

# Метод численного анализа спектров плоских резонаторов

## Содержание

1. Введение	26
2. Граничное уравнение в резонаторе с идеально проводящими стенками	26
3. Симметрия подынтегральной функции	27
4. Построение дискретной модели	28
5. Результаты численного эксперимента	30

## Abstract

The solution of spectral problem for the electromagnetic H-polarized field in flat special type resonator is numerically simulated. The special modification of the potential theory method, used in the paper, is available to solve the problem for the wide range of resonator types.

## 1. Введение

Быстрый рост области применения миллиметрового излучения обуславливает необходимость построения гибких и достаточно точных численных моделей для расчета спектров гиротронов, используемых в качестве генераторов СВЧ. Основные направления в разработке конфигурации гиротронов опираются на требования разреженности спектра и достаточно высокой мощности генерируемых СВЧ-волн. Чтобы достичь этого, геометрию резонаторов приходится существенно усложнять [1–4]. Поэтому особенно продуктивным является построение вычислительных моделей, которые позволяют анализировать спектр широкого класса резонаторов, не привязываясь к какой-то определенной геометрической структуре. В работе [5] был предложен новый подход к решению, основанный на сведении краевой спектральной задачи к решению гиперсингулярного интегрального уравнения. Этот метод предполагает поиск решения краевой задачи в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев с неизвестной плотностью. В случае H-поляризации в качестве решения предлагается

брать потенциал двойного слоя. В данной работе описанная методика будет применена для численного анализа спектра плоского резонатора (это резонатор, геометрия которого инвариантна вдоль некоторого направления). Кроме условий гладкости, на форму и размеры граничной кривой резонатора не налагается никаких дополнительных ограничений.

## 2. Граничное уравнение в резонаторе с идеально проводящими стенками

В условиях вакуума ( $\mu = \varepsilon = 1$ ) H-поляризованное квазистационарное электромагнитное поле в плоском резонаторе (область  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ) с идеально проводящими стенками полностью восстанавливается по единственной отличной от нуля компоненте вектора напряженности магнитного поля  $H_3(x) = e^{i\omega t} \cdot U(x)$ , где функция  $U(x)$  является нетривиальным решением второй краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = k^2 U(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n(x)} U(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $n(x)$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Найти все пары  $\{\omega, U(x)\}$ , где  $U(x)$  — не равная тождественному нулю в области  $\Omega$  функция, означает решить спектральную задачу (1).

Как известно, функция Неймана  $Y_0$  является фундаментальным решением для оператора Гельмгольца. Полученная на основе соотношения  $(\Delta + k^2 I)Y_0(k|x|) = 4\delta(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  третья формула Грина, позволяет представить решение задачи (1) в виде

$$U(x) = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} U(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} Y_0(k|x-y|) dS_y. \quad (2)$$

Откуда для предельных значений нормальной производной на границе области  $\Omega$  получается уравнение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} U(y) \frac{\partial^2 Y_0(k|x_\varepsilon - y|)}{\partial n(x) \partial n(y)} dS_y = 0, \quad (3)$$

где  $x_\varepsilon = x - \varepsilon \cdot n(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

Если  $\partial\Omega$  — гладкая кривая, то, как будет показано далее, для любой гладкой  $U(y)$  левая часть уравнения (3) имеет смысл. Уравнение (3) можно использовать и в случае кусочно-гладкой границы.

В данной работе изложенный выше вывод граничных уравнений будет проведен для областей  $\Omega$ , обладающих свойством симметрии

$$P_\alpha \Omega = \Omega, \quad (4)$$

где  $P_\alpha$  — оператор поворота на угол  $\alpha = 2\pi/N$  против часовой стрелки ( $N$  — натуральное число). На рисунке 1 для случая  $N = 6$  приведены примеры некоторых областей, обладающих этим свойством (области  $\Omega$  соответствуют закрашенным частям на рисунках).

