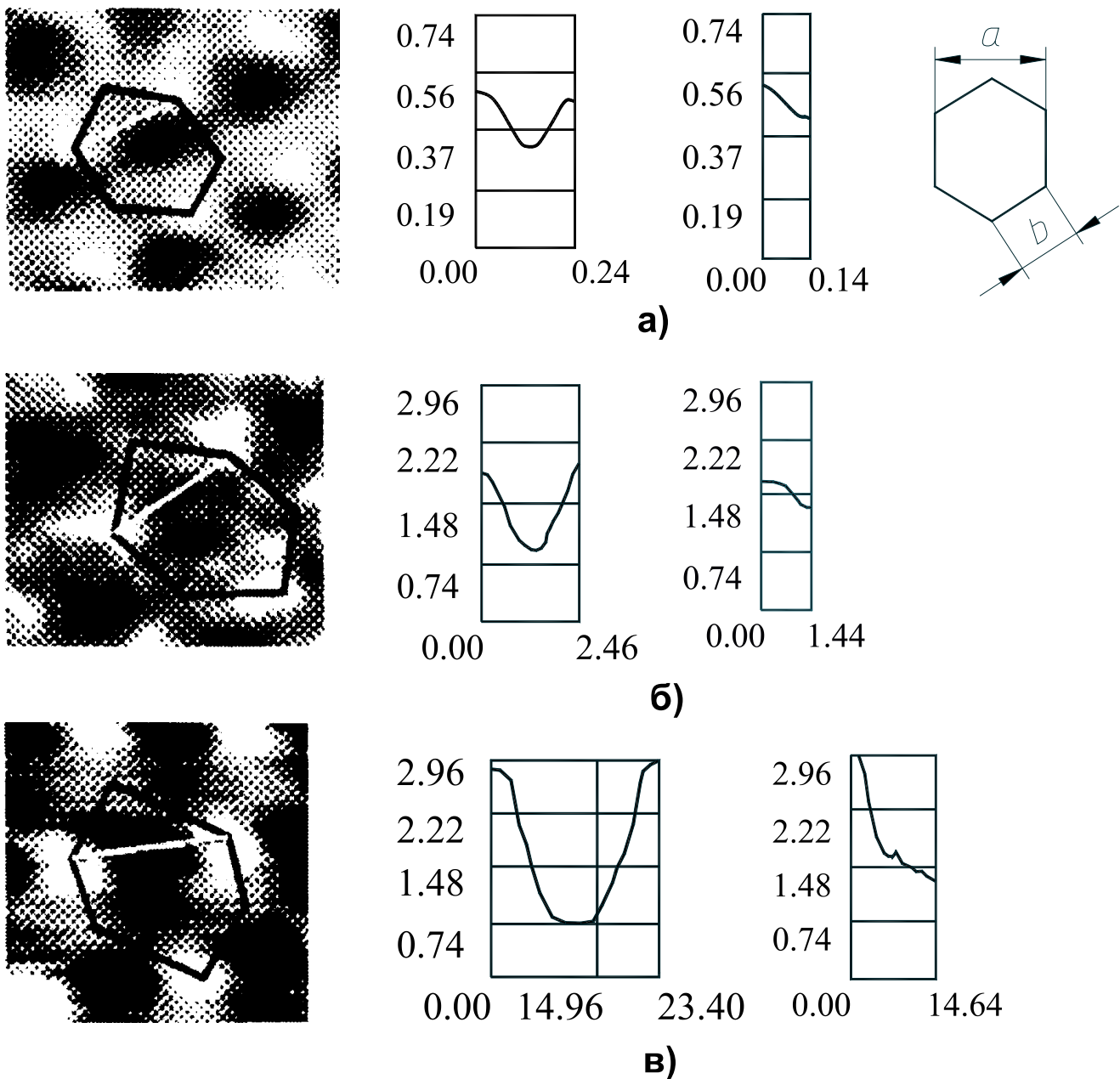


Рис. 4. Топографические изображения участков высоко ориентированного графита при различном увеличении, полученные методом сканирующей туннельной микроскопии: а) – 1 \AA , $a_1 = 2.4 \text{ \AA}$, $ha_1 = 2 \text{ \AA}$, $b_1 = 1.4 \text{ \AA}$, $hb_1 = 0.8 \text{ \AA}$; б) – 10 \AA , $a_2 = 24.6 \text{ \AA}$, $ha_2 = 15.5 \text{ \AA}$, $b_2 = 14.4 \text{ \AA}$, $hb_2 = 7 \text{ \AA}$; в) – 100 \AA , $a_3 = 234 \text{ \AA}$, $ha_3 = 25 \text{ \AA}$, $b_3 = 146 \text{ \AA}$, $hb_3 = 14.7 \text{ \AA}$.

