

Интеграл Бернулли для непотенциальных сил. МГД приложения

Содержание

1	Введение	195
2	Постановка задачи	195
2.1	Напряжения Рейнольдса	195
2.2	Интеграл Бернулли для непотенциальных сил	195
2.3	Основные уравнения	196
3	Разные формы МГД-уравнений	196
4	Граничные задачи	197
4.1	Операция \mathbf{f}^*	198
5	МГД-обтекание эллипсоида	199
5.1	Каноническая форма граничных задач	202
5.2	Прямое произведение векторов	203
5.3	Канонические граничные задачи (продолжение)	204
6	МГД-потенциалы	204
7	Гидроэлектромагнитное воздействие	207
8	Парадокс	
	Эйлера-д'Аламбера	207
9	Сфера	207
10	Выводы	209

Abstract

The Euler equations with an isotropic turbulent resistance being determinable by the Reynolds stresses have the Bernulli integral in that event when the fluid undergoes the impact of non-potential body forces. This kind of integral is employed for formulation of the problems of MHD flowaround for non-conductive bodies in the inductive approximation in constant applied magnetic field. The appropriate problems are reduced to integration of the set of Neumann external boundary problems concerning the Laplace equation for electric and hydrodynamic potentials. A new operation of the vector analysis has been determined: the direct product of several vectors. Employing this operation facilitates radically solution of the sets of linear algebraic equations, simplifies computations made with the scalar, vector and mixed vectors products, makes easier the writing of sophisticated vector expressions, etc. A problem is now solved for the MHD conductive fluid flow running around the ellipsoid in magnetic field. A hydroelectromagnetic force expression is formulated for the effect of the flow on the ellipsoid. In the absence of electromagnetic field, this force determines the action on the ellipsoid of a conventional circulation-free turbulent flow thereby removing the Euler-d'Alambert paradox, since in the absence of the field the current of the fluid is potential.

1 Введение

Магнитогидродинамические задачи являются предметом активного изучения отечественных и зарубежных специалистов [1, 2]. Но в технической магнитной гидродинамике существует недостаток, связанный с использованием безиндукционного приближения, в котором не учитывается обратного влияния потока жидкости на электрический ток [1]. В настоящей работе указанный недостаток устранён для той части магнитной гидродинамики, которая исследует обтекание тел проводящим потоком жидкости при больших гидродинамических числах Рейнольдса во внешнем магнитном поле. Исходными в работе являются уравнения Эйлера с турбулентным сопротивлением [3], которое формализует метод напряжений Рейнольдса для моделирования турбулентных потоков жидкости. На основании таких уравнений выводится полная система уравнений, моделирующая турбулентный поток жидкости в индукционном приближении. Система уравнений используется для точного решения задачи обтекания произвольного эллипсоида проводящей электрический ток жидкости во внешнем магнитном поле. Ориентация индукции магнитного поля относительно осей эллипсоида произвольна. Как частный случай решена задача об обтекании эллипсоида невязким непроводящим ток потоком жидкости в отсутствие магнитного поля. Это значит, что уравнения Эйлера с турбулентным сопротивлением свободны от парадокса Эйлера-д'Аламбера.

2 Постановка задачи

2.1 Напряжения Рейнольдса

Используемый в настоящее время метод исследования турбулентных течений жидкостей основан на осреднении скорости и давления в уравнениях Навье-Стокса. Такой метод не формализован, поскольку возникающие при осреднении напряжения Рейнольдса в каждой задаче определяются на основании не стандартных полуэмпирических гипотез ограниченного масштаба действия. Возможный способ формализации метода напряжений Рейнольдса [4] основывается на том, что, по принципу Галилея, дивергенция тензора напряжений Рейнольдса является функцией относительной скорости жидкости. В таком случае в первом приближении отнесённая к плотности жидкости ρ дивергенция тензора Π напряжений Рейнольдса пропорциональна относительной скорости жидкости:

$$\operatorname{div}\Pi = -\rho\kappa_{ij}(v_j - V_j). \quad (2.1)$$

Вектор $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ равен скорости сосуда с жидкостью, или равен скорости жидкости на

бесконечности, если её объём не ограничен замкнутой поверхностью. Коэффициенты κ_{ij} турбулентного сопротивления определяются экспериментально. После введения напряжений (2.1) в уравнения Навье-Стокса, последние превращаются в диссипативную систему, отягощённую анизотропным турбулентным сопротивлением [5]:

$$v_{i,4} + v_j v_{i,j} = -\rho^{-1} p_{,i} + \nu v_{i,jj} - \kappa_{ij}(v_j - V_j) + f_i, \quad v_{j,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Свойства решений уравнений Навье-Стокса с турбулентным сопротивлением $\kappa_{ij}(V_j - v_j)$ отличаются от свойств решений стандартных уравнений Навье-Стокса большей приближенностью решений к моделированию течений реальных жидкостей. На первый план выступают пограничные слои и ядра течений жидкостей. Переход от ламинарных течений $|\kappa| \ll 1$ к течениям турбулентным связан с возникновением странных аттракторов и неустойчивых предельных циклов с диссипацией энергии¹ — этот процесс моделирует известное из наблюдений разрушение турбулентных флуктуаций со временем. И многое другое. Подход (2.1) предпочтительнее классического, так как метод формализован и, поэтому, применим к моделированию любых течений и так как в качестве уточняемого решения при $\kappa_{ij} \neq 0$ сразу выступают характеристики основного (осреднённого методом Рейнольдса) турбулентного потока.

Турбулентное сопротивление в динамике идеальной жидкости введено Дж. Б. Эри (1845 г.) и лордом Рэлеем (1883 г.) [6]. В настоящее время уравнения (2.2) используются в задачах физики атмосферы и океана [7, 8, 9].

Если сопротивление изотропно, то $\kappa_{ii} = \kappa > 0$, $\kappa_{ij} = 0$, $i \neq j$. Уравнения (2.2) апробированы в [3, 5].

2.2 Интеграл Бернулли для непотенциальных сил

Исходим из уравнений Эйлера, в которых включено изотропное турбулентное сопротивление (уравнения (2.2) при $\nu = 0$):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \left(\kappa \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{f} - \kappa \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

\mathbf{V} — скорость жидкости на бесконечности. Уравнения (2.3) обладают замечательным свойством: они имеют интеграл Бернулли в случае непотенциальных внешних массовых сил. *Доказательство.* Можно считать, что $\mathbf{f} - \kappa \mathbf{v}$ — потенциальный вектор, так как непотенциальную часть массовых сил \mathbf{f} в данном случае можно включить в вектор скорости \mathbf{v} . В самом деле, представим $\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{F}$

¹Доказательство опускаем.

и ищем скорость в виде $\mathbf{v} = \nabla\varphi_1 + \nabla \times \mathbf{w}$. Тогда $\mathbf{f} - \kappa\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{F} - \kappa\nabla\varphi_1 - \kappa\nabla \times \mathbf{w}$. Подчиним искомый вектор \mathbf{w} условию $\kappa\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{F}$. Тогда разность векторов $\mathbf{f} - \kappa\mathbf{v} = \nabla(\Phi - \kappa\varphi_1) = -\nabla\varphi$. Поэтому

$$\kappa\mathbf{v} = \nabla\varphi + \mathbf{f} \quad (2.4)$$

и $\nabla \times \mathbf{v} = \kappa^{-1}\nabla \times \mathbf{f} \neq 0$, если $\mathbf{f} \neq \nabla F$. Если движение установившееся, то уравнения (2.3) в силу (2.4) имеют интеграл Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varphi - \kappa\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = const, \quad (2.5)$$

а уравнение неразрывности (2.3) для определения потенциальной части скорости в (2.4) даёт

$$\nabla^2\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{f}. \quad (2.6)$$

2.3 Основные уравнения

Заданы постоянные $\mathbf{V} = V\mathbf{V}^0$ — скорость жидкости на бесконечности, $\mathbf{B}_0 = B_*\mathbf{B}^0$ — индукция внешнего магнитного поля, σ — электропроводность жидкости, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, \mathbf{B}' , \mathbf{E}' , \mathbf{j}' — магнитная индукция, напряжённость и плотность электротока в движущейся жидкости, L_* — характерный размер. В безразмерных переменных

$$\mathbf{r}' = L_*\mathbf{r}, \quad \mathbf{B}' = B_*\mathbf{B},$$

$$\mathbf{j}' = B_*L_*^{-1}\mathbf{R}\mathbf{j}, \quad \mathbf{E}' = VB_*\mathbf{E},$$

$$\mathbf{v}' = V\mathbf{v}, \quad p' = \rho V^2 p, \quad S = \sigma B_*^2 L_* (\rho V)^{-1},$$

$$\mathbf{R} = \mu_0 \sigma V L_*, \quad \lambda^2 = \kappa L_* V^{-1} \quad (2.7)$$

(S — число Стюарта, \mathbf{R} — магнитное числа Рейнольдса) взаимодействие жидкости с магнитным полем \mathbf{B}_0 при больших гидродинамических числа Рейнольдса в установившемся режиме описываем системой уравнений Эйлера с силой Лоренца и с турбулентным сопротивлением, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \lambda^2(\mathbf{v} - \mathbf{V}^0) + S\mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.10)$$

Из (2.4) и (2.5) находим скорость и давление жидкости в МГД-потоке:

$$\lambda^2\mathbf{v} = \nabla\varphi + S\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

$$p = \lambda^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - \varphi - \frac{v^2}{2} + const, \quad (2.12)$$

где функция φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -S\nabla(\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (2.13)$$

При этом уравнения (2.8) выполнены (см. (2.6)). Исключим напряжённость \mathbf{E} из уравнения (2.10) с помощью (2.9):

$$\nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.14)$$

Полная индукция магнитного поля в рассматриваемом процессе

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{R}\mathbf{b}, \quad (2.15)$$

где \mathbf{b} — индукция наведённого магнитного поля. Плотность наведённого тока из формул (2.9)

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b}, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (2.16)$$

Введём (2.15) в (2.10), (2.11), (2.13) и (2.14). Тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}^0 - \mathbf{R}\mathbf{v} \times \mathbf{b},$$

$$\lambda^2\mathbf{v} = \nabla\varphi + S\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0 + \mathbf{R}S\mathbf{j} \times \mathbf{b},$$

$$\nabla^2\varphi = -S\nabla(\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0) - \mathbf{R}S\nabla(\mathbf{j} \times \mathbf{b}),$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}^0) + \mathbf{R}\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}).$$

В приложениях величина $\mathbf{R}S$ мала [1]. Поэтому в первом приближении исходим из системы

$$\lambda^2\mathbf{v} = \nabla\varphi + S\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0, \quad (2.17)$$

$$\nabla^2\varphi = -S\mathbf{B}^0(\nabla \times \mathbf{j}), \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}^0), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}^0. \quad (2.20)$$

В практике МГД уравнение (2.19) опускают, заменяя его уравнением $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ [1, 2]. Такая модель называется «безиндукционным приближением». В системе (2.16) – (2.20) такой подход неосуществим, так как без вихря плотности тока, т. е., по (2.16), без наведённого магнитного поля, из (2.18) неверно определяется функция φ , характеризующая потенциальную часть скорости в (2.17). Поэтому наведённым магнитным полем в данном приближении пренебречь нельзя. Это означает, что приближение (2.16) – (2.20) *индукционное*.

