

В.М. Куклин

Институт высоких технологий,

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,

пл. Свободы 4, Харьков 77, 61077, Украина.

Интерференционная природа формирования тонкой структуры лазерных импульсов и аномальных всплесков амплитуды колебаний в модели Лайтхилла

Содержание

1. Введение	177
2. Тонкая структура лазерных импульсов в режимах слабого превышения порога генерации	178
3. Формирование интерференционных всплесков при развитии модуляционной неустойчивости в модели Лайтхилла	180

Abstract

It is shown, that the pace of wave instability development is extremely reducing in the quasilinear stage. That stage realizes when the system has exceeded the instability threshold slightly and integrated intensity of the high-frequency oscillations (independently of the spectrum width) runs up to the bounded above value. The coherently locked (by pumping) phases of unstable modes can form the induced interference outburst. The amplitude of the outburst is proportionate to the width of instability spectrum and can reach the large value. The dynamics of discrete (the laser pulses formation) and continuous (the modulation instability of intensive monochromatic wave) instability spectra have been discussed. In the first case one could look the fine structure formation of laser pulse with great number of radiation burst. In the second case is realized a single outburst of the wave modulation. The several wave-length are placed within the range of such outburst. The width of the instability spectra are reduced with time, the systems right up to line spectrum formations and interference effects are weakened.

Keywords: the quasilinear stage of instability, the instability threshold, the induced interference outburst, the fine structure formation of the pulse.

1. Введение

Интерес к доминирующим в окружающей нас природе открытым нелинейным системам, то есть системам с излучением или поглощением энергии, вполне оправдан [1-6]. Много интересных особенностей в описании данных систем обсуждалось в работах [7-12]. Особый интерес проявляют к неравновесным открытым системам, которые находятся вблизи порога развития неустойчивостей [13-14]. Близость к порогу приводит не только к очевидному замедлению развития неустойчивости, но и к качественному изменению характера процесса.

Прежде всего, амплитуды мод возбуждаемых спектров остаются достаточно малыми и их взаимодействием на всех стадиях неустойчивости мож-

но пренебречь. Это обстоятельство позволяет исключить из рассмотрения множество видов взаимодействия мод, ответственных за движение энергии по спектру, а также значительно упрощает аналитическое описание, вследствие использования соответствующего малого параметра [15]. Не менее важным является появление, так называемой, квазилинейной стадии процесса, когда интегральная интенсивность мод спектра независимо от его ширины достигает некоторого порогового уровня D , при котором скорость изменения амплитуд всех мод резко замедляется [16,17]. Замедление обусловлено явлением ослабления (истощения) накачки за счет интегрального воздействия спектра неустойчивости и столь значительно, что способно на много порядков увеличить время развития процес-

са [14]. Следует подчеркнуть, что в обсуждаемых условиях лишь суммарное воздействие мод спектра способно привести к ослаблению накачки. При соответствующей нормировке изменение амплитуды возмущений для большинства открытых систем вблизи порога неустойчивости может быть описано уравнением вида

$$\frac{da(k_n)}{dt} = [\gamma_L(k_n) - \delta] \cdot a(k_n) - \sum_m |a(k_m)|^2 a(k_n), \quad (1)$$

причем, вблизи порога линейной неустойчивости $\gamma_L(k_n) \leq \gamma_{LMAX}$, и пороговая интенсивность, с которой реализуется квазилинейный режим (отметим, независимо от ширины спектра) порядка

$$\left(\sum_m |ak_m|^2\right)_{THR} = D \propto [\gamma_{LMAX} - \delta].$$

Величина $\gamma_{NL}(k_n) = \gamma_L(k_n) - \delta - \sum_m |a(k_m)|^2$ может быть определена как нелинейный инкремент (декремент) неустойчивости, причем на квазилинейной стадии процесса $|\gamma_{NL}| \ll \gamma_L - \delta$. Последнее сильное неравенство и обеспечивает затягивание квазилинейной стадии неустойчивости. Здесь же отметим, что $\sum_m |a(k_m)|^2 \ll \gamma_{LMAX}$, то есть амплитуды мод спектра остаются достаточно малыми, что позволяет ввести в рассмотрение соответствующий малый параметр.

На квазилинейной стадии из-за различия условий возбуждения или стартовых позиций (на момент реализации данной стадии) мод в результате их конкуренции периферийная часть спектра подавляется, а центральная его часть продолжает медленно расти. Это процесс в конечном итоге приводит к аномальному сужению спектральной ширины неустойчивости и формированию практически линейчатых спектров развитых пространственной структур [18], что в модуляционно-неустойчивых средах способно сформировать каскад неустойчивостей, порождающих самоподобные структуры [14,19].