Вводя унитарный оператор  $T$ , действие которого на функцию в области  $\Omega$  определяется по формуле  $TU(x) = U(P_\alpha x)$ , можно показать, что любое решение спектральной задачи (1) представляется в виде суммы собственных функций оператора  $T$ , удовлетворяющих (1). Поэтому, для областей  $\Omega$ , обладающих симметрией (4), спектральную задачу можно сформулировать так: для каждого  $m = 0, \dots, N-1$  найти значения  $k_m$ , для которых существуют нетривиальные решения  $U_m$  краевой задачи (1), удовлетворяющие условию  $TU_m(x) = \lambda_m U_m(x)$ ,  $\lambda_m = e^{im\alpha}$ , и сами эти решения. Уравнение (3) в этом случае для каждого  $m = 0, \dots, N-1$  перейдет в уравнение вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L U_m(y) F_\varepsilon(x, y) dS_y = 0, x \in L, \quad (5)$$

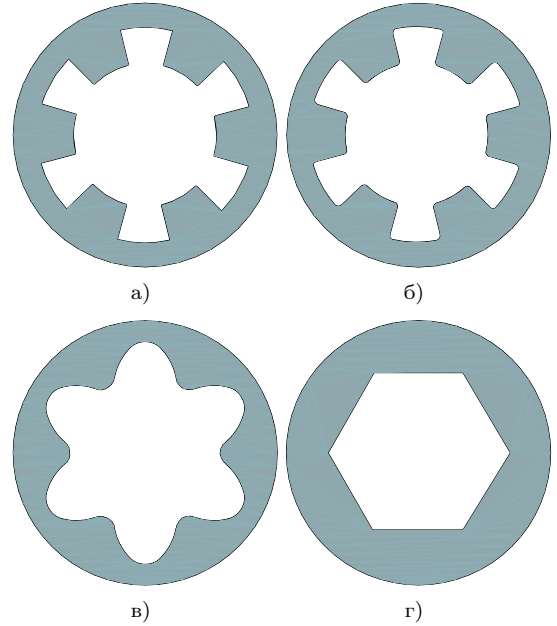


Рис. 1. Примеры рабочих областей исследуемых плоских резонаторов.

где

$$F_\varepsilon(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{im\alpha j} \frac{\partial^2 Y_0(k|x_\varepsilon - P_{\alpha j} y|)}{\partial n(x) \partial n(y)}.$$

$L$  — часть  $\partial\Omega$  такая, что  $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^{N-1} P_{\alpha j} L$ .

### 3. Симметрия подынтегральной функции

При сведении интегрального уравнения (5) к СЛАУ возникает необходимость вычисления подынтегральной функции на сетке. В этой связи очень полезным оказывается исследование подынтегральной функции на наличие неких свойств, которые позволят ускорить численный счет при заполнении матрицы СЛАУ. Обозначим

$$A_j(x, y) = \frac{\partial^2 Y_0(k|x - P_{\alpha j} y|)}{\partial n(x) \partial n(y)}.$$

Выражая нормальные производные через скалярные произведения и пользуясь рекуррентным соотношением для производных функции Неймана, несложно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} A_j(x, y) = & -\frac{k^2 Y_2(k|x - P_{\alpha j} y|)}{|x - P_{\alpha j} y|^2} \\ & \times (x - P_{\alpha j} y, P_{\alpha j} n(y)) \cdot (x - P_{\alpha j} y, n(x)) \\ & + \frac{k Y_1(k|x - P_{\alpha j} y|)}{|x - P_{\alpha j} y|} \cdot (P_{\alpha j} n(y), n(x)). \end{aligned}$$

