

Численное моделирование осесимметричного решения задачи о дифракции электромагнитного поля в открытом гофрированном резонаторе

Abstract

The numerical approximation of the solution of the boundary hypersingular equation corresponding to the problems of diffraction electromagnetic field on the axisymmetrical ideal conducted screens is constructed. The aim of the paper is to show the high efficiency of the proposed method. Obviously, this method is universal and can be utilized on a large scale of the similar problems. Some numerical results obtained with the use of a PC program based on this method are presented.

Предложенная профессором Щербиной В.А. в [1] численная модель характеристик электромагнитных резонаторов осесимметричного типа была программно реализована автором настоящей статьи для случая гладких образующих [2,3]. Возникающая при этом сеточная функция ядра интерполируется с использованием квадратичных сплайнов на внутренних отрезках сети и степенных (степени 1/2) на концах. В местах сопряжения этих сплайнов обеспечивается только непрерывность интерполирующих функций, а для достижения гладкости в схемах, которые нам известны, требуется много оперативной памяти и машинного времени. Для кусочно-гладких образующих с большим количеством углов, как, например, у тех, что изображены на рис. 1 удаётся получить необходимую гладкость без серьёзных затрат. Описанию такой схемы посвящена настоящая статья. Модель резонатора осесимметричного типа с образующими, как на рис. 1, программно реализована автором и примеры, иллюстрирующие её возможности, приведены в конце статьи.

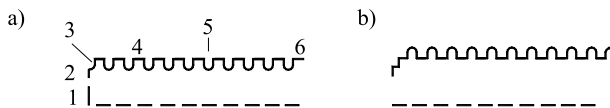


Рис. 1. Образующие моделируемых волноводов.

Искомое возмущение электрического поля $E_1(x)$, как показано в [1], является осесимметричным ре-

шением краевой задачи рассеяния:

$$\begin{cases} \Delta E_1(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E_1(x) = 0, & x \in R^3/S, \\ (\nabla, E_1(x)) = 0, \\ n(x) \times E_1(x) = -n(x) \times E_0(x), & x \in S, \\ E_1(x) = C_0 \left(\frac{x}{|x|} \right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \\ & \text{при } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь S — поверхность, образованная вращением образующей, $n(x)$ — внешняя нормаль к этой поверхности, $E_0(x) = f_1(r, z)(e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi) + f_2(r, z)e_3$ — квазистационарное осесимметричное невозмущённое электрическое поле заданное по условию задачи. Решение краевой задачи предлагается искать в виде [1]:

$$E_1(x) = \nabla \times \int_s \left[j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - k_\varphi(y) j(y) \right] \times \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y, \quad (2)$$

где $j(y) = \hat{u}(y)e_\varphi(y)$ — неизвестное псевдовекторное поле, $e_\varphi(y) = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$, $k_\varphi(y) = -\dot{z}(t)/r(t)$ — главная кривизна вдоль параллели, проходящей через $y \in S$, $r(s)$, $z(s)$ — естественная параметризация образующей.

В [1] показано, что неизвестное значение плотности потенциалов в выражении (2) можно определить из решения гиперсингулярного граничного

интегрального уравнения

$$\int_0^L \frac{K(s, t)u(t)}{(s-t)^2} dt = f(s), \quad 0 < s < L, \quad (3)$$

где L – длина образующей, а гиперсингулярный интеграл определён как предел последовательности обыкновенных интегралов, которые возникают, когда неподвижная точка x_s удалена с поверхности интегрирования S и помещена в точку $\bar{x}_s + \varepsilon \bar{n}(x_s)$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{K(s, t)}{(s-t)^2} &= -r(t) \left[\dot{z}(s) \frac{\partial}{\partial r} - \dot{r}(s) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\dot{z}(s)}{r(s)} \right] \\ &\times \left[\dot{z}(t) \frac{\partial}{\partial \rho} - \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\dot{z}(t)}{r(t)} \right] \Psi(r, z, \rho, \zeta), \\ \Psi(r, z, \rho, \zeta) &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ &\times \frac{\exp \left[ik \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + (z - \zeta)^2} \right]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + (z - \zeta)^2}}, \\ f(s) &= \dot{r}(s) f_1(r, z) + \dot{z}(s) f_2(r, z). \end{aligned}$$