В данной работе рассматривается поведение мод спектров неустойчивостей на квазилинейной стадии процесса неустойчивости. Медленное изменение амплитуд спектра и синхронизованная накачкой динамика фаз этих мод способны привести к формированию, так называемых, вынужденных (то есть, навязанных процессом неустойчивости) интерференционных всплесков, амплитуда которых может оказаться весьма значительной. Действительно, если условие реализации квазилинейной стадии независимо от спектральной ширины состоит в выполнении соотношения

$$\sum_m u_m^2 \propto N(\bar{u})^2 \propto D,$$

(где u_m амплитуда m -ой моды, \bar{u} – среднее значение амплитуды мод спектра, а D – пороговый

уровень интенсивности на квазилинейной стадии процесса неустойчивости), то средняя амплитуда спектра мод $\bar{u} \propto \sqrt{D}/\sqrt{N}$ и максимально достижимая амплитуда всплеска может достигнуть величины порядка $\sqrt{D \cdot N}$. Можно показать, что максимальные амплитуды вынужденных интерференционных всплесков пропорциональны квадратному корню отношения ширины спектра неустойчивости к ширине линии основной волны. С развитием неустойчивости ширина спектра убывает, при этом амплитуды возможных интерференционных всплесков также будет уменьшаться. Наличие таких всплесков является причиной формирования тонкой структуры пространственных возмущений на квазилинейном этапе развития неустойчивостей.

Рассмотрим два наиболее интересных случая. Первый случай формирования лазерного импульса соответствует дискретному спектру модуляции, тогда интерференционные всплески разной амплитуды многократно повторяются на длине импульса основного излучения, формируя его тонкую структуру. Второй случай, соответствующий модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды, отвечает непрерывному спектру возникающей модуляции, при этом интенсивные всплески оказываются достаточно редкими.

2. Тонкая структура лазерных импульсов в режимах слабого превышения порога генерации

Нелинейная система уравнений, описывающая возбуждение лазерного излучения в одномерном случае при слабой надпороговости при постоянной накачке может быть записана в виде (см., например, [14]).

$$\begin{aligned} \frac{de_n}{d\tau} + \kappa e_n - i\Delta_n e_n &= -ip_n, \\ \frac{dp_n}{d\tau} + \Gamma p_n &= i\mu e_n, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \Gamma_0(1 - \mu) - \text{Im} \sum_n e_n p_n^*, \end{aligned} \quad (2)$$

где e_n и p_n – пространственные моды безразмерных составляющих электрического поля и поляризации, μ – однородная составляющая инверсии заселенностей двухуровневой активной среды, Γ_0, Γ, κ – нормированные время релаксации инверсии, ширина линии и потери в резонаторе, причем условия слабонадпорогового случая сводятся к условиям $\text{Im}\omega \ll \Gamma, \kappa$ и $1 - \mu \ll \mu$, то есть, пространственными возмущениями инверсии можно пренебречь.

Линейная теория. При учете потерь максимум инкремента неустойчивости с возбуждением элек-

ромагнитных волн достигается при величине расстройке по частоте $\Delta_n = 0$, и при той же нормировке равен:

$$\text{Im}\omega_{max}/\text{Im}\omega_0 = \frac{1}{2} \left\{ [4\mu + (\kappa - \Gamma)^2]^{1/2} - (\kappa + \Gamma) \right\}, \quad (3)$$

где

$$\text{Im}\omega_0 = \left[2\pi \frac{\omega_0 D_0 |\rho_{21}|^2}{3\hbar} \right]^{1/2}$$

– инкремент при $\kappa = \Gamma = 0$, причем D_0 – равновесное значение инверсии заселенностей, ρ_{21} – матричный элемент атомного дипольного момента, ω_0 – частота перехода.

Адиабатическое приближение. Убедимся в том, что именно такой импульс будет сформирован в процессе неустойчивости. Для этого определим явный вид выражения для поля

$$E = E_0 \sum_n |e_n| \exp \{ -i\omega_0 t + ik_n x + i\varphi_n \}, \quad (4)$$

где

$$E_0 = \left\{ \frac{\hbar D_0 \omega_0}{8 \text{Im}\omega_0} \right\}^{1/2}$$

В условиях слабого превышения накачки порога неустойчивости, найдем значения медленной фазы поля из уравнения

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} = \Delta_n - \text{Re} \left(\frac{p_n}{e_n} \right),$$

которое следует из (2). За времена $\tau > \max(\kappa^{-1}, \Gamma^{-1})$ отношение

$$\frac{p_n}{e_n} \rightarrow (\delta_n + \kappa - i\Delta_n),$$

где $i\delta_n$ – поправка к безразмерной частоте $\omega/\text{Im}\omega_0$, причем

$$2\delta_n = -(\kappa + \Gamma - i\Delta_n) + \sqrt{4\mu + (\kappa - \Gamma - i\Delta_n)^2}.$$