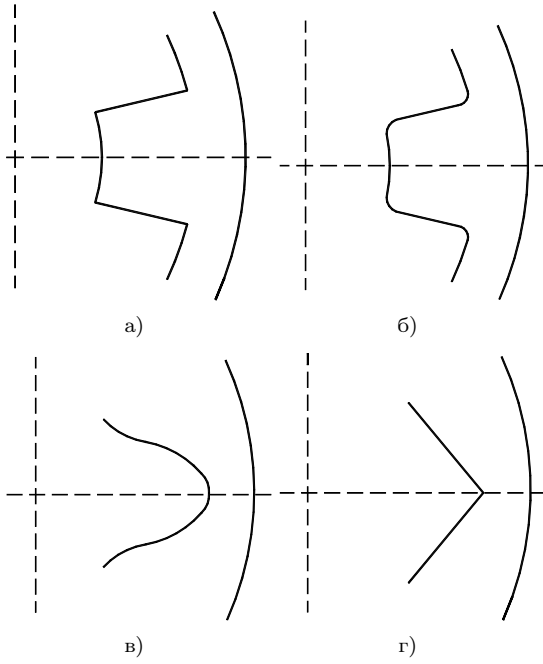


Рис. 2. Примеры симметричных кривых  $L$ .

Отсюда легко заметить, что  $A_{N-j}(y, x) = A_j(x, y)$ ,  $A_0(y, x) = A_0(x, y)$ . Это означает, что часть подынтегральной функции в (5) обладает следующим свойством инвариантности  $F_0(y, x) = \overline{F_0(x, y)}$ .

Еще одно свойство симметрии для функции  $F_0(x, y)$  можно получить в случае, когда часть кривой  $L$  симметрична относительно биссектрисы угла раствора  $\alpha$ . В приведенных ранее на рис. 1 формах поперечного сечения резонаторов можно так выбрать часть кривой  $L$ , чтобы это свойство было выполнено (рис. 2). Тогда, вводя отображение, которое каждой точке  $x \in L$  ставит в соответствие точку  $x^*$  — ее отражение относительно соответствующей биссектрисы, можно получить соотношения  $A_{N-j}(x^*, y^*) = A_j(x, y)$ ,  $A_0(x^*, y^*) = A_0(x, y)$ , которые влекут за собой

$$F_0(x^*, y^*) = \overline{F_0(x, y)}.$$

Использование указанных выше свойств симметрии позволяет более чем в два раза ускорить процесс заполнения матрицы СЛАУ при реализации метода на вычислительной машине.

#### 4. Построение дискретной модели

В приведенной СИУ (5) участвуют интегралы с сильной особенностью (слагаемое при  $j = 0$ ) — это гиперсингулярные интегралы. Для выяснения характера этой особенности изучим подынтегральную функцию в (5).

Считаем контур  $L$  гладким. Все приведенные ниже рассуждения с небольшими видоизменениями справедливы и для случая кусочно-гладкого контура. Пусть  $y = x(s)$ ,  $x = x(t)$  — параметризация  $L$ .

Учет поведения функции Неймана  $Y_0(z)$  в окрестности нуля позволяет записать представление

$$F_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x_\varepsilon - y|^2 + O(\ln |x_\varepsilon - y|) + Z_\varepsilon(x, y),$$

где  $Z_0(x, y)$  — гладкая функция.

Как известно, функция  $\ln |x - y|$  является гармонической при  $x \neq y$  по каждому из аргументов. Используя условия Коши-Римана, легко получить равенство

$$(n(x), \nabla_{x_\varepsilon})(n(y), \nabla_y) \ln |x_\varepsilon - y|^2 = -(\tau(x), \nabla_{x_\varepsilon})(\tau(y), \nabla_y) \ln |x_\varepsilon - y|^2,$$

для любых  $x, y \in L$ , где  $\tau(x), \tau(y)$  — касательные к  $L$  вектора. В этом равенстве  $(\tau(y), \nabla_y)$  можно заменить на  $|x'(s)|^{-1} \frac{\partial}{\partial s}$  т.к.  $(x'(s), \nabla_y) = \frac{\partial}{\partial s}$ .

Поскольку при  $\varepsilon = 0$  и  $x \neq y$  слева появляется слагаемое вида  $(\tau(x), \tau(y))/|x - y|^2$ , то в (5) предельный переход по  $\varepsilon$  не возможен под знаком интеграла. Это означает, что  $F_0(x(t), x(s))$  следует рассматривать как обобщенную функцию от  $s$  вида

$$-\frac{2}{\pi |x'(s)|} \frac{\partial}{\partial s} \frac{(x(t) - x(s), \tau(t))}{|x(t) - 0 \cdot n(t) - x(s)|^2}.$$

При  $\varepsilon \neq 0$  стоящая под знаком производной функция от  $s$  в окрестности точки  $t$  представима в виде

$$\frac{1}{|x'(s)|} \frac{t - s}{(t - s)^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon(t - s)O(1)}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|x'(s)|},$$

$O(1)$  — гладкая от  $t$  и  $s$  функция.