3 Разные формы МГД-уравнений

Пусть $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{B}^0 = const$. Тогда

$$\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0) = \nabla(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}^0) - \mathbf{B}^0 \times (\nabla \times \mathbf{j}). \quad (3.1)$$

Обратимся к уравнению (2.19).

Вначале из (2.17) и (3.1) находим

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^0 = \lambda^{-2}\mathbf{B}^0 \cdot \nabla\varphi,$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{S}{\lambda^2} \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0) \\ &= \frac{S}{\lambda^2} \left[\nabla(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}^0) - \mathbf{B}^0 \times (\nabla \times \mathbf{j}) \right],\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}^0) &= \frac{1}{\lambda^2} \nabla(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla \varphi) - \frac{S}{\lambda^2} |\mathbf{B}^0|^2 \nabla \times \mathbf{j} \\ &\quad - \frac{S}{\lambda^2} \left[\mathbf{B}^0 \times \nabla(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}^0) - \mathbf{B}^0(\mathbf{B}^0 \cdot (\nabla \times \mathbf{j})) \right]\end{aligned}$$

и из (2.19) имеем уравнение для определения плотности тока \mathbf{j} через φ :

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + S|\mathbf{B}^0|^2) \nabla \times \mathbf{j} + S[\mathbf{B}^0 \times \nabla(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}^0) \\ - \mathbf{B}^0(\mathbf{B}^0 \cdot (\nabla \times \mathbf{j}))] = \nabla(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla \varphi).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Уравнение для φ получим умножением (3.3) скалярно на $S\mathbf{B}^0$ (см. (2.18)):

$$\lambda^2 \nabla^2 \varphi + S\mathbf{B}^0 \cdot \nabla(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla \varphi) = 0.\quad (3.4)$$

Далее из (2.9) и (2.20)

$$\mathbf{E} = -\nabla \psi, \quad \nabla^2 \psi = \mathbf{B}^0 \cdot (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Умножим (3.2) скалярно на \mathbf{B}^0 . После простых преобразований для определения функции ψ получаем уравнение

$$\lambda^2 \nabla^2 \psi + S\mathbf{B}^0 \cdot \nabla(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla \psi) = 0.\quad (3.5)$$

Выразим скорость \mathbf{v} из (2.17) и плотность тока \mathbf{j} через φ и ψ . Из (2.20) находим

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0 = \mathbf{B}^0 \times (\nabla \psi) - \mathbf{v} |\mathbf{B}^0|^2 + \mathbf{B}^0(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{v}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + S|\mathbf{B}^0|^2) \mathbf{v} - S\mathbf{B}^0(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{v}) = \nabla \varphi + S\mathbf{B}^0 \times (\nabla \psi), \\ \mathbf{j} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}^0 - \nabla \psi.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Если исследование ведётся в декартовых координатах, ось Ox которых направлена по единичному вектору \mathbf{B}^0 приложенного магнитного поля ($\mathbf{B}^0 = \mathbf{x}^0 = \mathbf{i}$), то проекции векторов (3.6) на оси такой системы

$$\begin{aligned}\lambda^2 v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\lambda^2 + S)v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - S \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ (\lambda^2 + S)v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + S \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \lambda^2 j_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\lambda^2 + S)j_y = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ (\lambda^2 + S)j_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

В этой же системе координат уравнения (3.4) и (3.5) имеют вид

$$(\lambda^2 + S) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.\quad (3.8)$$

Если по условию в первую очередь требуется информация о наведённом магнитном поле, то задачу следует решать в терминах $\varphi - \mathbf{b}$. Нужные уравнения получим из формул (2.16) и (3.6). В данном случае

$$\nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = -\nabla^2 \mathbf{b}$$

и

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + |\mathbf{B}^0|^2) \nabla^2 \mathbf{b} - S[\mathbf{B}^0 \times \nabla(\mathbf{B}^0 \cdot (\nabla \times \mathbf{b})) \\ + \mathbf{B}^0(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla^2 \mathbf{b})] = -\nabla(\mathbf{B}^0 \nabla \varphi).\end{aligned}\quad (3.9)$$

где функция φ удовлетворяет уравнению (3.4). В таких задачах обычно известно поведение магнитного поля на поверхностях, ограничивающих поток плазмы. Соответствующие граничные условия вместе с формулой (2.11), т. е. формулой

$$\lambda^2 \mathbf{v} = \nabla \varphi - S\mathbf{B}^0 \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

дают возможность корректно поставить задачу для уравнения (3.1) и последнего уравнений и определить наведённое поле, минуя определение наведённых токов и поля электрического. Все уравнения выведены в инвариантной форме и справедливы в любой системе координат. Это удобно при численном решении задач магнитной гидродинамики в криволинейных координатах.

4 Граничные задачи

Формулируем граничные условия для уравнений (3.8) для функций φ и ψ . Пусть

$$\mathbf{V}^0 = \mathbf{x}^0 \cos \alpha + \mathbf{y}^0 \cos \beta + \mathbf{z}^0 \cos \gamma$$

— скорость потока на бесконечности. Она определена не по отношению к особенностям обтекаемого тела Σ (симметрия, углы атаки и т. п.), а по отношению к осям, связанным с приложенным полем $\mathbf{B}^0 = \mathbf{x}^0$. На бесконечности формула (2.17) в предположении, что наведённый ток исчезает с удалением от тела², даёт

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\infty} = \lambda^2 \cos \alpha, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\infty} = \lambda^2 \cos \beta, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\infty} = \lambda^2 \cos \gamma.\end{aligned}\quad (4.1)$$

На поверхности Σ

$$v_n \Big|_{\Sigma} = v_x \cos(\mathbf{n}, x) + v_y \cos(\mathbf{n}, y) + v_z \cos(\mathbf{n}, z) \Big|_{\Sigma} = 0.$$

²Физически ясно, что тело в потоке может изменить электромагнитное поле, в том числе и наведённый электрический ток, только в своей окрестности, но не на бесконечности.

\mathbf{n} — нормаль к поверхности Σ . В силу (3.7) это условие имеет вид

$$\frac{\cos(\mathbf{n}, x)}{\lambda^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\lambda^2 + S} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - S \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\cos(\mathbf{n}, z)}{\lambda^2 + S} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + S \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{\Sigma_\zeta} = 0. \quad (4.2)$$

Задачу (3.8) – (4.2) удобнее решать в переменных ξ, η, ζ :

$$x = \xi \sqrt{\lambda^2 + S}, \quad y = \lambda \eta, \quad z = \lambda \zeta. \quad (4.3)$$

В этих переменных уравнение (3.8) — уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (4.4)$$

условия на бесконечности (4.1) имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\infty} = \lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S} \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\infty} = \lambda^3 \cos \beta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \Big|_{\infty} = \lambda^3 \cos \gamma, \quad (4.5)$$

а граничные условия (4.2) формулируются на поверхности

$$\Sigma_\zeta = \Sigma_\zeta(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma(\xi \sqrt{\lambda^2 + S}, \lambda \eta, \lambda \zeta) = \Sigma(x, y, z) \quad (4.6)$$

и на поверхности Σ_ζ имеют вид

$$\frac{\cos(\mathbf{n}, x)}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\lambda^2 (\lambda^2 + S)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - S \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\cos(\mathbf{n}, z)}{\lambda^2 (\lambda^2 + S)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + S \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.7)$$

В условии (4.7) нужно выразить направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к поверхности Σ через направляющие косинусы нормали \mathbf{n}_ζ к образу Σ_ζ поверхности Σ в результате преобразования (4.3). Из (4.6) и (4.3) имеем

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + S}} \frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial y} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \zeta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\mathbf{n}, x) = \mathcal{G} \frac{\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \zeta}\right)^2}},$$

$$\mathcal{G} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_\zeta}{\partial \zeta}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z}\right)^2}}.$$

Таким образом (и далее по аналогии),

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \mathcal{G} \frac{\cos(\mathbf{n}_\zeta, \xi)}{\sqrt{\lambda^2 + S}}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \mathcal{G} \frac{\cos(\mathbf{n}_\zeta, \eta)}{\lambda},$$

$$\cos(\mathbf{n}, z) = \mathcal{G} \frac{\cos(\mathbf{n}_\zeta, \zeta)}{\lambda}$$

и условие (4.7), после сокращения на

$$\mathcal{G} \lambda^{-2} (\lambda^2 + S)^{-1},$$

принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cos(\mathbf{n}_\zeta, \xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cos(\mathbf{n}_\zeta, \eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \cos(\mathbf{n}_\zeta, \zeta) \Big|_{\Sigma_\zeta} = S \left[\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cos(\mathbf{n}_\zeta, \eta) - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cos(\mathbf{n}_\zeta, \zeta) \right] \Big|_{\Sigma_\zeta}.$$

4.1 Операция \mathbf{f}^*

В квадратных скобках в последнем выражении стоит проекция вихря вектора $\boldsymbol{\psi}^* = \{\psi, 0, 0\}$ на нормаль к поверхности Σ_ζ . Ниже под оператором $\boldsymbol{\psi}^*$ понимаем переход от функции ψ к однокомпонентному вектору $\{\psi, 0, 0\}$, а под символом $\boldsymbol{\psi}^*$ — сам однокомпонентный вектор, направленный по орту $\boldsymbol{\xi}^0$, соответствующему направлению магнитного поля \mathbf{B}^0 после преобразования (4.3). Тогда исследуемое граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = S (\nabla \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \quad (4.8)$$