Медленная фаза поля колебаний в этих условиях принимает вид

$$\varphi_n = \varphi_n|_{\tau=0} + (\Delta_n/2) \left[1 - \frac{\kappa - \Gamma}{\sqrt{4\mu - (\kappa - \Gamma)^2}} \right] \tau, \quad (5)$$

а поле колебаний можно представить в виде:

$$E = E_0 \exp \left\{ \frac{i\omega_0 t}{2} \left[1 + \frac{\kappa - \Gamma}{\sqrt{4\mu - (\kappa - \Gamma)^2}} \right] \right\} \times \sum_n |e_n| \exp \{ -ik_n(x - \nu_m t) + i\varphi_n|_{\tau=0} \}, \quad (6)$$

причем амплитуды каждой n -ной моды изменяются по закону

$$|e_n| = |e_n|_0 \exp \{ \text{Re}\delta_n \tau \}$$

$$\approx \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{4\mu + (\kappa - \Gamma)^2} - (\kappa + \Gamma) - \frac{\Delta_n^2}{\sqrt{4\mu + (\kappa - \Gamma)^2}} \right] \tau \right\}, \quad (7)$$

Таким образом, происходит формирование пространственной структуры огибающей волнового пакета – лазерного импульса. Однако из уравнения (6) можно получить лишь огибающую импульса, но трудно увидеть тонкую структуру импульса.

Тонкая структура лазерного импульса. В условиях слабой надпороговости уравнения (1) упрощаются и могут быть представлены в виде системы уравнений для медленных амплитуд и фаз

$$\frac{dA_n}{d\tau} = \left[1 - \Lambda_n^2 - \sum_m A_m^2 \right] A_n,$$

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = -\frac{\Lambda_n}{\delta} [1 - \delta^2 \Lambda_n^2], \quad (8)$$

где $E_n = A_n \exp \{ \alpha_n \tau \}$, $|e_n|^2 (\kappa/\Gamma_0) \frac{1}{\kappa+\Gamma} = |E_n|^2$,

$$\tau = -t \frac{\kappa + \Gamma}{\kappa\Gamma - 1}, \quad \delta^2 = \frac{1 - \kappa\Gamma}{(\Gamma^2 - 1)(\kappa + \Gamma)},$$

$$\Lambda_n^2 = \Delta_n^2 \frac{\Gamma^2 + 1}{(\kappa + \Gamma)(1 - \kappa\Gamma)}.$$

Заметим, что уравнения для медленных амплитуды и фазы волны в этом случае разделяются. В условиях медленного развития неустойчивости в её спектре остается много мод со сравнимыми амплитудами, медленные фазы которых изменяются со временем с разной скоростью. По этой причине возникают условия для интерференции, которая формирует квазипериодическую тонкую структуру колебаний [20]. Заметим, что эффект интерференции мод неустойчивого спектра в режиме слабого превышения над порогом неустойчивости был отмечен ранее в работе [17].

В условиях отражений в резонаторе формируется спектр, волновые числа которого принимают дискретные значения. Скорость изменения фазы каждой из мод спектра практически пропорциональна величине расстройки Δ_n (с учетом поправки $\propto \delta^2$), знак которой определяет направление вращения фазы. Каждая пара мод с номерами $\pm|n|$, амплитуды которых, как отмечалось ранее, одинаковы, в результате интерференции обеспечивает периодическую модуляцию основной волны с периодом $\propto 2\pi/\Lambda_n$. Наложение таких периодических модуляций формирует тонкую структуру импульса. Отметим, что начальные фазы каждой периодической модуляции распределены случайным