Углы и разрывы непрерывности образующей разбивают её на N гладких участков. На концах каждого из этих участков неизвестная плотность потенциалов $u(t)$ обращается в нуль, поэтому сеточная функция ядра $K(s, t)u(t)$ из уравнения (3) в пределах каждого участка гладкости образующей интерполируется независимо от остальных участков. Для этого каждый из участков непрерывности образующей разбивается на отрезки равной длины d_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и значения ядра, вычисленные по формуле (3) в центре каждого такого отрезка и определяют сеточную функцию, которую необходимо интерполировать. С этой целью, среди всех участков гладкости выделяются участки различной длины. Если требовать, чтобы все d_i были приблизительно одинаковы, то количество дискретных точек на них будет различна. Примеры таких участков в случае изображенном на рис. 1а пронумерованы. Для каждого такого участка, ещё до начала решения основной задачи, строится система фундаментальных функций, которая определяется следующим образом. Если участок разделён на отрезков равной длины, то для него строится система из фундаментальных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^M$. Эти функции обладают тем свойством, что в центре отрезка разбиения с номером i , функция с таким же номером i равна 1, ($\varphi_i(x_i) = 1$) а все остальные функции этой системы равны 0. Гладкие сплайны, определяющие эти функции, построены таким образом, что в местах их сопряжения, т.е. на концах отрезков разбиения, обеспечивается не только непрерывность, т.е. равенство друг другу этих сплайнов, но и гладкость этих сплайнов,

т.е. равенство их первых производных. В результате, после того, как построен набор таких фундаментальных функций, табличная функция $\{K_j\}_{j=1}^M$ интерполируется гладкой функцией вида

$$K(x) = \sum_{j=1}^M K_j \varphi_j(x), \quad (4)$$

причём в узле с номером i $K(x_i) = K_i$.

Схему построения системы таких фундаментальных функций рассмотрим на примере участка с номером 6. Этот участок, разделённый на равных отрезков вместе с фрагментом участка с номером 5, примыкающего к нему слева, изображен на рис. 2.

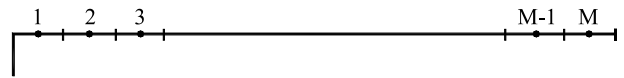


Рис. 2. Пример разбиения участка гладкости на M равных отрезков.

Для интерполяции табличных, а следовательно, и фундаментальных функций по краям образующей, а также в окрестности угловых точек профессора В.А. Щербина и Ю.В. Гандель предлагают использовать степенную функцию вида:

$$\varphi(r) = Cr^{\pi/\alpha}.$$

Здесь $C = const$, r – расстояние от вершины угла, α – значение данного угла, измеренного в радианах. Такая формула возникает при решении волнового уравнения Гельмгольца, когда учитываются соотношения аналогичные условиям Майкнера в двумерном варианте. В нашем случае отрезок с номером 1 находится в окрестности угла $\alpha = 3\pi/2$, поэтому фундаментальные функции здесь представляются степенными функциями вида:

$$\varphi_i(x) = a_1^i x^{2/3} + b_1^i x^{5/3}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Отрезок с номером M находится на краю образующей, где угол $\alpha = 2\pi$, поэтому здесь фундаментальные функции представляются степенными функциями вида:

$$\varphi_i(x) = a_M^i (d-x)^{1/2} + b_M^i (d-x)^{3/2}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Здесь d – длина отрезка разбиения, x – локальная координата ($x = 0$ на левом конце отрезка разбиения и $x = d$ – на правом).

На внутренних отрезках все фундаментальные функции $\varphi_i(x)$ $i = 1, \dots, M$ представляются полиномами 2-го порядка. Для отрезка с номером j ($j = 2, \dots, M-1$) они имеют вид:

$$\varphi_i(x) = a_j^i + b_j^i x + c_j^i x^2.$$

Здесь x – локальная координата со значением равным нулю на левом конце отрезка с номером j .