жет оказаться существенной. В некоторых случаях флуктуации могут сорвать вторичную неустойчивость, и глубокая вертикальная модуляция поверхности может и не реализоваться. Таким образом, в первом случае (рис. 4б) $\varepsilon_2 \propto 10^{-1}$, а во втором (рис. 4в) $\varepsilon_2 \propto 10^{-2}$. Характерное время формирования регулярной поверхностной структуры, следует ожидать, соответственно в 10 и 100 раз превышает время формирования атомной структуры графита.

При формировании монокристалла возникающая регулярная периодическая микроструктура — атомная решетка кристалла в нелинейной среде неустойчива и в объеме образца. Развитие этой неустойчивости (т.е. вторичного, более слабого процесса по сравнению с процессом формирования решетки монокристалла) приводит к крупномасштабному регулярному смещению атомов от положений, характерных для совершенной решетки (аналогу модуляционной неустойчивости). В ме-

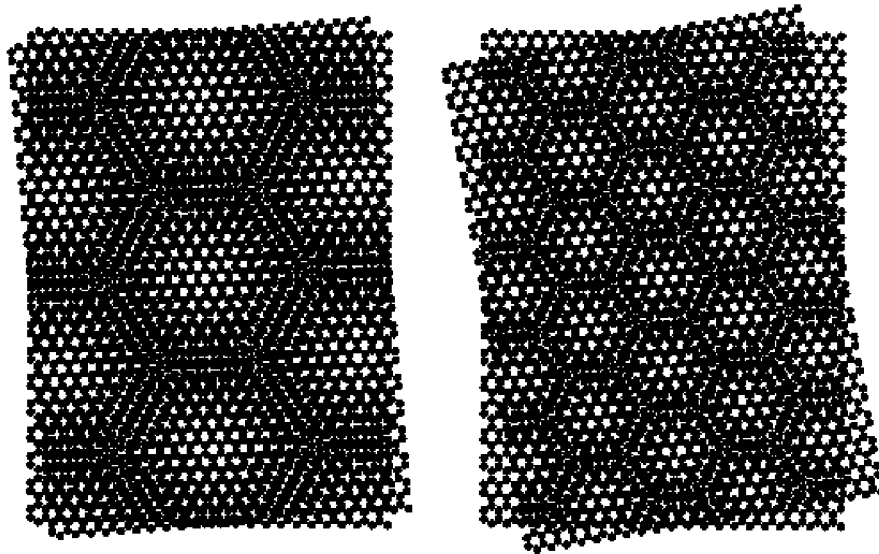


Рис. 5. Структуры Муара, возникающие при относительном повороте двух идентичных гексагональных решеток относительно друг друга на а) 5° и б) 10° .

стах наибольшего отклонения атомов происходит пространственный сдвиг атомных рядов и появление характерных дефектов — дислокаций. Отношение масштабов элементарной ячейки кристалла и крупномасштабной дислокационной сетки — сетки Франка, — порядка 10^{-4} . Если предположить, что механизм формирования сетки Франка подобен рассмотренным выше, то, следовательно, $\varepsilon_2 \propto 10^{-4}$. Можно также ожидать, что характерное время формирования сетки Франка в 10^4 раз превышает время формирования регулярной атомной решетки. В той же пропорции находятся и силы взаимодействия, формирующие мелкомасштабную и крупномасштабную структуры.

7. Заключение

Существование нелинейных структур в неравновесных средах с высокими уровнями поглощения энергии в значительной степени обусловлено конечным потоком энергии от её источников к стокам, представляющим собой разные виды и механизмы поглощения и потерь энергии, среди которых могут быть диссипация, конверсия одних видов возмущений в другие, а также излучение. Если система (среда) находится вблизи и несколько выше порога неустойчивости, возбуждается достаточно широкий спектр возмущений (мод), амплитуды которого растут и отбирают энергию у источника неравновесности. Это приводит к уменьшению инкрементов для мод, волновые числа которых находятся в центре интервала линейной неустойчивости, и превращению инкрементов в декременты для мод на периферии этого интервала. Постепенно спектр растущих мод сужается и превращается практически в линейчатый. Подобный механизм

конкуренции мод часто называют "истощением накачки".