Индекс ζ у нормали \mathbf{n}_ζ к поверхности Σ_ζ здесь и ниже опускаем. Функция $\psi(x, y, z)$ ($\nabla \psi = -\mathbf{E}$) удовлетворяет, как и φ , уравнению (3.8). Условия на бесконечности для ψ получим из (2.20) ($\mathbf{j}(\infty) = 0$). В переменных ξ, η, ζ функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа (4.4) и условиям:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\infty} = \lambda \cos \gamma, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \Big|_{\infty} = -\lambda \cos \beta. \quad (4.9)$$

Условия на поверхности Σ_ζ для функции ψ сформулируем для случая, когда поверхность Σ не проводит электрический ток. Тогда [2] на поверхности Σ нормальная компонента $j_n = 0$. С учётом (3.7)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \left(\lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\lambda^2 + S} + \left(\lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\cos(\mathbf{n}, z)}{\lambda^2 + S} \Big|_{\Sigma} = 0.$$

В переменных ξ, η, ζ на поверхности Σ_ζ

$$\lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = (\nabla \times \varphi^*) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \quad (4.10)$$

Граничные задачи (4.4), (4.8), (4.10) однородны. Неоднородность условий для φ и ψ содержится в (4.7), (4.9). Если известен потенциал скорости обтекания поверхности Σ_ζ потоком идеальной жидкости при любом направлении скорости потока на бесконечности, то неоднородность задачи переносится в граничные условия на поверхности Σ_ζ . Введём вектора

$$\mathbf{U} = \left(\xi^0 \sqrt{\lambda^2 + S} \cos \alpha + \lambda \eta^0 \cos \beta + \lambda \zeta^0 \cos \gamma \right),$$

$$\mathbf{W} = \lambda (\eta^0 \cos \gamma - \zeta^0 \cos \beta) \quad (4.11)$$

и обозначим через Φ_1 и Ψ_1 потенциалы скорости обтекания поверхности Σ_ζ потоками жидкости со скоростями \mathbf{U} и \mathbf{W} на бесконечности соответственно. Такие потенциалы являются решением граничных задач

$$\begin{aligned} \nabla^2 \{\Phi_1, \Psi_1\} &= 0; \quad \nabla \Phi_1 \Big|_{\infty} = \mathbf{U}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = 0, \\ \nabla \Psi_1 \Big|_{\infty} &= \mathbf{W}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая далее $\varphi = \Phi + \Phi_1, \psi = \Psi + \Psi_1$, из (4.4), (4.5), (4.8) – (4.12) для Φ и Ψ в переменных ξ, η, ζ получим такие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0; \quad \nabla \Phi \Big|_{\infty} = 0, \quad \nabla \Psi \Big|_{\infty} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= S \left[\nabla \times (\Psi^* + \Psi_1^*) \right] \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= \left[\nabla \times (\Phi^* + \Phi_1^*) \right] \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Необходимое условие разрешимости рассматриваемых внешних задач Неймана для уравнения Лапласа выполнено, так как по теореме Гаусса-Остроградского (D – внешность поверхности Σ_ζ)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Sigma_\zeta &= S \int_{\Sigma_\zeta} \left[\nabla \times (\Psi^* + \Psi_1^*) \right] \cdot \mathbf{n} \delta \Sigma_\zeta \\ &= S \int_D \nabla \cdot \left[\nabla \times (\Psi^* + \Psi_1^*) \right] \delta D = 0. \end{aligned}$$

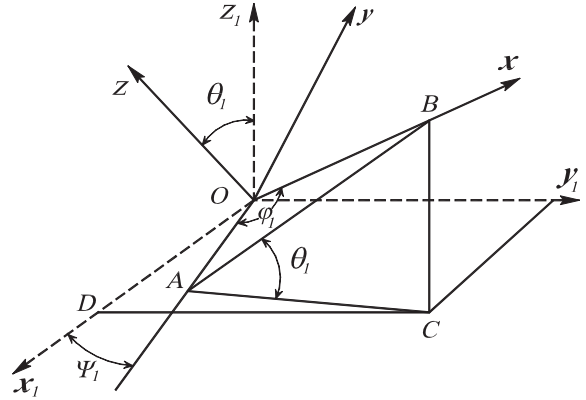


Рис. 1. Углы Эйлера.

Охарактеризуем воздействие потока жидкости на тело Σ' . В общих формулах [4] используем интеграл (2.5). В безразмерных переменных (2.7) сила воздействия \mathbf{R} и опрокидывающий момент \mathbf{M}

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}}{\rho V^2 L_*^2} &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad \frac{\mathbf{M}}{\rho V^2 L_*^3} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{R}_1 &= \int_{\Sigma} \varphi \mathbf{n} \delta \Sigma - \lambda^2 \Omega_{\Sigma} \mathbf{V}^0, \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 \mathbf{n} \delta \Sigma, \quad \mathbf{M}_1 = \int_{\Sigma} \varphi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \delta \Sigma, \\ \mathbf{M}_2 &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \delta \Sigma, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где Ω_{Σ} – объём обтекаемого тела. Гидродинамическое давление p выписано в (2.12). Природа силы \mathbf{R}_1 и момента \mathbf{M}_1 турбулентна.

5 МГД-обтекание эллипсоида

Решим частный случай сформулированной граничной задачи. Определим потенциальную часть скорости, потенциал электрического тока и воздействие потока проводящей электрический ток невязкой жидкости в магнитном поле на непроводящий электроток эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad (5.1)$$

записанный в безразмерных переменных. Масштаб длины L_* – его большая полуось. Но для симметрии формул она в (5.1) не выделяется. Формулируем задачи (4.12), (4.13) для поверхности (5.1). В осях $Ox_1y_1z_1$ вектор

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{x}_1^0 \cos \alpha_1 + \mathbf{y}_1^0 \cos \beta_1 + \mathbf{z}_1^0 \cos \gamma_1$$

составляет углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ с большей, средней и меньшей осями эллипсоида. Чтобы вместо сложных уравнений (3.4), (3.5) «работало» уравнение (3.8), выберем новые оси координат $Oxyz$ так, чтобы вектор \mathbf{B}^0 был направлен по оси Ox . Для описания соответствующего вращения пространства $Ox_1y_1z_1$ вокруг полюса O нужно иметь выражения направляющих косинусов $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ вектора \mathbf{B}^0 в осях $Ox_1y_1z_1$ через углы Эйлера $\psi_1, \varphi_1, \theta_1$, связывающих эти оси с осями $Oxyz$ (рис. 1). На рисунке отрезок $OB = 1, OD = \cos \alpha_1, OE = \cos \beta_1, BC = \cos \gamma_1, OA$ — линия узлов ($OA \perp Oz_1, OA \perp Oz$), $CA \perp OA, BA \perp OA, OA = \cos \varphi_1, AB = \sin \varphi_1, AC = \sin \varphi_1 \cos \theta_1, BC = \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \angle COA = \chi_1, \operatorname{tg} \chi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \theta_1, \angle COD = \psi_1 + \chi_1, OC = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \chi_1}, OD = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \chi_1} \cos(\psi_1 + \chi_1), OE = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \chi_1} \sin(\psi_1 + \chi_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \varphi_1 \cos \psi_1 - \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \sin \psi_1, \\ \cos \beta_1 &= \cos \varphi_1 \sin \psi_1 + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \psi_1, \\ \cos \gamma_1 &= \sin \varphi_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Переход к осям $Oxyz$ осуществляется поворотом вокруг оси Oz_1 на угол ψ_1 , поворотом вокруг OA — положения Ox_1 в результате первого поворота — на угол θ_1 и поворотом вокруг оси Oz_1 , совпавшей с осью Oz в результате второго поворота, на угол φ_1 . Можно осуществить ещё произвольный поворот вокруг оси Ox , так как в результате такого поворота уравнение (3.8) не меняется. Матрица, определяющая преобразование координат при вращении вокруг Ox , имеет вид

$$A_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Имеющийся произвол используем для упрощения формул. Угол поворота ϑ вокруг Ox выберем так, чтобы оси Oz, Oz_1 и Ox лежали в одной плоскости. Тогда $\vartheta = \theta_1 = (\pi/2) - \gamma_1$. Кроме этого, из перпендикулярности линии узлов OA плоскости zOz_1 следует её перпендикулярность оси Ox . Поэтому $\varphi_1 = \pi/2$, и формулы (5.2) принимают вид

$$\cos \alpha_1 = -\sin \gamma_1 \sin \psi_1, \quad \cos \beta_1 = \sin \gamma_1 \cos \psi_1. \quad (5.3)$$

При таком выборе осей $Oxyz$ вместо трёх углов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ в (5.3), определяющих вектор \mathbf{B}^0 , достаточно двух: γ_1 и ψ_1 , где

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}. \quad (5.4)$$

Итак, переход к осям $Oxyz$ осуществляется тремя последовательными вращениями: поворот на

угол ψ_1 вокруг Oz_1 . Матрица, характеризующая преобразование координат при таком вращении,

$$A_3(\psi_1) = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее нужно осуществить поворот на угол $(\pi/2) - \gamma_1$ вокруг Ox_1 и поворот на угол $\pi/2$ вокруг Oz . Если $\mathbf{x}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \mathbf{x} = \{x, y, z\}$, то общее преобразование координат в результате таких трёх последовательных вращений пространства $Ox_1y_1z_1$ имеет вид $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}$ где матрица $\mathbf{A} = A_3(\psi_1)A_1\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)A_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} x_1 &= -x \sin \psi_1 \sin \gamma_1 - y \cos \psi_1 + z \sin \psi_1 \cos \gamma_1, \\ y_1 &= x \cos \psi_1 \sin \gamma_1 - y \sin \psi_1 - z \cos \psi_1 \cos \gamma_1, \\ z_1 &= x \cos \gamma_1 + z \sin \gamma_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вернёмся к осям $Ox_1y_1z_1$ транспонированием преобразования в (5.5):

$$\begin{aligned} x &= -x_1 \sin \psi_1 \sin \gamma_1 + y_1 \cos \psi_1 \sin \gamma_1 + z_1 \cos \gamma_1, \\ y &= -x_1 \cos \psi_1 - y_1 \sin \psi_1, \\ z &= x_1 \sin \psi_1 \cos \gamma_1 - y_1 \cos \psi_1 \cos \gamma_1 + z_1 \sin \gamma_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Поверхность эллипсоида (5.1) в координатах $Oxyz$ по (5.6)