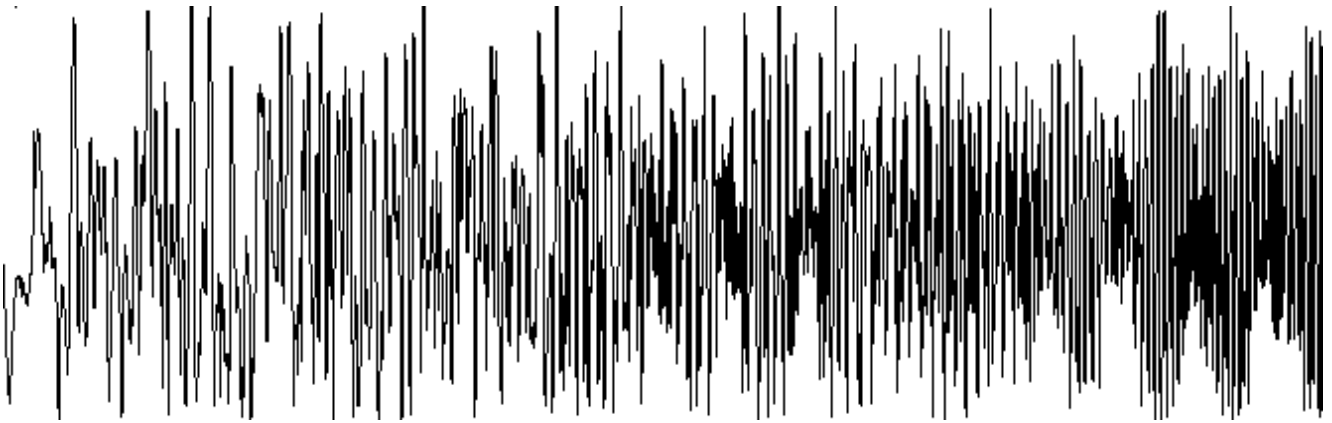


Рис. 1. Поведение амплитуды импульса (огibaющей) при изменении τ от 0 до 100. Число мод спектра $N=50$, $\delta = 0,35$ [20].



Рис. 2. Поведение амплитуды импульса (огibaющей) при изменении τ от 0 до 1000. Число мод спектра $N=50$, $\delta = 0,35$ [20].

образом и, кроме того, наличие второго слагаемого в правой части уравнения для α_n приводит к медленному сдвигу набора модуляций.

Отметим, также, что моды с большими значениями расстройки, обеспечивающие коротковолновую модуляцию, постепенно убывают и на больших временах система выходит на одномодовый режим генерации колебаний [21], что иллюстрирует (рис. 2).

3. Формирование интерференционных всплесков при развитии модуляционной неустойчивости в модели Лайтхилла

Модуляционная неустойчивость в слабо-надпороговом случае. Рассмотрим развитие неустойчивости в нелинейной волновой среде с кубической нелинейностью и с конечным уровнем по-

глощения (или излучения во внешнюю среду) волновой энергии. Будем полагать, что для медленно меняющихся комплексных амплитуд волновых возмущений справедливо уравнение Лайтхилла [22], описывающее распространение нелинейных волн:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA|A|^2 + g, \quad (9)$$

где δ – декремент затухания колебаний, g – внешний источник, поддерживающий монохроматическую волну конечной амплитуды A с волновым числом, равным $k = k_0$. Переменные t, x это соответствующим образом нормированные время и координата. Это уравнение, как и его обобщения (уравнения Гинзбурга-Ландау и уравнение Невела-Вайтхеда [23]), описывают в рамках определенных ограничений множество физических процессов, среди которых эволюция ветровых волн, неустойчивость Толмина-Шлихтинга в гидродинамических течениях, динамику волн концентрации при химических превращениях, многочисленные плазменные неустойчивости, нестабильность волн в средах с кубической нелинейностью и ряд дру-

гих явлений [24,25].

Ниже ограничимся одномерным случаем. Уравнение (9) можно представить также в виде

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = -\delta A_k + ik^2 A_k - i \int dk_1 dk_2 dk_3 A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \delta(k - k_1 - k_2 + k_3) + g, \quad (10)$$

где A_{k_i} – Фурье-образ амплитуды возмущения A .

Пусть основная мода $u_0 \exp\{i\varphi_0 - ik_0 x\}$, где $u_0 = A_{k_0}$, $\varphi_0 = \varphi_{k_0}$ – амплитуда и фаза волны. В этом случае, в результате неустойчивости возбуждаются спектры колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа основной моды конечной амплитуды, а ее амплитуда определяется из условия

$$u_0 = -g \left\{ -\delta - 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \sin \Phi_m \right\}^{-1} = 1 / \left\{ 1 + \frac{2}{\delta} \sum_{m>0}^N u_m^2 \sin \Phi_m \right\}, \quad (11)$$

причем, здесь и ниже суммирование проводится только по положительным $m, n = 1, 2, \dots, N$ кроме того $u_n = u_{-n}$ [15]. Будем также для упрощения расчетов полагать $\delta = g$. Фаза основной моды $n = 0$ в начальный момент равна нулю, и подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= +k_0^2 - \left[u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) \right] - 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos \Phi_n \\ &= +k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos \Phi_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Изменение амплитуд растущих мод $u_n \exp\{i\varphi_n - ik_n x\}$, которые связаны с основной волной (волной накачки) условиями пространственного синхронизма $2k_0 = k_n + k_{-n}$, где $k_n = k_0 + K_n, k_{-n} = k_0 - K_n (K_n > 0, K_n \ll k_0)$, задано уравнениями

$$\frac{du_n}{dt} = u_n \{-\delta + u_0^2 \sin \Phi_n\}. \quad (13)$$

Видно, что изменение знака n не меняет уравнение. Изменение фазы этих же мод

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = k_n^2 - 2 \left(u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 - \frac{1}{2} u_n^2 \right) - u_0^2 \cos \Phi_n. \quad (14)$$

Для расчетов нужно знать, как изменяется Φ_n (отметим, что Φ_0 не существует и $\Phi_n = \Phi_{-n}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_n}{dt} &= \frac{d}{dt} (2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) \\ &= \Delta_n + 2(u_0^2 - u_n^2) + 2 \left(u_0^2 \cos \Phi_n - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos \Phi_m \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Delta_n = 2k_0^2 - k_n^2 - k_{-n}^2$. Не трудно видеть, что $\Delta_n = -2K_n^2$.