Появление возмущений конечной амплитуды с достаточно узким спектром приводит в значительном числе сред с кубической нелинейностью и высоким уровнем поглощения, к развитию, так называемых, модуляционных неустойчивостей. Причем, порог модуляционной неустойчивости, вообще говоря, определяется некоторым критическим значением амплитуды и растет при увеличении спектральной ширины такого провоцирующего неустойчивость возмущения. Модуляционные неустойчивости приводят к амплитудной модуляции начального возмущения, причем пространственный период модуляции обычно значительно превышает период начального возмущения.

Результатом модуляционных неустойчивостей в рассматриваемых условиях будет развитие двух боковых спектров рядом с возмущением конечной амплитуды, причем волновые числа растущих мод будут или больше или меньше волнового числа основного возмущения, соответственно. Можно показать, что и здесь существует малый параметр — отношение инкремента модуляционной неустойчивости к декременту поглощения энергии возмущений. Столь же мало отношение амплитуд развитых боковых спектров к амплитуде возмущения конечной амплитуды, которое, собственно, и явилось причиной развития модуляционной неустойчивости. Боковые спектры из-за конкуренции мод, связанной с истощением накачки, также сужаются и превращаются в линейчатые. Появление линейчатых спектров в результате развития модуляционной неустойчивости в свою очередь создает условия для возникновения последующей неустойчиво-

сти, которая также может быть названа модуляционной.

Итак, в средах, находящихся вблизи порога развития неустойчивостей, формируются развитые структуры с высокой пространственной четкостью, обусловленной их линейчатыми спектрами. Существование узких спектров развитых неустойчивостей обусловлено механизмами конкуренции мод, возбуждаемых на линейной (начальной) стадии процесса. Так как амплитуды возбуждаемых колебаний в слабонадпороговом случае остаются достаточно малыми, то их взаимодействием даже в режиме развитой неустойчивости можно пренебречь, определяющими нелинейными процессами будут взаимодействия с основной волной — волной накачки (для волновых сред) или с начальным возмущением (для неволновых сред), которые поддерживаются внешними источниками. В случае малого превышения над порогом таких неустойчивостей, формирование аномально узких спектров развитых структур приводит к возникновению каскадов неустойчивостей, формирующих самоподобные структуры.

Поступила в редакцию 1 июня 2004 года

Список литературы

- [1] Krinsky V.I. Self-organization autowaves and structures far from equilibrium. — Berlin: Springer-Verlag. — 1984. — 256 p.
- [2] Haken H. Dynamics of synergetic systems: proceedings. — Berlin: Springer-Verlag. — 1987. — 465 p.
- [3] Куклин В.М., Киричок А.В., Куклина О.В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде // Вопросы атомной науки и техники. — 2000. — №1. — С. 222–224.
- [4] Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P., Vorob'ev V.M. Spatial Dissipative Structures // Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. in Physics.). Singapore. World Scientific. — 1990. — V. 2. — P. 776–803.
- [5] Воробьев В.М., Куклин В.М. О механизме возникновения пространственных структур в диссипативных неравновесных средах // Письма в ЖТФ. — 1987. — Т. 13, №22. — С. 1354–1360.
- [6] Kirichok A.V. and Kuklin V.M. Allocated Imperfections of Developed Convective Structures. // Physics and Chemistry of the Earth. Part A — 1999. — №6, — P. 533–538.
- [7] Kuklin V.M. and Panchenko I.P. Nonlinear structure formation in dissipative media // Plasma Physics Reports. — 1994. — V. 20, N 9. — P. 813–823.
- [8] Kuklin, V.M. and Kirichok. A.V. Distributed defects in mature dissipative structures // Phys. Scripta. — 1995. — V. 52. — P. 492–497.
- [9] Куклина О.В. Киричок А.В., Куклин В.М. Динамика формирования самоподобных структур в нелинейных волновых диссипативных средах с нераспадным спектром. // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина — 2001. — № 541. — С. 73–76.
- [10] Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // J. Inst. Math. Appl. — 1965. — V. 1, N 2. — P. 269–306.
- [11] Newell A.C. Solitons and Condensed Matter Physics (Bishop and Schneider, Eds). — Berlin: Springer. — 1978. — P. 520.
- [12] Rasmussen J.J. Rудал K. Blow-up in nonlinear Schroedinger equations — I. A. General Review // Physica Scripta. — 1988. — V. 33, N 2. — P. 481–497.
- [13] Spatschek K.H. et al. On the role of soliton solutions in temporal chaos: examples for plasmas and related systems // Proc. Int. Conf.: Singular Behavior and Nonlinear Dynamics. — 1988. — V. 2, World Scientific. — P. 555.
- [14] Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн вблизи порога их параметрической неустойчивости // УФН — 1974. — Т. 114, №4. — С. 609–654.
- [15] Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука. — 1987. — 272 с.
- [16] Valeo E.J. and Olerman C.R. Model of Parametric Excitation by an Imperfect Pump // Phys. Rev. Lett. — 1973. — V. 30, N 21. — P. 1035–1038.
- [17] Thomson J.J. and Karush J.I. Effect of finite-bandwidth Driver on the Parametrical Instability // The Physics of Fluids. — 1974. — V. 17, N 8. — P. 1608–1613.
- [18] Алиев Ю.М., Градов О.М., Зюнтер Д. Параметрические эффекты в плазме, взаимодействующей с монохроматическим полем накачки // Beitrage aus der Plasma Physik — 1977. — Н. 6, Band 17. — P. 353–361.