Левая часть граничного уравнения (5), с учетом сказанного, может быть переписана в форме

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b U_m(s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{(x(s) - x(t), \tau(t))}{|x(s) - x(t) + \varepsilon \cdot n(t)|^2} ds + \int_a^b U_m(s) R(s, t) ds, \quad (6)$$

где  $R(s, t)$  имеет логарифмическую особенность при  $s = t$ .

Ясно, что для гладкого контура  $L$  при достаточной гладкости функции  $U_m(s)$  предел по  $\varepsilon$  в (6)

существует. Запишем очевидное равенство

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b U_m(s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{(x(s) - x(t), \tau(t))}{|x(s) - x(t) + \varepsilon \cdot n(t)|^2} ds \\ &= \int_{[a,b] \setminus [t-h/2, t+h/2]} U_m(s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{(x(s) - x(t), \tau(t))}{|x(s) - x(t)|^2} ds \\ &- \frac{1}{|x'(t)|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} U_m'(t+s) \frac{s + O(s^2)}{s^2 + \varepsilon^2 + 2s^2\varepsilon O(1)} ds \\ &+ U_m(s) \frac{s + O(s^2)}{s^2} \Big|_{-h/2}^{h/2}. \end{aligned}$$

Используя для  $U_m(s)$  какой-либо интерполяционный полином легко получить ту или иную квадратурную формулу, с помощью которой граничное уравнение (5) сводится к СЛАУ для приближенного вычисления значений искомой функции  $U_m(s)$  в узлах выбранной сетки.

Достаточно просто процесс дискретизации реализуется в случае следующей аппроксимации. На  $[a, b]$  выбираем две равномерные сетки  $\{a_k\}_0^n$  и  $\{t_k\}_1^n$  с перемежающимися узлами  $a_i = a + ih$ ,  $t_k = a_k - h/2$ ,  $h = (b - a)/n$ ,  $n$  - объем сетки. На каждом  $[a_{i-1}, a_i]$  при  $i = 2, n - 1$   $U_m(s)$  заменяется параболой. Используется трех точечный шаблон  $\{t_{i-1}, t_i, t_{i+1}\}$ . На крайних отрезках ( $i = 1, i = n$ ) используем линейную аппроксимацию по парам точек  $\{t_1, t_2\}$  и  $\{t_{n-1}, t_n\}$  соответственно.

Считаем, что параметр  $t$  в уравнении (6) пробегает узлы сетки  $\{t_k\}_1^n$ . При достаточно малом  $h$  слагаемыми вида  $O(\dots)$  в правой части последнего равенства можно пренебречь. При этом, предел во втором слагаемом легко вычисляется, если учесть, что интеграл берется по симметричному отрезку, а выражение для производной получается из описанной аппроксимации путем дифференцирования. В результате получается линейная комбинация величин  $\{U_m(t - h), U_m(t), U_m(t + h)\}$ , умноженная на  $1/h$ . Аналогичное выражение возникает на месте третьего слагаемого. Таким образом, при переходе к СЛАУ множитель  $1/h$  попадет на главную и прилегающие к ней побочные диагонали. Первое слагаемое представляет собой интеграл от гладкой функции, для которой можно использовать любую полиномиальную интерполяцию. Для оставшегося интеграла в уравнении (6) можно использовать специальные квадратурные формулы для случая, когда подинтегральная функция имеет логарифмическую особенность.