Коэффициенты $a_j^i, b_j^i, c_j^i, i, j = 1, 2, \dots, M$ определяются из систем алгебраических уравнений. Для фундаментальной функции $\varphi_i(x)$ имеем следующую систему:

1. Условие, которое обеспечивает равенство 0 или 1 фундаментальной функции в центре первого отрезка разбиения. Локальная координата этого центра равна $x_1 = d/2$, поэтому первое уравнение будет иметь вид:

$$a_1^i \left(\frac{d}{2}\right)^{2/3} + b_1^i \left(\frac{d}{2}\right)^{5/3} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1 \\ 0, & \text{если } i \neq 1 \end{cases} \quad (5)$$

2. Два условия, которые обеспечивают непрерывность и гладкость, соответственно, фундаментальной функции на границе между 1 и 2 отрезками разбиения:

$$\begin{aligned} a_1^i x_1^{2/3} + b_1^i x_1^{5/3} &= a_2^i + b_2^i x_2 + c_2^i x_2^2, \\ \frac{2}{3} a_1^i x_1^{-1/3} + \frac{5}{3} b_1^i x_1^{2/3} &= b_2^i + 2c_2^i x_2. \end{aligned}$$

Локальная координата правого конца для 1-го отрезка $x_1 = d$, а локальная координата левого конца для 2-го отрезка равна $x_2 = 0$, поэтому в результате получаем пару алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} a_1^i d^{2/3} + b_1^i d^{5/3} &= a_2^i, \\ \frac{2}{3} a_1^i d^{-1/3} + \frac{5}{3} b_1^i d^{2/3} &= b_2^i \end{aligned} \quad (6)$$

3. Условие обеспечивает равенство 0 или 1 фундаментальной функции в центре j ($j = 2, \dots, M - 1$) отрезка разбиения:

$$a_j^i + b_j^i x_j + c_j^i x_j^2 = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Для всех j локальная координата $x_j = d/2$. Это приводит к уравнениям такого типа:

$$a_j^i + b_j^i \frac{d}{2} + c_j^i \frac{d^2}{4} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1 \\ 0, & \text{если } i \neq 1 \end{cases} \quad (7)$$

4. Два условия обеспечивающие непрерывность и гладкость, соответственно, фундаментальной функции на границе между j и $j + 1$ отрезками разбиения ($j = 2, \dots, M - 2$):

$$\begin{aligned} a_j^i + b_j^i x_j + c_j^i x_j^2 &= a_{j+1}^i + b_{j+1}^i x_{j+1} + c_{j+1}^i x_{j+1}^2, \\ b_j^i + 2c_j^i x_j &= b_{j+1}^i + 2c_{j+1}^i x_{j+1}. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было на границе между 1-ым и 2-ым отрезками локальные координаты $x_j = d$, а $x_{j+1} = 0$ для всех j . Это

даёт такую пару уравнений:

$$\begin{aligned} a_j^i + b_j^i d + c_j^i d^2 &= a_{j+1}^i, \\ b_j^i + 2c_j^i d &= b_{j+1}^i. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичные уравнения на границе между $M - 1$ и M отрезками разбиения будут:

$$\begin{aligned} a_{M-1}^i + b_{M-1}^i x_{M-1} + c_{M-1}^i x_{M-1}^2 &= a_M^i d^{1/2} + b_M^i d^{3/2}, \\ b_{M-1}^i + 2c_{M-1}^i x_{M-1} &= \frac{1}{2} a_M^i d^{-1/2} + \frac{3}{2} b_M^i d^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

5. Условие обеспечивает равенство 0 или 1 фундаментальной функции в центре последнего отрезка разбиения:

$$a_M^i x_M^{1/2} + b_M^i x_M^{3/2} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = M, \\ 0, & \text{если } i \neq M. \end{cases}$$

Локальная координата такого центра равна $x_M = d/2$. Это даёт уравнение:

$$a_M^i \frac{d^{1/2}}{2} + b_M^i \frac{d^{3/2}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = M \\ 0, & \text{если } i \neq M \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, имеем систему из $(3M - 2)$ алгебраических уравнений, для определения такого же количества неизвестных. Для построения всей системы из фундаментальных функций необходимо решить таких систем, но все они подобны и имеют различными только правые части, что сильно облегчает задачу.