- [19] Пустовалов В.В., Силин В.П., Черников А.А. Нестационарная теория параметрической неустойчивости плазмы // Квантовая электроника. – 1978. – Т. 5, № 9. – С. 1940–1948.
- [20] Pismen, L., Inertial effects in long-scale thermal convection // Phys. Lett. A. – 1986. – V. 116. – P. 241–243.
- [21] Киричок А.В., Куклин В.М., Панченко И.П., Моисеев С.С., Письмен Л.М. Динамика образования крупномасштабных вихрей в режиме конвективной неустойчивости // Inter. Conf. "Physics in Ukraine", Kiev, 22–27 June 1993. Proc. Contr. Pap. ITP. – 1993. – P. 76–80.
- [22] Киричок А.В., Куклин В.М., Панченко И.П. О возможности динамо-механизма в неравновесной конвективной среде // Доклады НАНУ. – 1997. – № 4. – С. 87–92.
- [23] Вихревое динамо в спиральной турбулентности. // Авт.: Моисеев С.С., Оганесян К.Р., Руткевич П. Б., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. в кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Под ред. В.Г. Барьяхтара, В.Е. Захарова, В.М. Черноусенко. Сб. науч. тр. – Киев: Наукова Думка. – 1990. – 472 с.
- [24] Busse F.H., Riahi N. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries // J.Fluid Mech. – 1980. – V. 96. – P. 243.
- [25] Маломед Б. А., Трибельский М.П. Об устойчивости стационарных периодических структур в слабонадкритической конвекции // ЖЭТФ – 1987. – Т. 92. – С. 539–543.
- [26] Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.П. Двумерные квазипериодические структуры в неравновесных системах // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 96. – С. 684–699.
- [27] Бабаскин А.А., Каменский Ю.В., Кириченко В.Г., Киричок А.В., Куклин В.М., Твардовский А. О распределенных дефектах на поверхности и в объеме кристалла // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна – 2000. – № 496, Вип. 4(12). – С. 23–28.
- [28] Кириченко В.Г., Куклин В. М. Особенности трансформации структуры кристаллов при фазовых превращениях // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна – 2001. – № 510, Вип. 1(13). – С. 73–75.
- [29] Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. Т.1. Термодинамическая и общая кинетическая теория. – М.: Мир: – 1978. – 806 с.
- [30] Christian J.W. Transformations in metals and alloys. – Pergamon Press. – 1975. – 320 p.
- [31] Ramstad A., Brocks G., Kelly P.J. Theoretical study of Si (100) surface reconstruction // Phys. Rev. – 1995. – V. 51, N 20. – P. 14504.
- [32] Алекперов С.Д., Васильев С.И., Леонов В.Б., Панов В.И., Семенов А.Э. Исследование асимметрии атомного изображения поверхностной решетки графита методом СТМ // Доклады АН СССР, Физика. – 1989. – Т. 307, № 5. – С. 1104–1109.
- [33] Kamensky Yu., Limansky A., Limanskaya O. Imaging of oligonucleotides and DNA by Scanning Tunneling Microscopy // "Nano-2" Second International Conference on Nanometer Scale Science and Technology Aug. 2-6, 1993.
- [34] Hill R. On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain // Math.Proc. Camp.Phill.Soc. – 1975. – V. 77. – P. 225–234.
- [35] Thompson J.M.T. Instabilities and catastrophes in science and engineering. - John Willey & Sons. – 1982. – 320 p.
- [36] Фридель Ж. Дислокации. – М.: Мир. – 1967. – 643 с.
Fridel J. Dislocations. – Pergamon Press. – 1964.
- [37] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд. Иностр. Лит. – 1963. – 247 с.