В результате дискретизации получим приближенную задачу, которая заключается в том, чтобы найти те значения параметра  $k_m$ , при которых существует нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$B(k_m)U_m = 0 \quad (7)$$

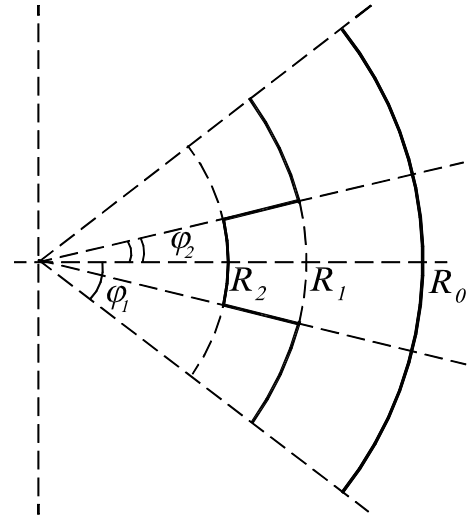


Рис. 3. Геометрические параметры экспериментального резонатора.

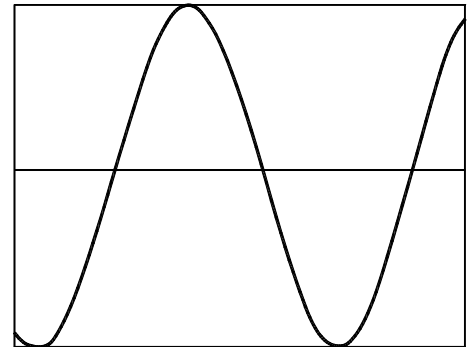


Рис. 4. Кривая вещественной части определителя.

и найти эти решения.

Эту задачу можно решать следующим образом. Интересующие нас значения  $k_m$  ищутся как корни определителя системы  $\det B(k) = 0$ . Для этого можно использовать любой из известных численных методов нахождения корней непрерывной функции (т. к. элементы матрицы СЛАУ являются непрерывными функциями от параметра  $k$ ). Далее, найденное значение параметра  $k_m$  подставляется в СЛАУ, система приводится к верхнетреугольному виду. Считая последнюю строчку системы нулевой (т. к.  $\det B(k_m) = 0$ ), находим неизвестную плотность  $U_m$  как решение однородной СЛАУ (7) с точностью до произвольной постоянной.

Возможен также и другой вариант решения, основанный на построении итерационного процесса [6] для нахождения наименьшего по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора. Считаем, что для любого  $k$  матрица  $B(k)$  имеет только простые собственные значения (всегда можно добиться этого с помощью малых деформаций элементов матрицы). При этом условии в пространстве существует базис из соб-