Линейная теория. Прежде всего, отметим, что для реализации неустойчивости, по крайней мере, на начальной стадии фаза Φ_n каждого n -ного канала быстро принимает некоторое значение Φ_n^* , после чего она на линейной стадии процесса практически не меняется и начинается экспоненциальный рост амплитуд u_n и u_{-n} [15]. Действительно, пренебрегая малыми величинами из (15) найдем значение $\cos \Phi_n = \cos \Phi_n^* = (\Delta_n + 2u_0^2) / 2u_0^2$, тогда можно определить $\sin \Phi_n^* = (-\Delta_n^2 - 4\Delta_n u_0^2)^{1/2} / 2u_0^2$. Поэтому уравнение (10) в линейном приближении по амплитудам нарастающих мод принимает вид

$$\frac{du_n}{dt} = u_n \left\{ -\delta + \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta_n^2 - 4\Delta_n u_0^2} \right\}, \quad (16)$$

а линейный инкремент неустойчивости равен $\text{Im}\omega = -\delta + (-\Delta_n^2 - 4\Delta_n u_0^2)^{1/2} / 2$. При $\Delta_n = -2u_0^2$ инкремент достигает максимума, значение которого равно $(1 - \delta)$, разумеется в случае если поглощение энергии достаточно мало, то есть $0 < \delta < 1$. Интервал неустойчивости в пространстве волновых векторов определяется требованием $\text{Im}\omega > 0$ и задан неравенством $-2(1 + \sqrt{1 - \delta^2}) < \Delta_n < -2(1 - \sqrt{1 - \delta^2})$.

Система уравнений (11), (13), (15), описывает модуляционную неустойчивость в случае слабого превышения порога неустойчивости (то есть, при $1 - \delta \ll 1$), при этом фазы Φ_n находятся в окрестности Φ_n^* , которые в свою очередь медленно изменяются с ростом амплитуд возмущений и вследствие снижения уровня накачки. Уравнения (10) и (12) позволяют получить информацию о поведении фаз отдельных взаимодействующих мод. Заметим, что требование близости к порогу неустойчивости приводит к появлению малого параметра

$$\frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0}^N u_m^2, \quad (17)$$

который одновременно определяет и степень дефектности D возникающей пространственной структуры [14]. Наличие этого малого параметра позволяет заметно упростить вычисления и исключить из рассмотрения все взаимодействия, в которых не принимает участия основная волна [14,15].

Адиабатическое приближение. Для выяснения характера возникающей пространственной модуляции основной волны рассмотрим адиабатическое приближение, когда $\Phi_n = \Phi_n^*$ и изменением этой фазы пренебрежем. В этом случае, воспользовавшись наличием малого параметра (15), получим для $\cos \Phi_n, \sin \Phi_n$ следующие выражения

$$\begin{aligned} \cos \Phi_n &= -\frac{\Delta_n + 2(u_0^2 - u_n^2)}{2u_0^2}, \\ \sin \Phi_n &= \frac{(-\Delta_n^2 - 4u_0^2\Delta_n)^{1/2}}{2u_0^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом мы пренебрегли слагаемыми, пропорциональными

$$\frac{(\Delta_n + 2u_0^2)}{u_0^4} \sum_{m>0}^N u_m^2$$

так как $(\Delta_n + 2u_0^2)/2u_0^2 \ll 1$. Воспользовавшись этими представлениями тригонометрических величин, можно получить выражения для амплитуды

$$u_0 \approx \left\{ 1 - \frac{2}{\delta} \sum_{m>0}^N u_m^2 \right\}, \quad (19)$$

и уравнение для фазы основной волны

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &\approx +k_0^2 - u_0^2 + u_0^{-2} \sum_{m>0}^N (\Delta_m - 2u_0^2) u_m^2 \\ &\approx k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Для амплитуды и фазы каждой из неустойчивых мод справедливы следующие уравнения

$$\frac{du_n}{dt} = u_n \left\{ -\delta + \frac{\sqrt{-\Delta_n^2 - 4u_0^2\Delta_n}}{2} - \frac{4}{\delta} \sum_{m>0}^N u_m^2 \right\}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n}{dt} &= k_n^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 + \frac{\Delta_n}{2} \\ &= k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 + 2 \frac{n}{|n|} k_0 \sqrt{\frac{|\Delta_n|}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение для модулированной волны в режиме развитой неустойчивости этом случае может быть