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad & \frac{(x \sin \psi_1 \sin \gamma_1 + y \cos \psi_1 - z \sin \psi_1 \cos \gamma_1)^2}{a^2} \\ & + \frac{(x \cos \psi_1 \sin \gamma_1 - y \sin \psi_1 - z \cos \psi_1 \cos \gamma_1)^2}{b^2} \\ & + \frac{(x \cos \gamma_1 + z \sin \gamma_1)^2}{c^2} = 1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Угол ψ_1 определён в (5.4). Далее осуществим аффинное преобразование (4.3). Новым ζ -координатам приписываем индекс «единица», так как для решения задачи потребуется ещё одно преобразование координат, переводящее уравнение эллипсоида (5.7) к каноническому виду:

$$x = \xi_1 \sqrt{\lambda^2 + S}, \quad y = \lambda \eta_1, \quad z = \lambda \zeta_1. \quad (5.8)$$

В координатах ξ_1, η_1, ζ_1 эллипсоид (5.1) переходит в эллипсоид

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta_1} : \quad & A_{11}\xi_1^2 + A_{11}\eta_1^2 + A_{33}\zeta_1^2 + \\ & 2(A_{12}\xi_1\eta_1 + A_{13}\xi_1\zeta_1 + A_{23}\eta_1\zeta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} = (\lambda^2 + S) \left(\frac{\sin^2 \psi_1 \sin^2 \gamma_1}{a^2} \right. \\ \left. + \frac{\cos^2 \psi_1 \cos^2 \gamma_1}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma_1}{c^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ik} &= A_{ki}, \\
 A_{22} &= \lambda^2 \left(\frac{\cos^2 \psi_1}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi_1}{b^2} \right), \\
 A_{23} &= \lambda \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \cos \gamma_1, \\
 A_{33} &= \lambda^2 \left(\frac{\sin^2 \psi_1 \cos^2 \gamma_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi_1 \cos^2 \gamma_1}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma_1}{c^2} \right), \\
 A_{12} &= \lambda \sqrt{\lambda^2 + S} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin \gamma_1, \\
 A_{13} &= -\lambda \sqrt{\lambda^2 + S} \\
 &\quad \times \left(\frac{\sin^2 \psi_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi_1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cos \gamma_1 \sin \gamma_1. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

В переменных ξ_1, η_1, ζ_1 задача по определению

$$\varphi = \Phi + \Phi_1, \quad \psi = \Psi + \Psi_1, \quad (5.10)$$

формулируется для внешности эллипсоида (5.9) соотношениями (4.11) – (4.13), в которых переменным ξ, η, ζ и соответствующим единичным векторам ξ^0, η^0, ζ^0 нужно приписать индекс «единица». Для решения этой задачи нужно осуществить ещё одно вращение пространства $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, переводящее уравнение эллипсоида (5.9) к каноническому виду

$$\Sigma_\zeta : \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1, \quad (5.11)$$

в новой системе координат $O\xi\eta\zeta$. Уравнения (4.12), (4.13) записаны в инвариантной форме, справедливой в любой системе координат. При вращении пространства $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ как твёрдое тело оператор Лапласа сохраняет свой вид (4.4); сохранятся также обычные выражения проекций градиента в декартовых координатах; но однокомпонентные вектора, помеченные символом «*», при вращении приобретут все три компоненты. В новых координатах изменятся также выражения (4.11) векторов на бесконечности. Эллипсоид (5.11), полученный из эллипсоида (5.9) с полуосями a, b, c с помощью преобразования (5.8), имеет другие полуоси A, B, C :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\tau_3}}, \quad (5.12)$$

τ_1, τ_2, τ_3 — заведомо положительные корни кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \tau & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \tau & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0.$$

Полуоси (5.12) приведённого эллипсоида (5.11) зависят не только от характеристик λ и S турбулентности потока и приложенного магнитного поля, но и от направления этого поля по отношению к осям исходного эллипсоида (5.1). Вращение, приводящее уравнение эллипсоида (5.7) к каноническому виду (5.11), задаётся таким преобразованием координат:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\
 \eta_1 &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\
 \zeta_1 &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta.
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Направляющие косинусы a_{ik} осей ξ (т. е. a_{11}, a_{21}, a_{31}), η (a_{21}, a_{22}, a_{31}) и ζ (a_{31}, a_{31}, a_{33}) по отношению к осям ξ_1, η_1, ζ_1 определяются из системы

$$\begin{aligned}
 (A_{11} - \tau_1)a_{1k} + A_{12}a_{2k} + A_{13}a_{3k} &= 0, \\
 A_{21}a_{1k} + (A_{22} - \tau_2)a_{2k} + A_{23}a_{3k} &= 0, \\
 A_{31}a_{1k} + A_{32}a_{2k} + (A_{33} - \tau_3)a_{3k} &= 0, \\
 k &= 1, 2, 3 \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

при условии $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = 1$. Координаты ξ, η, ζ через ξ_1, η_1, ζ_1 выразим из (5.13) транспонированием матрицы преобразования:

$$\begin{aligned}
 \xi &= a_{11}\xi_1 + a_{21}\eta_1 + a_{31}\zeta_1, \\
 \eta &= a_{12}\xi_1 + a_{22}\eta_1 + a_{32}\zeta_1, \\
 \zeta &= a_{13}\xi_1 + a_{23}\eta_1 + a_{33}\zeta_1.
 \end{aligned}$$

Вектора $\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0$ имеют вид

$$\xi_1^0 = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} \xi^0 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \eta^0 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} \zeta^0$$

и т. д.:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\
 \eta_1 &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\
 \zeta_1 &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta.
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Поэтому вектора (4.11), в которых, напомним, ортам ξ^0, η^0, ζ^0 следует при переходе к новым ортам приписать нижний индекс единица (см. (5.15)), преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= [\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S} a_{11} \cos \alpha + \lambda^3 (a_{21} \cos \beta + a_{31} \cos \gamma)] \xi^0 \\
 &\quad + [\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S} a_{12} \cos \alpha + \lambda^3 (a_{22} \cos \beta + a_{32} \cos \gamma)] \eta^0 \\
 &\quad + [\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S} a_{13} \cos \alpha + \lambda^2 (a_{23} \cos \beta + a_{33} \cos \gamma)] \zeta^0 \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} U_\xi \xi^0 + U_\eta \eta^0 + U_\zeta \zeta^0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \lambda(a_{21} \cos \gamma - a_{31} \cos \beta) \boldsymbol{\xi}^0 \\ &+ \lambda(a_{22} \cos \gamma - a_{32} \cos \beta) \boldsymbol{\eta}^0 \\ &+ (a_{23} \cos \gamma - a_{33} \cos \beta) \boldsymbol{\zeta}^0 \\ &\stackrel{\text{def}}{=} W_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + W_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + W_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

При переформулировке задач (4.11) – (4.13) для внешности эллипсоида (5.12) нужно выяснить как при вращении (5.13) преобразуются входящие в (4.13) произведения вида $(\nabla \times \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_1}$, где $\mathbf{f}^* = f \boldsymbol{\xi}_1^0$ – однокомпонентные вектора в пространстве $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ до вращения. В нашем случае $\nabla \times \mathbf{f}^* = \nabla \times (f \boldsymbol{\xi}_1^0) = \nabla f \times \boldsymbol{\xi}_1^0$, так как $\boldsymbol{\xi}_1^0$ – постоянный вектор (5.15). Поэтому

$$(\nabla \times \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_1} = (\nabla f \times \boldsymbol{\xi}_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}.$$

Итак, нужно найти потенциалы скорости Φ_1 и Ψ_1 обтекания эллипсоида (5.11) потоком идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорости \mathbf{U} и \mathbf{W} (см. (5.16)). Затем, по этим потенциалам для внешности того же эллипсоида нужно решать такую систему граничных задач:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}; \\ \Phi \Big|_{\infty} &= \Psi \Big|_{\infty} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= S \left[\nabla(\Psi + \Psi_1) \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \right] \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= S \left[\nabla(\Phi + \Phi_1) \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \right] \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \boldsymbol{\xi}_1^0 &= a_{11} \boldsymbol{\xi}^0 + a_{12} \boldsymbol{\eta}^0 + a_{13} \boldsymbol{\zeta}^0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Функции φ и ψ определены в (5.10). \mathbf{n} – нормаль к эллипсоиду (5.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{q} \left(\frac{\xi}{A^2} \boldsymbol{\xi}^0 + \frac{\eta}{B^2} \boldsymbol{\eta}^0 + \frac{\zeta}{C^2} \boldsymbol{\zeta}^0 \right) = \frac{1}{2q} \nabla \Sigma_\zeta, \\ q &= \sqrt{\frac{\xi^2}{A^4} + \frac{\eta^2}{B^4} + \frac{\zeta^2}{C^4}}, \\ \Sigma_\zeta &\equiv \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} - 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Потенциалы Φ_1 и Ψ_1 скорости обтекания эллипсоида со скоростями $\mathbf{U} = U_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + U_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + U_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0$ и $\mathbf{W} = W_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + W_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + W_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0$ на бесконечности в отсутствие электромагнитного поля известны [4]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \xi \left(1 + \frac{X(\xi, \eta, \zeta)}{2 - X_0} \right) U_\xi + \eta \left(1 + \frac{Y(\xi, \eta, \zeta)}{2 - Y_0} \right) U_\eta \\ &+ \zeta \left(1 + \frac{Z(\xi, \eta, \zeta)}{2 - Z_0} \right) U_\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \xi \left(1 + \frac{X(\xi, \eta, \zeta)}{2 - X_0} \right) W_\xi + \eta \left(1 + \frac{Y(\xi, \eta, \zeta)}{2 - Y_0} \right) W_\eta \\ &+ \zeta \left(1 + \frac{Z(\xi, \eta, \zeta)}{2 - Z_0} \right) W_\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{\chi(\xi, \eta, \zeta)}^{\infty} \frac{dt}{(A^2 + t)\Delta(t)}, \\ Y(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{\chi(\xi, \eta, \zeta)}^{\infty} \frac{dt}{(B^2 + t)\Delta(t)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} Z(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{\chi(\xi, \eta, \zeta)}^{\infty} \frac{dt}{(C^2 + t)\Delta(t)}, \\ \Delta(t) &= \frac{\sqrt{(A^2 + t)(B^2 + t)(C^2 + t)}}{ABC}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

X_0, Y_0, Z_0 – значения интегралов (5.20) при $\chi = 0$, а $\chi(\xi, \eta, \zeta) > 0$ – корень уравнения

$$\frac{\xi^2}{A^2 + \chi} + \frac{\eta^2}{B^2 + \chi} + \frac{\zeta^2}{C^2 + \chi} = 1, \quad (5.21)$$

так что на поверхности эллипсоида (5.11) $\chi \equiv 0$.