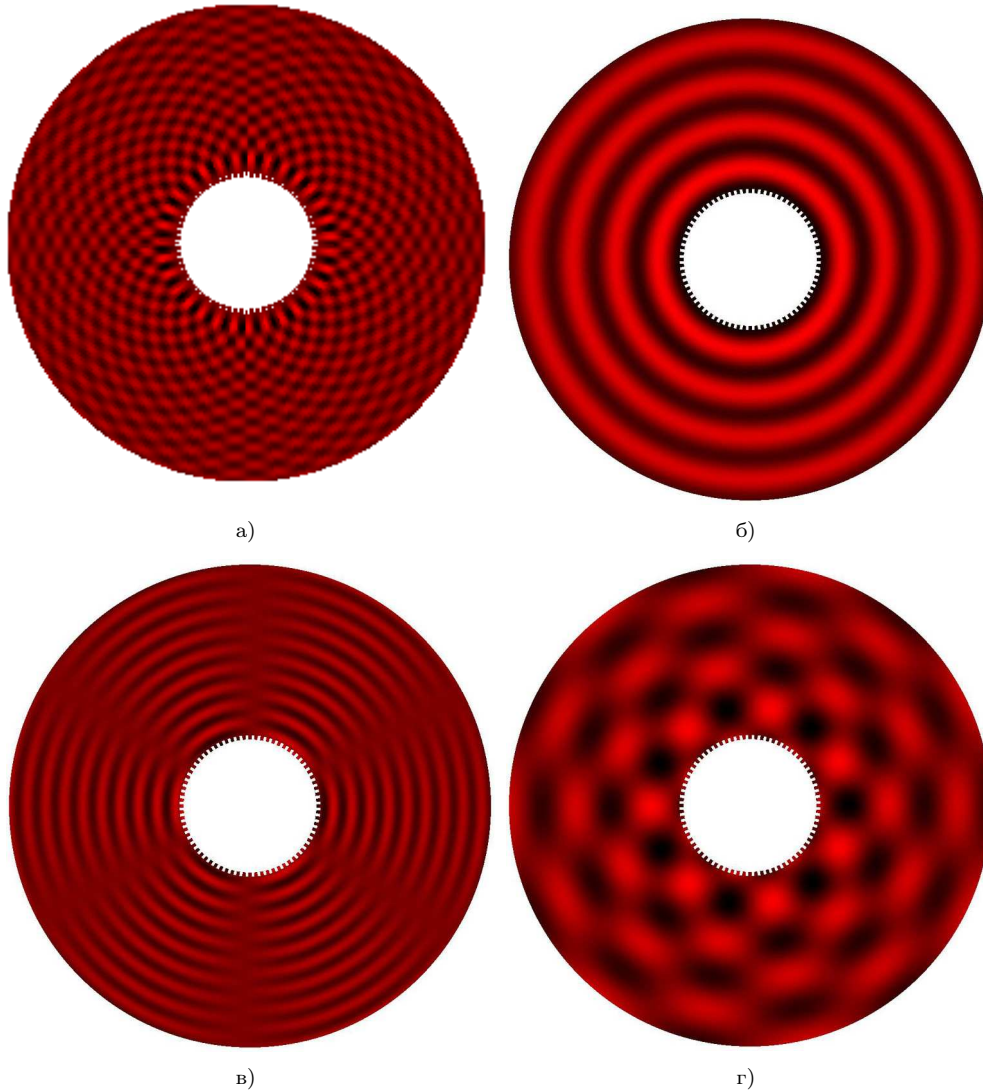


Рис. 5. Волновые картины решения. а)  $k_m = 3.587, m = 31$ ; б)  $k_m = 1.349, m = 0$ ; в)  $k_m = 3.160, m = 3$ ; г)  $k_m = 0.913, m = 7$ .

ственных векторов матрицы. Пусть  $0 \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$  — собственные значения матрицы  $B(k)$ , а  $e_1(k) \dots e_n(k)$  соответствующая им система из собственных векторов (базис в пространстве). Строим итерационный процесс  $B(k)V_p(k) = V_{p-1}(k)$ , где  $V_0(k)$  — вектор начального приближения (можно взять вектор из единичек). Тогда для нахождения модуля первого собственного значения используем сходимость  $|V_{p-1}(k)|/|V_p(k)| \rightarrow |\lambda_1(k)|, p \rightarrow +\infty$ .

А для нахождения собственного вектора — справедливые (при  $p \rightarrow +\infty$ ) соотношения эквивалентности

$$\frac{V_p(k)}{|V_p(k)|} \sim \text{const} \cdot e^{-ip \arg \lambda_1} e_1(k), \text{ если } |\lambda_1| < |\lambda_2|$$

$$\left[ \frac{V_{p-1}(k)}{|V_{p-1}(k)|} - e^{-i\beta} \frac{V_p(k)}{|V_p(k)|} \right] \sim \text{const} \cdot e^{-ip\beta} e_1(k),$$

если  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$

где  $\beta = \arccos(|\lambda_1|^{-1} \text{Real} \lim_{p \rightarrow \infty} (V_{p-1}, V_p)/|V_p|^2)$ . Теперь находим  $k_m$  как нули функции  $|\lambda_1(k)|$ , а собственный вектор  $e_1(k)$  будет приближением для неизвестной плотности  $U_m$ , т. к.  $B(k)e_1(k) = \lambda_1(k) \cdot e_1(k) \approx 0$ .

Для того, чтобы по найденной плотности (на границе области) построить решение спектральной задачи  $U_m(x)$  (в области), можно использовать представление (2).