Наборы фундаментальных функций строятся для всех выделенных отрезков и с их помощью интерполируется табличная функция на всех отрезках гладкости образующей соответствующей длины по формуле (4). После этого интегрирование вдоль образующей в пределах каждого отрезка d_j , которое необходимо проводить в уравнении (3) сводится к вычислению серии известных гипергеометрических интегралов вида:

$$\int_0^{d_j} \frac{x^k dx}{(s_i - t_j + d_j/2 - x)^2},$$

$$k = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2$$

Таким образом вычисляются все коэффициенты в алгебраических уравнениях системы для определения неизвестных значений плотности потенциалов в узлах заданной сети $\{u_i\}_{i=1}^{\Sigma}$. Здесь Σ – суммарное количество точек дискретной сети на образующей.

Используя эту методику была составлена и отлажена программа ЭВМ для решения задачи о дифракции электромагнитной волны на волноводах с

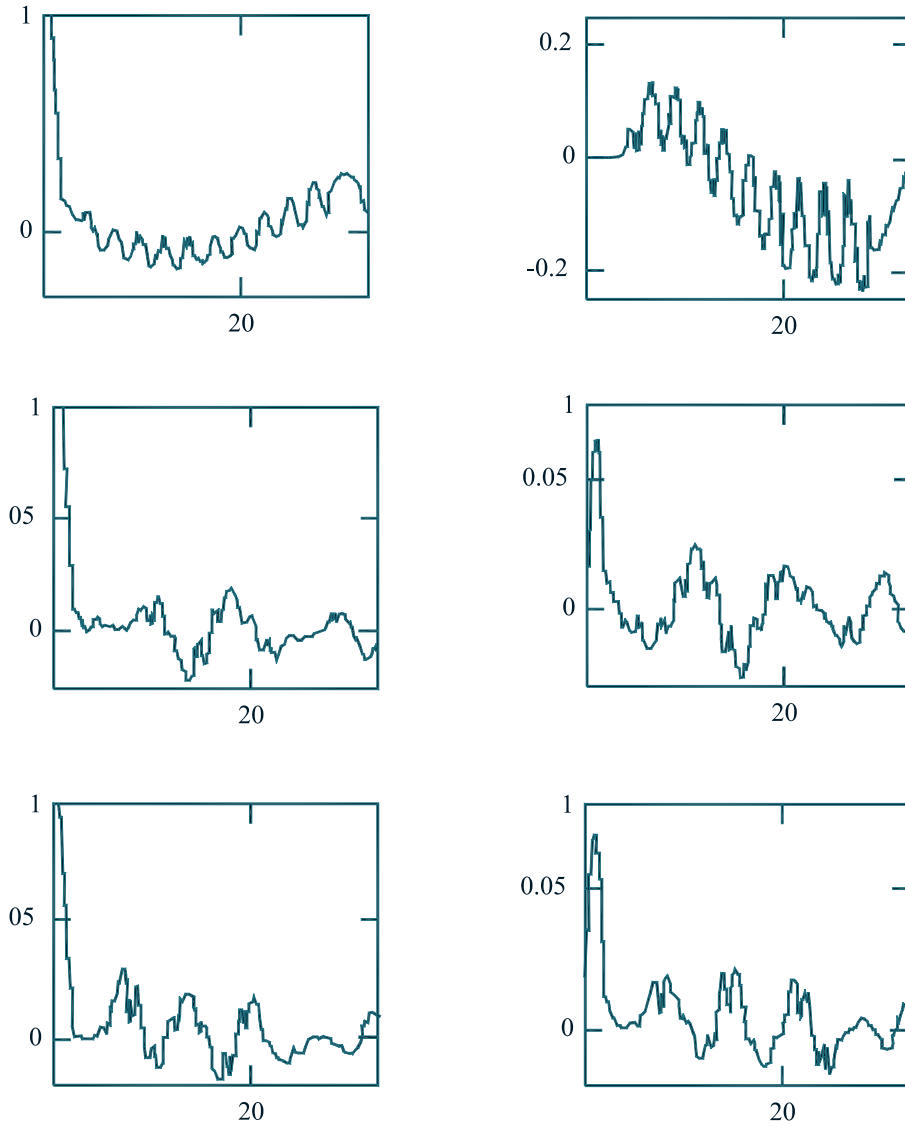


Рис. 3. Графики для вещественной и мнимой частей решений $u(t)$ для частот 1, 7.8, 9.4 ГГц, соответственно.