5.1 Каноническая форма граничных задач

В граничные условия (5.17) посредством потенциалов (5.19) входят градиенты функций (5.20) на поверхности эллипсоида (5.11). Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{\partial X}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = -\frac{1}{(A^2 + \chi)\Delta(\chi)} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= -\frac{1}{A^2 \Delta(0)} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Big|_{\chi=0} = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Big|_{\chi=0}, \end{aligned}$$

так как $\Delta(0) = 1$. Остальные производные вычисляются аналогично:

$$\nabla X \Big|_{\Sigma_\zeta} = -\frac{1}{A^2} \nabla \chi \Big|_{\chi=0},$$

$$\nabla Y \Big|_{\Sigma_\zeta} = -\frac{1}{B^2} \nabla \chi \Big|_{\chi=0}, \quad \nabla Z \Big|_{\Sigma_\zeta} = -\frac{1}{C^2} \nabla \chi \Big|_{\chi=0}.$$

Производные функции $\chi(\xi, \eta, \zeta)$ при $\chi = 0$ найдём из соотношения (5.21). Дифференцируя его по ξ , получаем

$$\frac{2\xi}{A^2} \left(\frac{\xi^2}{A^4} + \frac{\eta^2}{B^4} + \frac{\zeta^2}{C^4} \right) \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Big|_{\Sigma_\zeta, \chi=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Big|_{\chi=0} = \frac{2\xi}{A^2 q^2} \Big|_{\chi=0}.$$

Функция $q(\xi, \eta, \zeta)$ определена в (5.18). Аналогично производные:

$$\nabla \chi \Big|_{\Sigma_\zeta} = \frac{2}{q^2} \left(\frac{\xi}{A^2} \xi^0 + \frac{\eta}{B^2} \eta^0 + \frac{\zeta}{C^2} \zeta^0 \right) \Big|_{\Sigma_\zeta} = \frac{\nabla \Sigma_\zeta}{q^2} \Big|_{\Sigma_\zeta}.$$

Поэтому искомые градиенты

$$\begin{aligned} \nabla X \Big|_{\Sigma_\zeta} &= -\frac{\nabla \Sigma_\zeta}{A^2 q^2} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \nabla Y \Big|_{\Sigma_\zeta} &= -\frac{\nabla \Sigma_\zeta}{B^2 q^2} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \nabla Z \Big|_{\Sigma_\zeta} &= -\frac{\nabla \Sigma_\zeta}{C^2 q^2} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Прежде, чем преобразовывать свободные от искомых функций Φ и Ψ члены в правых частях (5.17), рассмотрим вспомогательную функцию

$$f = \xi P_\xi X(\xi, \eta, \zeta) + \eta P_\eta Y(\xi, \eta, \zeta) + \zeta P_\zeta Z(\xi, \eta, \zeta), \quad (5.23)$$

где P_ξ, P_η, P_ζ — некоторые постоянные. Находим

$$\begin{aligned} \nabla f \Big|_{\Sigma_\zeta} &= P_\xi \nabla(\xi X) \\ &+ P_\eta \nabla(\eta Y) + P_\zeta \nabla(\zeta Z) \Big|_{\Sigma_\zeta} \\ &= P_\xi (X_0 \xi^0 + \xi \nabla X) \\ &+ P_\eta (Y_0 \eta^0 + \eta \nabla Y) + P_\zeta (Z_0 \zeta^0 + \zeta \nabla Z) \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned}$$

С учётом (5.22)

$$\begin{aligned} \nabla f \Big|_{\Sigma_\zeta} &= P_\xi X_0 \xi^0 + P_\eta Y_0 \eta^0 + P_\zeta Z_0 \zeta^0 \\ &- \frac{1}{q^2} \left(\frac{\xi P_\xi}{A^2} + \frac{\eta P_\eta}{B^2} + \frac{\zeta P_\zeta}{C^2} \right) \nabla \Sigma_\zeta \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя (5.18),

$$\begin{aligned} (\nabla f \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= \left((P_\xi X_0 \xi^0 + P_\eta Y_0 \eta^0 \right. \\ &\left. + P_\zeta Z_0 \zeta^0) \times \xi_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \\ &- \frac{1}{2q^3} \left(\frac{\xi P_\xi}{A^2} + \frac{\eta P_\eta}{B^2} + \frac{\zeta P_\zeta}{C^2} \right) (\nabla \Sigma_\zeta \times \xi_1^0) \cdot \nabla \Sigma_\zeta \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned}$$

Но $(\nabla \Sigma_\zeta \times \xi_1^0) \cdot \nabla \Sigma_\zeta \equiv 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\nabla f \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= \left((P_\xi X_0 \xi^0 \right. \\ &\left. + P_\eta Y_0 \eta^0 + P_\zeta Z_0 \zeta^0) \times \xi_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= (\nabla f) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} \\ &= (P_\xi X_0 \xi^0 + P_\eta Y_0 \eta^0 + P_\zeta Z_0 \zeta^0) \cdot \mathbf{n} \\ &- \frac{1}{q^2} \left(\frac{\xi P_\xi}{A^2} + \frac{\eta P_\eta}{B^2} + \frac{\zeta P_\zeta}{C^2} \right) \nabla \Sigma_\zeta \cdot \frac{\nabla \Sigma_\zeta}{2q} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned}$$

Но из (5.18) $(\nabla \Sigma_\zeta)^2 \Big|_{\Sigma_\zeta} = 4q^2 \Big|_{\Sigma_\zeta}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= (P_\xi X_0 \xi^0 + P_\eta Y_0 \eta^0 + P_\zeta Z_0 \zeta^0) \cdot \mathbf{n} \\ &- \frac{2}{q} \left(\frac{\xi P_\xi}{A^2} + \frac{\eta P_\eta}{B^2} + \frac{\zeta P_\zeta}{C^2} \right) \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned}$$

Второй член в правой части в последней формуле равен взятому с обратным знаком удвоенному скалярному произведению вектора нормали (5.18) к поверхности Σ_ζ на вектор $\mathbf{P} = P_\xi \xi^0 + P_\eta \eta^0 + P_\zeta \zeta^0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= - \left[(2 - X_0) P_\xi \xi^0 + (2 - Y_0) P_\eta \eta^0 \right. \\ &\left. + (2 - Z_0) P_\zeta \zeta^0 \right] \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.2 Прямое произведение векторов

Гидродинамика является источником ярких идей и методов решения различного рода проблем математической физики. Метод сращивания асимптотических разложений рожден гидродинамикой. При решении гидродинамических проблем был открыт странный аттрактор. Теперь вниманию математиков и механиков предлагается новая операция векторного анализа, которая, хоть и не может быть поставлена в ряд с только что названными, но, тем не менее, тоже возникла в гидродинамике.

Введём три взаимноортогональных вектора ξ^0, η^0, ζ^0 . Определение. *Прямым произведением* $\mathbf{a}\mathbf{b}$ векторов

$$\mathbf{a} = a_\xi \xi^0 + a_\eta \eta^0 + a_\zeta \zeta^0 \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b_\xi \xi^0 + b_\eta \eta^0 + b_\zeta \zeta^0$$

называется вектор

$$\overline{ab} = a_\xi b_\xi \xi^0 + a_\eta b_\eta \eta^0 + a_\zeta b_\zeta \zeta^0.$$

Прямое произведение \overline{abc} векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} есть вектор

$$\overline{abc} = a_\xi b_\xi c_\xi \xi^0 + a_\eta b_\eta c_\eta \eta^0 + a_\zeta b_\zeta c_\zeta \zeta^0,$$

и так далее для любого числа векторов произвольной размерности.

Свойства прямого произведения векторов:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \overline{ba}, \quad \overline{\alpha ab} = \alpha \overline{ab}, \\ \overline{a(b+c)} &= \overline{ab} + \overline{ac}, \quad \overline{\overline{abc}} = \overline{abc}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где α — произвольная скалярная величина. Пусть $\delta = \xi^0 + \eta^0 + \zeta^0$. Находим: $\overline{\delta\delta} = \delta$, $\overline{a\delta} = \overline{a}$. Поэтому роль единицы в алгебре прямого произведения векторов играет вектор $\delta = \xi^0 + \eta^0 + \zeta^0$. Примеры.

$$\begin{aligned} \overline{\delta a} &= a, \quad \overline{\delta \delta a} = a, \quad a + \overline{abc} = \overline{a\delta\delta} + \overline{abc} \\ &= \overline{a\delta\delta} + \overline{abc} = \overline{a\delta\delta + a\delta\delta} = \overline{a\delta(\delta + \delta)} = \overline{a(\delta + \delta)}. \end{aligned}$$

Обратно: $\overline{a(\delta + \delta)} = \overline{a\delta} + \overline{a\delta} = a + \overline{abc}$. Таким образом,

$$a + \overline{abc} = \overline{a(\delta + \delta)}. \quad (5.27)$$

5.3 Канонические граничные задачи (продолжение)

Исследование МГД-обтекания эллипсоида существенно упрощаются и сокращаются с помощью прямого произведения векторов. Введём вектор

$$\mathbf{A} = X_0 \xi^0 + Y_0 \eta^0 + Z_0 \zeta^0. \quad (5.28)$$

Тогда соотношения (5.24) и (5.25) для функции (5.23) с помощью операции прямого произведения векторов запишутся в виде

$$(\nabla f \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = ((\overline{\mathbf{A}\mathbf{P}}) \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = (\overline{\mathbf{A}\mathbf{P}} - 2\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \quad (5.30)$$

В граничные условия (5.17) входит

$$(\nabla \Phi_1 \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta},$$

где по формулам (5.17) и (5.23)

$$\Phi_1 = \xi U_\xi + \eta U_\eta + \zeta U_\zeta + f,$$

а коэффициенты в определении функции f

$$P_\xi = \frac{U_\xi}{2 - X_0}, \quad P_\eta = \frac{U_\eta}{2 - Y_0}, \quad P_\zeta = \frac{U_\zeta}{2 - Z_0}.$$