## 5. Результаты численного эксперимента

Для демонстрации возможностей изложенной

Таблица 1. Результаты поиска спектрального значения для экспериментального резонатора

n	$k_m$		
170	3.5216	3.5554	3.5885
240	3.5218	3.5551	3.5882
370	3.5220	3.5548	3.5879
490	3.5221	3.5548	3.5878
550	3.5221	3.5547	3.5877

численной модели приведем результаты поиска собственных значений  $k_m$  ( $m = 31$ ) на интервале [3.5; 3.6] с точностью до третьего (включительно) знака после запятой (табл. 1).

Расчеты проводились для резонатора (назовем его *экспериментальным резонатором*), форма которого приведена на рис. 1а, а геометрия задается параметрами  $R_0 = 26.38425$ ,  $R_1 = 7.71946$ ,  $R_2 = R_1 - h$ ,  $h = 0.45$ ,  $\varphi_1 = \pi/N$ ,  $\varphi_2 = 35\varphi_1/66$ ,  $N = 72$  (рис. 3).

Вещественная часть определителя  $\det B(k)$  на этом интервале имеется три хорошо различимых корня (рис. 4), мнимая же часть по сравнению с вещественной чрезвычайно мала (отличается приблизительно на 12 порядков). Это дает основание полагать, что определитель в действительности вещественен и отличие от нуля мнимой его части связано с накоплением вычислительной погрешности при работе с комплексными числами.

Численный эксперимент, проведенный для того же резонатора, но со сглаженными углами (рис. 1б) дал те же значения частоты: 3.5222, 3.5547, 3.5875.

Если же форма зубцов отличается несколько сильнее (рис. 1в–г), то найденные частоты: 3.5222, 3.5547, 3.5905 для случая в); и 3.5222, 3.5547 для случая г). Очевидно, что для рассматриваемых резонаторов, спектр не очень чувствителен к форме зубца.

Любопытно отметить некоторые особенности получаемых решений  $U_m(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Практически во всех посчитанных вариантах решение обладает периодичностью, связанной с модой

$$U_m(P_\phi x) = U_m(x), \phi = \frac{2\pi}{m}.$$

Это хорошо заметно на волновых картинах решения  $U_m(x)$  (рис. 5) для экспериментального резонатора, посчитанных для нескольких найденных частот спектра, отвечающих разным модам. Очевидно, повышение спектральной частоты сказывается на уменьшении длины волны в радиальном направлении для соответствующего решения  $U_m(x)$ .

Размеры и форма *экспериментального резонатора* позаимствованы из работы [7], в которой излагается методика спектрального анализа для идеализированной модели гиротрона (это наш *экспериментальный резонатор*), основанная на сведе-

нии исходной краевой задачи к сингулярному интегральному уравнению. Этот метод существенно связан с формой зубца (рис. 1а) и не может быть применен к рассмотренным ранее случаям (рис. 1б–г). Однако он позволяет проводить вычисления с высокой точностью. Сравнение результатов этого метода с результатами данной работы обнаруживает совпадение найденной частоты  $k = 3.587$  с точностью до трех знаков после запятой.

Статья получена 25 июня 2005 г.

## Список литературы

- [1] Sakamoto K., Tsuneoka M., Imai T. et al. Stable, single-mode oscillation with high order // J. Phys. Soc. Japan. – 1996. – V. 65, № 7. – P. 1888–1890.
- [2] Vlasov S.N., Zagryadskaya L.I., Orlova I.M. et al. Irregular waveguides as open resonator // Radiophys. and Quantum Electron. – 1969. – V. 12, № 8. – P. 972–978.
- [3] Iatrou Ch.T., Kern S., and Pavelyev A.B. coaxial cavities with corrugated inner conductor for gyrotrons // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. – 1996. – V. 44, № 1. – P. 56–64.
- [4] Dumbrajs I., Nusinovich G.S. Coaxial gyrotrons: past, present and future (review) // IEEE Transactions on Plasma Science. – June 2004. – V. 32, № 3. – P. 934–946.
- [5] Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в  $\mathbb{R}^3$  // Электромагнитные явления. – 1998. – Т. 1, № 4. – С. 447–452.
- [6] Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз. – 1963. – 734 с.
- [7] Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Степенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // Журнал технической физики. – 2004. – Т. 74, № 7. – С. 81–89.