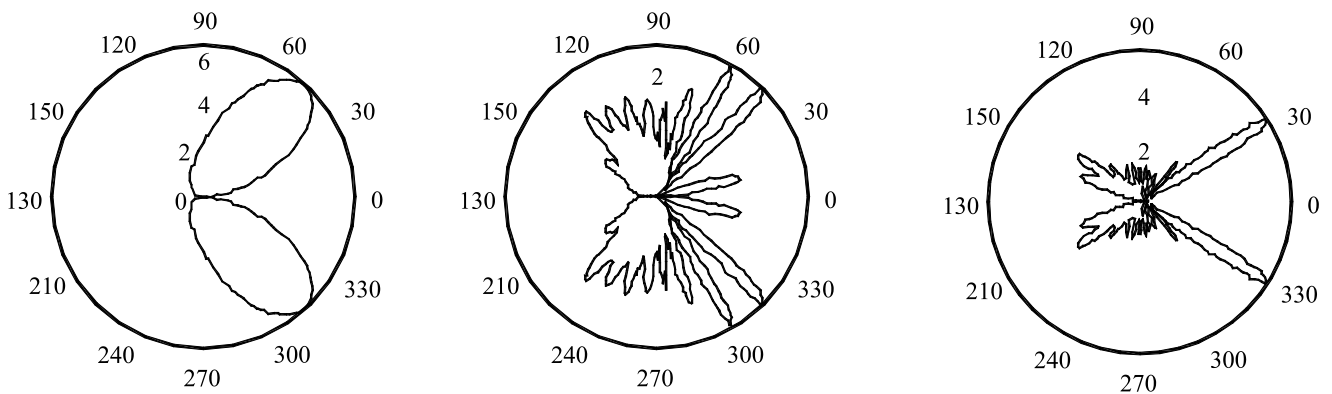


Рис. 4. Диаграммы направленности излучения для частот 1, 7.8, 9.4, соответственно.

осесимметричными образующими обоих типов, из тех что изображены на рис. 1 и с произвольным количеством гофр. Здесь, в качестве примера, приведены некоторые результаты вычислений прове-

денные этой программой для волновода с образующей изображённой на рис. 1а с десятью гофрами. На рис. 3 приведены графики вещественных и мнимых частей решений для частот 1, 7.8, 9.4 GHz,

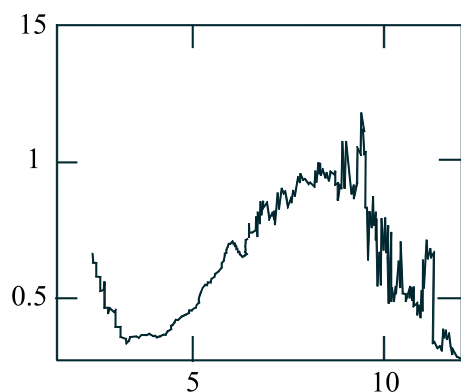


Рис. 5. Мощность излучения резонатора как функция частоты в ГГц.

соответственно. На рис. 4 показаны соответствующие этим решениям диаграммы направленности излучения. На рис. 5 показан график мощности излучения резонатора как функция частоты в GHz. Решения были получены для сети из 350 точек равномерной сети на образующей. Данная программа легко может быть модернизирована под осесимметричные резонаторы другой формы, интересные для конкретных физических исследований.

Статья получена 25 июня 2005 г.

Список литературы

- [1] Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в R^3 . // Электромагнитные Явления – 1998. – Т. 1, № 4. – С. 447–455.
- [2] Shcherbina V.A., Zaginaylov G.I., Zhuchenko S.V. Numerical theory of excitation of axisymmetric open-ended finite length slow wave structure on the basis of the boundary singular integral equation method.// VII-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kharkov, Ukraine. – 1998. – Т. 1. – P. 263–265.
- [3] Щербина В.А., Жученко С.В. Спектральные и дифракционные характеристики открытых резонаторов.// Труды XI международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" Харьков–Херсон. – 2003. – С. 276–282.