Вектора \mathbf{U} и \mathbf{W} определены в (5.16). Используя (5.29), находим

$$(\nabla \Phi_1 \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = \left((\mathbf{U} - \overline{\mathbf{A}\mathbf{P}}) \times \xi_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}.$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \frac{U_\xi}{2 - X_0} \xi^0 + \frac{U_\eta}{2 - Y_0} \eta^0 + \frac{U_\zeta}{2 - Z_0} \zeta^0.$$

Введём вектор

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2 - X_0} \xi^0 + \frac{1}{2 - Y_0} \eta^0 + \frac{1}{2 - Z_0} \zeta^0. \quad (5.31)$$

Тогда $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{B}\mathbf{U}}$ и по (5.26) и (5.27)

$$\mathbf{U} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{P}} = \mathbf{U} = \overline{\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}\mathbf{U}}} = \mathbf{U} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}(\delta + \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}})}.$$

В силу (5.28) и (5.31)

$$\begin{aligned} \delta + \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} &= \left(1 + \frac{X_0}{2 - X_0} \right) \xi^0 + \left(1 + \frac{Y_0}{2 - Y_0} \right) \eta^0 \\ &\quad + \left(1 + \frac{Z_0}{2 - Z_0} \right) \zeta^0 \\ &= \frac{2}{2 - X_0} \xi^0 + \frac{2}{2 - Y_0} \eta^0 + \frac{2}{2 - Z_0} \zeta^0 = 2\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Следовательно, $\mathbf{U} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{P}} = 2\overline{\mathbf{B}\mathbf{U}}$ и

$$(\nabla \Phi_1 \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = 2(\overline{\mathbf{B}\mathbf{U}} \times \xi_1^0) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}.$$

В аналогичное выражение, содержащее Ψ_1 , вместо вектора \mathbf{U} войдёт вектор \mathbf{W} (см. (5.19)). Поэтому граничные условия (5.17) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= S \left((\nabla \Psi + 2\overline{\mathbf{B}\mathbf{W}}) \times \xi_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}, \\ \lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\zeta} &= \left((\nabla \Phi + 2\overline{\mathbf{B}\mathbf{U}}) \times \xi_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

6 МГД-потенциалы

Функции Φ и Ψ вне эллипсоида Σ_ζ удовлетворяют уравнению Лапласа и исчезают на бесконечности (см. [4]). Чтобы найти такие функции по виду граничных условий (5.33), заметим, что свободные от Φ и Ψ члены в этих условиях содержат нормаль \mathbf{n} к поверхности Σ_ζ в качестве множителя в скалярном произведении некоторых векторов. По (5.29) и (5.30) та же нормаль в скалярном произведении возникает в том случае, если над функцией (5.23) при произвольных постоянных P_ξ , P_η , P_ζ произвести те же операции дифференцирования и умножения на ξ_1^0 и \mathbf{n} , которые формируют граничные

условия (5.33). Кроме этого, функции (5.23) вне поверхности эллипсоида Σ_ζ удовлетворяют уравнению Лапласа и исчезают на бесконечности [4]. Поэтому

$$\Phi = \xi P_\xi X_0(\xi, \eta, \zeta) + \eta P_\eta Y(\xi, \eta, \zeta) + \zeta P_\zeta Z(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\Psi = \xi Q_\xi X_0(\xi, \eta, \zeta) + \eta Q_\eta Y(\xi, \eta, \zeta) + \zeta Q_\zeta Z(\xi, \eta, \zeta). \quad (6.1)$$

где теперь постоянные вектора

$$\mathbf{P} = P_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + P_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + P_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0 \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = Q_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + Q_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + Q_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0$$

подлежат определению. Подставляя выражения (6.1) в граничные условия (5.33) и используя соотношения (5.29), (5.30), получим

$$\left(2\mathbf{P} - \overline{\mathbf{AP}} + S(\overline{\mathbf{AQ}} + 2\overline{\mathbf{BW}}) \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = 0,$$

$$\left(\lambda^2(2\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{AQ}}) + (\overline{\mathbf{AP}} + 2\overline{\mathbf{BU}}) \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma_\zeta} = 0.$$

Скалярное произведение векторов равно нулю в двух случаях: либо вектора ортогональны, либо один из них есть нуль-вектор. Но сомножителями в скалярных произведениях с переменным вектором нормали \mathbf{n} к поверхности Σ_ζ в исследуемых соотношениях фигурируют постоянные вектора. Они не могут быть ортогональны \mathbf{n} при любом переменном положении нормали на поверхности эллипсоида. Поэтому постоянные вектора — сомножители с нормалью — равны нулю и

$$2\mathbf{P} - \overline{\mathbf{AP}} + S\overline{\mathbf{AQ}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 = 2S\overline{\mathbf{BW}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0, \quad (6.2)$$

$$\lambda^2(2\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{AQ}}) + \overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 = -2\overline{\mathbf{BU}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0. \quad (6.3)$$

Вектор $\boldsymbol{\xi}_1^0$ выписан в (5.17).

Векторные уравнения (6.2) и (6.3) в проекциях дают шесть линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения шести неизвестных компонент векторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} — коэффициентов в потенциалах (6.1). Решение системы (6.2), (6.3) прямыми методами достаточно громоздко. Использование операции прямого произведения векторов позволяет получить решение в несколько строк. Находим, с учётом (5.28),

$$2\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{AQ}} = (2 - X_0)Q_\xi \boldsymbol{\xi}^0 + (2 - Y_0)Q_\eta \boldsymbol{\eta}^0 + (2 - Z_0)Q_\zeta \boldsymbol{\zeta}^0.$$

Отсюда прямым умножением на вектор (5.31) имеем $(2\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{AQ}})\mathbf{B} = \mathbf{Q}$, и прямое умножение векторного соотношения (6.3) на вектор \mathbf{B} даёт

$$\lambda^2 \mathbf{Q} = -\overline{\mathbf{B}(\overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} - \overline{2\mathbf{B}(\overline{\mathbf{BU}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)}.$$

Подставим этот вектор в (6.2):

$$\begin{aligned} \lambda^2(2\mathbf{P} - \overline{\mathbf{AP}}) - S\overline{\mathbf{A}(\overline{\mathbf{B}(\overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} + 2\overline{\mathbf{B}(\overline{\mathbf{BU}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)})} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \\ = -2\lambda^2 S\overline{\mathbf{BW}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \end{aligned}$$

и используем свойства (5.26) прямого произведения векторов. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda^2(2\mathbf{P} - \overline{\mathbf{AP}}) - S\overline{\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \\ = 2 \left(\overline{S\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{BU}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 - \lambda^2 S\overline{\mathbf{BW}} \right) \times \boldsymbol{\xi}_1^0. \quad (6.4) \end{aligned}$$

Аналогично, выражая вектор \mathbf{P} из (6.2) прямым умножением на вектор \mathbf{B} и подставляя его в (6.3), получим векторное уравнение для \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} \lambda^2(2\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{AQ}}) - S\overline{\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{AQ}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \\ = 2 \left(\overline{S\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{BW}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} - \overline{\mathbf{BU}} \right) \times \boldsymbol{\xi}_1^0. \end{aligned}$$

Достаточно решить уравнение (6.4) и найти компоненты вектора \mathbf{P} . Компоненты вектора \mathbf{Q} получим из выражений для компонент вектора \mathbf{P} заменой компонент вектора \mathbf{U} на соответствующие компоненты вектора \mathbf{W} и наоборот и заменой $\lambda^2 S$ на единицу там, где $\lambda^2 S$ встречается в коэффициенте перед компонентами вектора \mathbf{B} . Будем проектировать обе части векторного уравнения (6.4) на ось $O\xi$. Учитывая выражение (5.17) для $\boldsymbol{\xi}_1^0$ и выражение (5.28) для \mathbf{A} , находим

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 = (a_{13}Y_0P_\eta - a_{12}Z_0P_\zeta)\boldsymbol{\xi}^0 \\ + (a_{11}Z_0P_\zeta - a_{13}X_0P_\xi)\boldsymbol{\eta}^0 + (a_{12}X_0P_\xi - a_{11}Y_0P_\eta)\boldsymbol{\zeta}^0. \end{aligned}$$

Поэтому, с учётом (5.31),

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} = \frac{X_0(a_{13}Y_0P_\eta - a_{12}Z_0P_\zeta)}{2 - X_0}\boldsymbol{\xi}^0 \\ + \frac{Y_0(a_{11}Z_0P_\zeta - a_{13}X_0P_\xi)}{2 - Y_0}\boldsymbol{\eta}^0 \\ + \frac{Z_0(a_{12}X_0P_\xi - a_{11}Y_0P_\eta)}{2 - Z_0}\boldsymbol{\zeta}^0, \end{aligned}$$

а проекция наиболее сложного векторного произведения в (6.4) на $\boldsymbol{\xi}^0$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathbf{AB}(\overline{\mathbf{AP}} \times \boldsymbol{\xi}_1^0)} \times \boldsymbol{\xi}_1^0 \right) \boldsymbol{\xi}^0 \\ = \frac{a_{13}Y_0(a_{11}Z_0P_\zeta - a_{13}X_0P_\xi)}{2 - Y_0} \\ - \frac{a_{12}Z_0(a_{12}X_0P_\xi - a_{11}Y_0P_\eta)}{2 - Z_0}. \end{aligned}$$