представлено в виде

$$\begin{aligned} E(x, t) &= u_0 \exp \{-ik_0x + i\varphi_0(t)\} \\ &+ \sum_{m>0}^N \left[u_m \exp \{ik_mx + i\varphi_m(t)\} \right. \\ &\left. + u_{-m} \exp \{-ik_{-m}x + i\varphi_{-m}(t)\} \right] \\ &= \exp \{-ik_0x + i\varphi_0(t)\} \\ &\times \left[u_0 + \sum_{m>0}^N u_m \left(\exp \left\{ -i\sqrt{\frac{|\Delta_m|}{2}} \xi \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. + \exp \left\{ i\sqrt{\frac{|\Delta_m|}{2}} \xi + i\frac{\pi}{2} \right\} \right) \exp \{i\alpha_m\} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\xi = x - k_0t$, α – случайная начальная фаза. Таким образом, второе слагаемое (23) – модуляция основной волны, – представляет собой набор периодических возмущений с длинами волн, равными $2\pi/K_n = 2\pi\sqrt{2/|\Delta_n|}$, что в $k_0/K_n = \sqrt{2k_0^2/|\Delta_n|}$ раз больше длины основной волны. Важно отметить, что в данном приближении эти все возмущения не смещаются друг относительно друга.

Формирование интерференционных всплесков. Но если учесть, что в процессе неустойчивости, вообще говоря, фазы каждого из каналов неустойчивости медленно изменяются, то есть $d\Phi_n/dt \neq 0$, то появляется возможность столь же медленного относительного движения возмущений (второе слагаемое (23)) с разной длиной волны.

Действительно, учет изменения фазы канала Φ_n в уравнении (22) состоит в добавлении к его правой части слагаемого $-d\Phi_n/dt$. Из соотношения (18) можно оценить изменение фазы канала $d\Phi_n/dt \propto -d(u_n/u_0)/dt$. Отметим, что выражение (23) остается справедливым и в этом случае, если считать фазу α_n медленно меняющейся величиной, причем изменения которой пропорциональны $d(u_n/2u_0)/dt$.

Рассмотрим качественно процесс формирования всплеска. Из уравнения (21) следует, что линейный рост амплитуды колебаний прекращается, когда правая часть уравнения оказывается близка к нулю, при этом можно положить

$$2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \propto D, \quad (24)$$

где $D(\delta)$ – некоторая величина, меньшая единицы. Именно в этот момент формируется огибающая колебаний вида (23), представляющая собой сумму основной волны и набора длинноволновых возмущений, которые медленно смещаются относительно друг друга. При этом темп развития неустойчивости резко замедляется и происходит медленное уменьшение амплитуды периферийных (то есть,