Этих соотношений достаточно для проектирования (6.4) на $O\xi$:

$$\begin{aligned} & \lambda^2(2 - X_0)P_\xi \\ & + S \left\{ \frac{[a_{12}^2 X_0 Z_0 (2 - Y_0) + a_{13}^2 X_0 Y_0 (2 - Z_0)] P_\xi}{(2 - Y_0)(2 - Z_0)} \right. \\ & \left. - \frac{a_{11} Y_0 Z_0 [a_{12}(2 - Y_0) P_\eta + a_{13}(2 - Z_0) P_\zeta]}{(2 - Y_0)(2 - Z_0)} \right\} \\ & = -2\lambda^2 S \left(\frac{a_{13} W_\eta}{2 - Y_0} - \frac{a_{12} W_\zeta}{2 - Z_0} \right) \\ & + 2S \left[\frac{a_{13} Y_0}{2 - Y_0} \left(\frac{a_{11} U_\zeta}{2 - Z_0} - \frac{a_{13} U_\xi}{2 - X_0} \right) \right. \\ & \left. - \frac{a_{12} Z_0}{2 - Z_0} \left(\frac{a_{12} U_\xi}{2 - X_0} - \frac{a_{11} U_\eta}{2 - Y_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Умножим обе части векторного уравнения (6.4) скалярно на вектор ξ_1^0 . Учитывая, что $(\mathbf{a} \times \xi_1^0) \cdot \xi_1^0$ при любом \mathbf{a} , получим $(2\mathbf{P} - \overline{\mathbf{A}\mathbf{P}}) \cdot \xi_1^0 = 0$, т. е. $a_{11}(2 - X_0)P_\xi + a_{12}(2 - Y_0)P_\eta + a_{13}(2 - Z_0)P_\zeta = 0$, и предыдущее уравнение даёт уравнение относительно одной компоненты P_ξ вектора \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} P_\xi = & \frac{2\lambda^2 S}{D} \left[a_{12}(2 - Y_0)W_\zeta - a_{13}(2 - Z_0)W_\eta \right] \\ & + \frac{2S}{D} \left[a_{11}(a_{12}Z_0U_\eta + a_{13}Y_0U_\zeta) \right. \\ & \left. - \frac{a_{12}^2 Z_0(2 - Y_0) + a_{13}^2 Y_0(2 - Z_0)}{2 - X_0} U_\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\xi = & \frac{2S}{D} \left[a_{12}(2 - Y_0)U_\zeta - a_{13}(2 - Z_0)U_\eta \right] \\ & + \frac{2S}{D} \left[a_{11}(a_{12}Z_0W_\eta + a_{13}Y_0W_\zeta) \right. \\ & \left. - \frac{a_{12}^2 Z_0(2 - Y_0) + a_{13}^2 Y_0(2 - Z_0)}{2 - X_0} W_\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & \lambda^2(2 - X_0)(2 - Y_0)(2 - Z_0) \\ & + S \left[a_{11}^2 Y_0 X_0 (2 - X_0) + a_{12}^2 X_0 Z_0 (2 - Y_0) \right. \\ & \left. + a_{13}^2 X_0 Y_0 (2 - Z_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Остальные компоненты векторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} получаются из выражения для компонент P_ξ и Q_ξ заменой $(1\xi X_0) \rightarrow (2\eta Y_0) \rightarrow (3\zeta Z_0) \rightarrow (1\xi X_0)$, причём у косинусов a_{1k} меняется только второй индекс k . Доказательство неравенств $X_0 < 2$, $Y_0 < 2$, $Z_0 < 2$ опускаем.

Подставим выражения (5.19) и (6.1) в формулы $\varphi = \Phi + \Phi_1$, $\psi = \Psi + \Psi_1$ (5.10). Тогда получим

решения задачи об обтекании непроводящего эллипсоида электропроводной невязкой жидкостью в магнитном поле:

$$\begin{aligned} \varphi = & \xi U_\xi + \eta U_\eta \\ & + \zeta U_\zeta + \xi \left(P_\xi + \frac{U_\xi}{2 - X_0} \right) X(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \eta \left(P_\eta + \frac{U_\eta}{2 - Y_0} \right) Y(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \zeta \left(P_\zeta + \frac{U_\zeta}{2 - Z_0} \right) Z(\xi, \eta, \zeta), \\ \psi = & \xi W_\xi + \eta W_\eta + \zeta W_\zeta \\ & + \xi \left(Q_\xi + \frac{W_\xi}{2 - X_0} \right) X(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \eta \left(Q_\eta + \frac{W_\eta}{2 - Y_0} \right) Y(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \zeta \left(Q_\zeta + \frac{W_\zeta}{2 - Z_0} \right) Z(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Компоненты векторов $\mathbf{U} = U_\xi \xi^0 + U_\eta \eta^0 + U_\zeta \zeta^0$ и $\mathbf{W} = W_\xi \xi^0 + W_\eta \eta^0 + W_\zeta \zeta^0$ выписаны в формулах (5.16), функции X , Y , Z — в (5.20), (5.21), компоненты векторов $\mathbf{P} = P_\xi \xi^0 + P_\eta \eta^0 + P_\zeta \zeta^0$ и $\mathbf{Q} = Q_\xi \xi^0 + Q_\eta \eta^0 + Q_\zeta \zeta^0$ — в формулах (6.5). Косинусы a_{ik} , полуоси A , B , C приведенного эллипсоида и величины A_{ik} определены в (5.14), (5.12) и (5.9). Для окончательного решения задачи в формулах (6.6) нужно вернуться к переменным x_1 , y_1 , z_1 отнесённым к главным осям исходного эллипсоида (5.1). После этого поле скоростей, плотность наведённого тока и гидроэлектромагнитное давление найдём из формул (3.7), (2.12), напряжённость наведённого электрического поля найдём по формуле $\mathbf{E} = -\nabla\psi$. Индукцию \mathbf{b} наведённого магнитного поля найдём из уравнения (3.9) при условии, что касательные компоненты вектора \mathbf{b} на эллипсоиде исчезают [2]. Для функции φ из (6.4) в осях x_1 , y_1 , z_1 получится выражение, которое на поверхности основного эллипсоида Σ_1 записывается с помощью прямого произведения векторов в виде скалярного произведения вектора $(\mathbf{P} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}})$ на определённые в (5.17) вектора ξ_1^0 , η_1^0 , ζ_1^0 :

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{\Sigma_1} = & (\mathbf{P} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}}) \left[-x_1 \left(\frac{\sin \psi_1 \sin \gamma_1}{\sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos \psi_1}{\lambda} \eta_1^0 - \frac{\sin \psi_1 \cos \gamma_1}{\lambda} \zeta_1^0 \right) \right. \\ & \left. + z_1 \left(\frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 + \frac{\sin \gamma_1}{\lambda} \zeta_1^0 \right) \right. \\ & \left. + y_1 \left(\frac{\cos \psi_1 \sin \gamma_1}{\sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 - \frac{\sin \psi_1}{\lambda} \eta_1^0 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\cos \psi_1 \cos \gamma_1}{\lambda^3} \zeta_1^0 \right) \Bigg|_{\Sigma_1}. \quad (6.7)$$

Углы ψ_1 и γ_1 и параметры λ и S определены в (5.4), (5.3) и (2.7).

7 Гидроэлектромагнитное воздействие

Для определения воздействия потока на эллипсоид нужны только эти поверхностные значения потенциала φ . Выражение для ψ приводить не будем. Отметим только, что на поверхности Σ_1 оно тоже является линейной функцией координат точек этой поверхности. Введём потенциал (6.7) в выписанные в (4.14) формулы для турбулентной части силового воздействия МГД-потока на эллипсоид. Тогда для силы гидроэлектромагнитного воздействия потока на эллипсоид Σ_1 в проекциях на оси $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{y}_1^0, \mathbf{z}_1^0$ этого эллипсоида получим ($\mathbf{R} = \rho V^2 L_*^2 \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}}{\frac{4}{3} abc \rho \kappa V} + \mathbf{V}_0 = (\mathbf{P} + 2\overline{\mathbf{ABU}}) & \left[- \left(\frac{\sin \psi_1 \sin \gamma_1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 \right. \right. \\ & + \frac{\cos \psi_1}{\lambda^3} \eta_1^0 - \left. \frac{\sin \psi_1 \cos \gamma_1}{\lambda^3} \zeta_1^0 \right) \mathbf{x}_1^0 \\ & + \left(\frac{\cos \psi_1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 + \frac{\sin \gamma_1}{\lambda^3} \zeta_1^0 \right) \mathbf{z}_1^0 \\ & + \left(\frac{\cos \psi_1 \sin \gamma_1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + S}} \xi_1^0 - \frac{\sin \psi_1}{\lambda^3} \eta_1^0 \right. \\ & \left. \left. - \frac{\cos \psi_1 \cos \gamma_1}{\lambda^3} \zeta_1^0 \right) \mathbf{y}_1^0 \right]. \quad (7.1) \end{aligned}$$

В этой формуле скалярное произведение вектора, содержащего прямое произведение, относится, понятно, к единичным векторам $\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0$. Поэтому формула (7.1) в одной записи даёт три проекции вектора \mathbf{R} на оси $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{y}_1^0, \mathbf{z}_1^0$ исходного эллипсоида (5.1). Компоненты векторов $\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ определены в формулах (6.5), (5.28), (5.31) соответственно. Вектор \mathbf{U} и угол ψ_1 выписаны в (5.16) и (5.4). a, b, c — размерные оси эллипсоида.

8 Парадокс Эйлера-д'Аламбера

Переход $S \rightarrow 0$ в (7.1) даёт силу воздействия потока идеальной неэлектропроводной жидкости на эллипсоид. При любой ориентации скорости $\mathbf{V}^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ потока жидкости на бесконечности и при любых значениях полуосей a, b, c

эллипсоида действующая на него сила

$$\mathbf{R} = \frac{4}{3} \pi abc \kappa V \rho \left(\frac{X_0 \cos \alpha}{2 - X_0} \mathbf{i} + \frac{Y_0 \cos \beta}{2 - Y_0} \mathbf{j} + \frac{Z_0 \cos \gamma}{2 - Z_0} \mathbf{k} \right). \quad (8.1)$$

Поэтому учёт турбулентного сопротивления снимает парадокс Эйлера-д'Аламбера, так как в отсутствие магнитного поля течение жидкости потенциально. При $a = b = c$ из (8.1) находим лобовое давление турбулентного потока идеальной жидкости на сферу:

$$\mathbf{R} = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \kappa \mathbf{V},$$

которое направлено по скорости \mathbf{V} набегающего потока. При $c = 0$ из (8.1) находим силу воздействия потока на эллиптический диск:

$$R = \frac{4\pi \rho ab^2 \kappa V \cos \gamma}{E \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)},$$

E — полный эллиптический интеграл второго рода. При любом значении угла атаки сила воздействия непроводящего электричество потока идеальной жидкости на эллиптический диск нормальна его плоскости.

В отсутствие электромагнитных полей в том случае, когда набегающий поток направлен по одной из осей симметрии эллипсоида, последний со стороны потока испытывает только лобовое давление. Из (7.1) следует, что при обтекании эллипсоида проводящей жидкостью в магнитном поле это не так — возникает составляющая гидроэлектромагнитной силы воздействия на эллипсоид, нормальная набегающему потоку. При обтекании непроводящих эллипсоидов МГД-потоком сила гидроэлектромагнитного воздействия потока идеальной проводящей жидкости в магнитном поле определяется турбулентным сопротивлением. Инерционная составляющая силы в МГД-потоке (4.14) $\mathbf{R}_2 = 0$, так как этот интеграл сводится к интегралу по шару $|r| < 1$ от функций вида $f(x^2, y^2, z^2)$, помноженной на нечётные степени x, y, z . Турбулентная часть момента (4.14) в МГД-потоке $\mathbf{M}_2 = 0$ (этот интеграл равен сумме статических моментов эллипсоида относительно плоскостей, проходящих через центр его тяжести). Поэтому опрокидывающий момент определяется инерционной составляющей потока. Сложное его выражение не приводим.

9 Сфера

При решении задачи об обтекании сферы $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ радиуса $a = L_*$ осуществляются следующие упрощения. Ось Ox_1 сразу направляется

по вектору \mathbf{V}^0 приложенного магнитного поля, так что $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = \pi/2$ и, по (5.4), $\psi_1 = -\pi/2$. Тогда $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, и индекс «единица» опускаем. Из формул для A_{ik} (5.9) находим $A_{11} = \lambda^2 + S$, $A_{22} = A_{33} = \lambda^2$, $A_{ik} = 0$ ($i \neq k$) так что приведённый эллипсоид сразу записывается каноническим уравнением

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{B^2} = 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + S}},$$

$$B = C = \frac{1}{\lambda}. \quad (9.1)$$

Приведённый эллипсоид для сферы является эллипсоидом вращения, сплюснутым в направлении приложенного магнитного поля. Этот эллипсоид связан со сферой преобразованием

$$x = \xi\sqrt{\lambda^2 + S}, \quad y = \lambda\eta, \quad z = \lambda\zeta.$$

В данном случае направляющие косинусы $a_{kk} = 1$, $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$), и, поэтому (см. (5.13)), $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$. Дальнейшее упрощение связано с выбором оси Oy , которую направим по перпендикуляру к плоскости, определяемой векторами \mathbf{V}^0 и \mathbf{V}^0 . Тогда $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = (\pi/2) - \alpha$ и проекции векторов \mathbf{U} и \mathbf{W} (5.16) принимают вид

$$U_\xi = \lambda^2\sqrt{\lambda^2 + S} \cos \alpha, \quad U_\zeta = \lambda^3 \sin \alpha,$$

$$W_\eta = \lambda \sin \alpha, \quad U_\eta = W_\xi = W_\zeta = 0. \quad (9.2)$$

Функции (5.20) элементарны [4]. С учётом выражений (9.1) для полуосей приведённого эллипсоида они выражаются по формулам

$$X = \frac{2\lambda(\lambda^2 + S)}{S\sqrt{S}} \left[\frac{\sqrt{S}}{\lambda\sqrt{1 + \chi(\lambda^2 + S)}} - \operatorname{arccctg} \frac{\lambda\sqrt{1 + \chi(\lambda^2 + S)}}{\sqrt{S}} \right],$$

$$Y = Z = \frac{\lambda(\lambda^2 + S)}{S\sqrt{S}} \left\{ \operatorname{arccctg} \frac{\lambda\sqrt{1 + \chi(\lambda^2 + S)}}{\sqrt{S}} - \frac{\lambda\sqrt{S[1 + \chi(\lambda^2 + S)]}}{(\lambda^2 + S)(1 + \lambda^2\chi)} \right\}.$$

Поэтому при $\chi = 0$

$$X_0 = \frac{2\lambda(\lambda^2 + S)}{S\sqrt{S}} \left(\frac{\sqrt{S}}{\lambda} - \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{S}}{\lambda} \right),$$

$$Y_0 = Z_0 = \frac{\lambda(\lambda^2 + S)}{S\sqrt{S}} \left(\operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{S}}{\lambda} - \frac{\lambda\sqrt{S}}{\lambda^2 + S} \right). \quad (9.3)$$

Из формул (6.5) с учётом того, что $a_{ik} = \delta_{ik}$ — символ Кронеккера,

$$P_\zeta = \frac{4\lambda^3 S(1 - Y_0) \sin \alpha}{(2 - Y_0)[\lambda^2(2 - Y_0)^2 + SY_0^2]}, \quad P_\xi = P_\eta = 0,$$

$$Q_\eta = \frac{2\lambda[\lambda^2(2 - Y_0) + SY_0] \sin \alpha}{(2 - Y_0)[\lambda^2(2 - Y_0)^2 + SY_0^2]}, \quad Q_\xi = Q_\zeta = 0.$$

Теперь из (6.6) с учётом (9.2) находим функции φ и ψ , через которые выражаются все остальные гидроэлектромагнитные характеристики потока у сферы:

$$\varphi = \lambda^2(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + z\lambda^2 \left(\frac{P_\zeta}{\lambda^3} + \frac{\sin \alpha}{2 - Y_0} \right) Y(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\lambda^2 x \cos \alpha}{2 - X_0} X(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\psi = y \sin \alpha + y \left(\frac{Q_\eta}{\lambda^3} + \frac{\sin \alpha}{2 - Y_0} \right) Y(\xi, \eta, \zeta).$$

Сила (7.1) гидроэлектромагнитного воздействия на сферу при больших числах Рейнольдса определяется турбулентными эффектами потока:

$$\mathbf{R} = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \kappa V \left[\frac{X_0 \cos \alpha}{2 - X_0} \mathbf{x}^0 + \frac{Y_0(\lambda^2 + S)(2 - Y_0) \sin \alpha}{\lambda^2(2 - Y_0)^2 + SY_0^2} \mathbf{z}^0 \right]. \quad (9.4)$$

Сила \mathbf{R} лежит в плоскости векторов скорости набегающего потока \mathbf{V}^0 и индукции внешнего магнитного поля \mathbf{B}^0 . Введём параметр

$$\tau = \sqrt{\frac{\lambda^2}{S}} = \sqrt{\frac{\rho \kappa}{\sigma B_*^2}}$$

(см. (2.7)), характеризующий отношение степени развития турбулентности в потоке к интенсивности внешнего магнитного поля в электропроводной среде. Вводя параметр τ в (9.3) и (9.4), получаем

$$\mathbf{R} = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \kappa V \left[\frac{(1 - Y_0) \cos \alpha}{Y_0} \mathbf{x}^0 + \frac{Y_0(\tau^2 + 1)(2 - Y_0) \sin \alpha}{Y_0^2 + \tau^2(2 - Y_0)^2} \mathbf{z}^0 \right],$$

$$Y_0 = \tau(\tau^2 + 1) \operatorname{arctg} \tau - \tau^2. \quad (9.5)$$

Эта формула даёт проекции воздействия силы \mathbf{R} на направление внешнего магнитного поля $\mathbf{B}^0 = \mathbf{x}^0$ и на перпендикулярное направление \mathbf{z}^0 . Чтобы получить лобовое давление \mathbf{S} и подъёмную силу \mathbf{N} , действующие на сферу в потоке, нужно умножить (9.5) скалярно на скорость $\mathbf{V}^0 = \mathbf{x}^0 \cos \alpha + \mathbf{z}^0 \sin \alpha$ и на определяющий перпендикулярное направление вектор $\mathbf{N}^0 = -\mathbf{x}^0 \sin \alpha + \mathbf{z}^0 \cos \alpha$ соответственно:

$$\mathbf{S} = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \kappa |V| \left[\frac{1 - Y_0}{Y_0} \cos^2 \alpha + \frac{Y_0(\tau^3 + 1)(2 - Y_0)}{Y_0^2 + \tau^2(2 - Y_0)^2} \sin^2 \alpha \right] \mathbf{V}^0,$$

$$\mathbf{N} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\kappa|V|\left[\frac{1-Y_0}{Y_0} + \frac{Y_0(\tau^3+1)(2-Y_0)}{Y_0^2+\tau^2(2-Y_0)^2}\right]\mathbf{N}^0\sin 2\alpha.$$

Лобовое сопротивление положительно, так как коэффициенты при квадратах тригонометрических функций положительны (поскольку в данном случае отношение $\frac{1-Y_0}{Y_0} = \frac{X_0}{2-X_0} > 0$). Поэтому магнитное поле не создаёт тягу для сферы ни при каком угле атаки.

10 Выводы

Использование уравнений Эйлера с турбулентным сопротивлением в задачах магнитной гидродинамики открывает широкие возможности для решения её задач в индукционном приближении на основании уравнений, выведенных в данной работе. Аprobация таких уравнений для задач обтекания эллипсоидов во внешнем магнитном поле показывает работоспособность выведенных уравнений.

Авторы надеются, что результаты работы найдут приложения в теории и практике магнитной гидродинамики в индукционном приближении. Приложения связаны как с общей постановкой мгд-задач в индукционном приближении, так и с использованием полученных результатов по динамике обтекания эллипсоидов и дисков турбулентным потоком электропроводной жидкости в магнитном поле.

Поступила в редакцию June 19, 2005

Список литературы

- [1] Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970, 379 с.
- [2] Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967, 320 с.
- [3] Заволженский М. В., Руткевич П. Б. Уточнённый прогноз траекторий тропических циклонов. М.: Препринт ИКИ РАН № 2112, 2005, 24 с.
- [4] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. т. I.-М.: Ф. – М. 1955, 560 с.
- [5] Кондратьев К.Я., Никаноров А.М., Пантюхин Я.В., Заволженский М.В. Некоторые турбулентные течения в водоёмах. // ДАН России, 1992, т. 324, № 3, с. 676 – 680.
- [6] Ламб Г. Гидродинамика. — М. — Л.: Гостехиздат, 1947, 928 с.
- [7] Гилл А. Динамика атмосферы и океана. — М.: Мир, т. II, 1986, 415с.
- [8] Моисеев С.С., Руткевич П.В., Тур А.В., Яновский В.В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. Т. 94. 1988. № 2. С. 144-153.
- [9] Моисеев С.С., Руткевич П.В., Тур А.В., Яновский В.В. Крупномасштабные структуры в конвективной турбулентности. М.: ИКИ АН СССР, 1987. Пр-1142. 23 с.