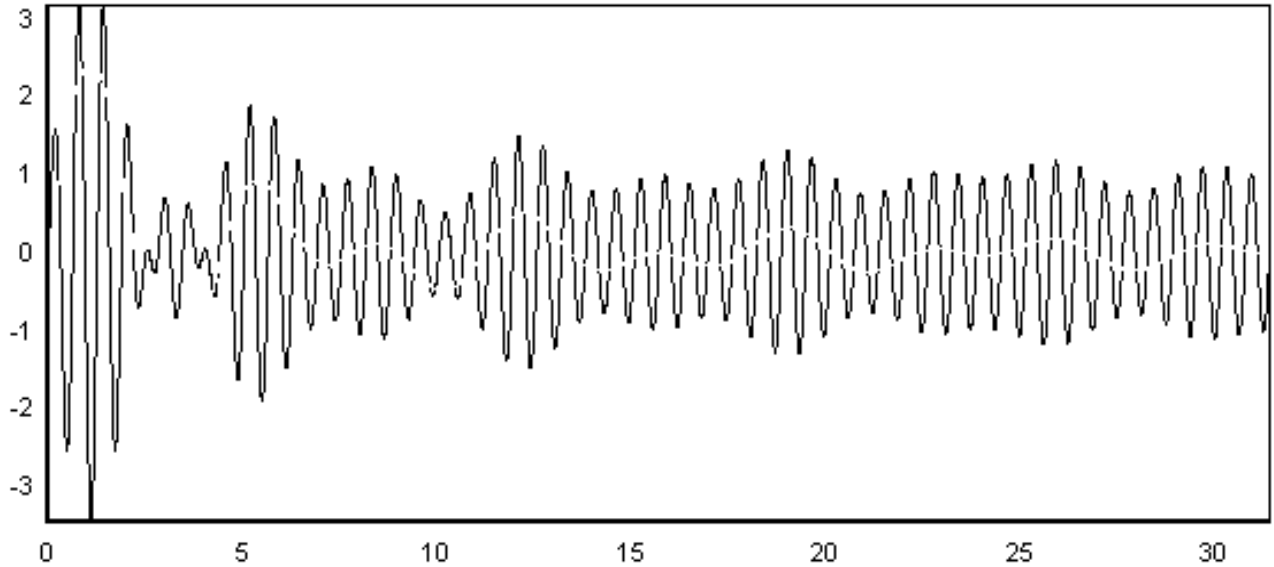


Рис. 3. Поведение амплитуды основной волны в окрестности всплеска модуляции при $D = 0,7$, интервал изменения x равен 31,4, волновой вектор основной волны $k_0 = 10$ волновой вектор центральной моды спектра модуляции $K_{N/2} = 1$, ширина спектра модуляции $\Delta K = 0,8$. Белая линия на рисунке соответствует амплитуде огибающей (модуляции) спектра неустойчивости (соответствует второму слагаемому в (23)).

мод в длинноволновой и коротковолновой части спектра модуляции - второе слагаемое (23) и медленный рост центральных мод спектра неустойчивости, который в целом постепенно сужается.

Весьма существенно, что в этом квазилинейном режиме неустойчивости отдельные моды спектра неустойчивости малы и взаимодействием их друг с другом можно пренебречь, но их суммарное воздействие на основную волну приводит к уменьшению её амплитуды. В свою очередь уменьшение амплитуды основной волны (которая служит накачкой для модуляционной неустойчивости), приводит к уменьшению эффективных инкрементов (то есть, речь идет о выражении в фигурной скобке правой части уравнения (21)) всех мод по сравнению с их линейными значениями. На периферии спектра неустойчивости эффективные инкременты при этом меняют знак и превращаются в декременты.

Важно отметить, что с уменьшением количества мод n (или ширины спектра $\Delta K \propto n$) модуляционной неустойчивости это соотношение сохраняет силу, то есть среднее значение амплитуды мод спектра растет. Это в случае дискретного набора мод можно записать как $2n \cdot (u^2)_{av} = D$ и $\bar{u} \propto \sqrt{(u^2)_{av}} \propto \sqrt{D/2n}$, при этом в определенных точках пространства может быть сформирован интерференционный всплеск модуляции с амплитудой порядка $n \cdot \bar{u} \propto \sqrt{n \cdot D/2}$. Таким образом, в начале квазилинейной стадии процесса, когда интенсивность спектра неустойчивости достигла максимума и ширина его еще достаточно велика, возможно появление интерференционных всплесков моду-

ляции, при которых амплитуда волны может достигать значений в несколько раз превышающих свою начальную амплитуду.

Для того, чтобы представить качественно характер всплеска в пространстве, можно аппроксимировать спектр модуляции в начале квазилинейной стадии (23) выражением

$$U^2 \propto \frac{D}{\Delta K} \exp\left(-2 \frac{|K - K_{N/2}|}{\Delta K}\right),$$

где $K_{N/2}$ - центральная мода спектра модуляции шириной ΔK , а U - спектральная плотность колебаний, при этом $u = U \cdot \delta K$, где δK - спектральная ширина моды колебаний при переходе к описанию дискретным набором мод. Приведенное выше соотношение соответствует выражению $2n \cdot (u^2)_{av} = D$. Для спектральной плотности колебаний получим

$$U \propto \sqrt{\frac{D}{\Delta K}} \exp\left(-\frac{|K - K_{N/2}|}{\Delta K}\right).$$

Амплитуда модуляции в случае интерференции возмущений в спектре модуляции может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{D}{\Delta K}} \int \exp\left(-\frac{|K - K_{N/2}|}{\Delta K}\right) \cdot \sin(K \cdot x) dK \\ = \sqrt{D \cdot \Delta K} \frac{\sin(K_{N/2} \cdot x)}{(\Delta K)^2 \cdot x^2 + 1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для модуляционной неустойчивости даже при небольшом превышении порога, ширина спектра

неустойчивости ΔK незначительно меньше волнового числа основной моды модуляции $K_{N/2}$, поэтому наиболее интенсивный интерференционный всплеск наблюдается практически лишь на одной длине модуляции $\Delta x \propto 1/\Delta K \propto 1/K_{N/2}$. Амплитуда всплеска модуляции пропорциональна

$$\sqrt{D \cdot n} \propto \sqrt{\frac{D \cdot \Delta K}{\delta K}},$$

то есть пропорциональна квадратному корню отношения ширины спектра модуляционной неустойчивости к ширине линии основной волны. Заметим, что при меньших δ значения D , ширина спектра ΔK (или n), а, следовательно, и амплитуда всплесков оказываются больше. С развитием неустойчивости ширина спектра модуляции ΔK и, соответственно, амплитуда вынужденного интерференционного всплеска модуляции (25) уменьшаются.

Обсудим теперь, как ведет себя промодулированная основная волна в окрестности всплеска модуляции. Можно оценить ширину области, где амплитуда модуляции велика, это величина порядка $1/\Delta K \propto 1/K_{N/2} \propto 10/k_0$ при $k_0 \propto 10K_{N/2}$, то есть эта область несколько больше одной длины основной волны. При $k_0 \propto 20K_{N/2}$ в области всплеска модуляции может быть несколько длин волн основных колебаний. Отметим, что в случае непрерывного спектра неустойчивости вынужденные интерференционные всплески будут весьма редкими.

Автор признателен С. Ю. Пузырькову за помощь в численном анализе динамики лазера и Е. Белкину за проведение расчетов, демонстрирующих качественное поведение амплитуды в квазилинейном режиме модуляционной неустойчивости.

Статья получена 19 декабря 2005

Список литературы

- [1] Николис. Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1978. – 512 с.
- [2] Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 419 с.
- [3] Кернер Б.С., Осчилов В.В. Самоорганизация в активных средах (сценарии спонтанного образования эволюции диссипативных структур) // УФН. 1990, т.160, в.9, С.1–73.
- [4] Климонтович Ю.Л. Энтропия и информация открытых систем // УФН, 1999, т.169, в.4, С.443–452.
- [5] Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С. Кинематика автоволновых структур в возбудимых средах // УФН, 1991, т.161, в.8, С.45–85.
- [6] Барьяхтар В.Г. Феноменологическая теория релаксационных процессов в магнетиках // в кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Под ред. В.Г. Барьяхтара, В.Е. Захарова, В.М. Черноусенко. Сб. науч. тр. Киев, Наукова Думка, 1990. – 472с.
- [7] Popp S., Stiller O., Kuznetsov E., Kramer L. The cubic complex Ginsburg-Landau equation for a backward bifurcation // Physica D, 1998, V.114. P. 81–107.
- [8] Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave-break wave // Pis'ma v ZhETF v.81, iss.6, P.318–322.
- [9] Зейтунян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // УФН, т.165, в.11, С.1403–14–56.
- [10] Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН, 1995, т.165, в.9, С.1011–1035.
- [11] Федоров М.В. Стабилизация атомов в сильном лазерном поле // УФН, 1999, т.169, в.1., С.66–71.
- [12] Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.П. Двумерные квазипериодические структуры в неравновесных системах // ЖЭТФ, 1989, Т.96, С.684–699.
- [13] Трибельский М.И. Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией // УФН, 1997, т.167, в.2, С.167–190.
- [14] Куклин В.М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах // УФЖ. Обзоры. т.1, в.1, С.49–81.
- [15] Воробьев В.М., Куклин В.М. О механизме возникновения пространственных структур в диссипативных неравновесных средах // Письма в ЖТФ, 1987, т.13, № 22, С.1354 – 1360.
- [16] Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P., Vorob'ev V.M. Space Dissipative Structures // Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. in Phys.), Singapore, World Scientific 1990, P.776–803.
- [17] Черноусенко В.М., Куклин В.М., Панченко И.П. Структуры в неравновесных средах. В кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр // АН УССР. Ин-т теорет. физики; Отв. ред. Барьяхтар В.Г., Захаров В.Е., Черноусенко В.М., – Киев, Наук. думка, 1990, – 472с.

- [18] Куклин В.М., Киричок А.В., Куклина О.В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде // Вопросы атомной науки и техники. 2000, № 1, С.222–224.
- [19] Куклин В.М. Образование самоподобных пространственных структур в модуляционно-неустойчивых средах // Электромагнитные явления. т.4, № 1 (13), 2004 г. С.85–100.
- [20] Куклин В.М. Пузырьков С.Ю. Об одном механизме формирования тонкой структуры лазерных импульсов // Вістник ХНУ ім. В.Н.Каразіна (в печати).
- [21] Kuklin V.M. and Panchenko I.P. Nonlinear structure formation in dissipative media // Plasma Physics Reports, 1994. 20, n.9, P.813–823.
- [22] Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // J. Inst. Math. Appl.– 1965.–V.1, N.2.– P.269–306.
- [23] Newell A.C. Solitons and Condensed Matter Physics (Bishop and Schneider, Eds). – Berlin: Springer, 1978.– 520p.
- [24] Rasmussen J.J. Rørdal K. Blow-up in nonlinear Schroedinger equations – I. A. General Review // Physica Scripta.– 1988. V.33, N.2.– P.481–497.
- [25] K.H. Spatschek et al. On the role of soliton solutions in temporal chaos: examples for plasmas and related systems, Proc. Int. Conf.: Singular Behavior and Nonlinear Dynamics, 1988, v.2, World Scientific, 555p.