Метод Парных и Сингулярных Интегральных Уравнений в Задачах Дифракции на Ограниченных Решетках

Ю.В. Гандель
Механико-математический Факультет
Харьковский Государственный Университет

Содержание

Аннотация

В работе, на примере задач дифракции на решетке, состоящей из конечного числа бесконечно тонких лент, лежащих в одной плоскости, описан новый прямой численно – аналитический метод решения парных интегральных уравнений широкого класса краевых задач математической физики. Он основан на идее автора сведения парных интегральных уравнений с интегралами Фурье к сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков и последующем его решении прямым численным методом с использованием интерполяционных квадратур. Рассмотрены не только краевые задачи Дирихле и Неймана, а и задачи с третьим и четвертым граничными условиями на лентах решетки. Развитый подход к решению задач дифракции на решетках был успешно использован при построении математических моделей широкого класса краевых задач электродинамики, радиофизики, электроники.

Введение

В работе, на примере задач дифракции на решетке, состоящей из конечного числа бесконечно тонких лент, лежащих в одной плоскости, описан новый прямой численно аналитический метод решения парных интегральных уравнений широкого класса краевых задач математической физики. Он основан на идее автора [1] сведения парных интегральных уравнений с интегралами Фурье к сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков и последующем его решении прямым численным методом с использованием интерполяционных квадратур [2].

В дальнейшем, этот метод был использован для решения ряда смешанных краевых задач математической физики [3-5], а примененный численный метод существенно обобщен, что позволило построить эффективный метод приближенного решения граничных сингулярных интегральных уравнений (с ядрами Коши и Гильберта) широкого класса краевых задач электродинамики на цилиндрических структурах [6-8]. Этот метод строго обоснован в работах [9-11].

Задачам дифракции электромагнитных волн на ограниченных решетках посвящено много работ. Коротко о некоторых из них: в [12] с использованием методов теории аналитических функций парные уравнения сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на всей оси, в [13] для решения парных интегральных уравнений задач дифракции электромагнитных волн на лентах использован предложенный авторами подход с использованием спектральных операторов рассеивания; отметим также монографии [14-16], где интегральные уравнения рассматриваемой задачи теории дифракции получены методами теории потенциала, а также работу [17], где численно аналитический метод основан на применении изощренной техники работы с радами бесселевых функций. Обзор работ по численным методам решения сингулярных интегральных уравнений задач дифракции можно найти в [14,16], а также недавно вышедшей монографии [18].

Возвращаясь к содержанию настоящей работы, отметим, что в первых двух пунктах описан новый подход к решению парных интегральных уравнений на примере парных уравнений классических краевых задач электродинамики — дифракции H - и E - поляризованных волн на решетках из конечного числа идеально проводящих бесконечно тонких лент, лежащих в одной плоскости, причем как ширины лент так и расстояния между ними произвольны [19,20] (см. также первую главу работы [26]). Показано, что примененный метод сведения рассматриваемых задач к сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков позволяет аналогично решить более общие парные уравнения, к которым приводят задачи дифракции волн на решетках при наличии экранов, а также для систем решеток, расположенных в параллельных плоскостях. Показано, что полученные результаты применимы и к задачам дифракции электромагнитных волн на системах щелей в идеально проводящих бесконечно тонких экранах.

В третьем и четвертом пунктах впервые получено решение третьей и четвертой краевых задач дифракции на решетках в форме сингулярного интегрального уравнения того же вида, что и в описанных выше классических задачах. Это позволяет рассматривать проблемы дифракции на решетках из "импедансных" и анизотропных пленок.

Пятый и шестой пункты посвящены описанию численного решения полученного сингулярного интегрального уравнения первого рода на системе отрезков при естественных дополнительных условиях. Изложенный в настоящей работе численно аналитический метод оказался наиболее эффективным как раз в том случае, когда он наиболее необходим — в резонансном диапазоне.

В заключение отметим, что развитый здесь подход к решению задач дифракции на ограниченных решетках был успешно применен при построении математических моделей широкого класса краевых задач электродинамики, радиофизики, электроники [25-29].

1. Постановка задач, парные интегральные уравнения.

Решетка состоит из m непересекающихся лент, расположенных в одной плоскости. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось Ox была параллельна ребрам, а ось Oz — перпендикулярна плоскости решетки (рис. 1).

Сечение решетки плоскостью yOz изображено на рис. 2.

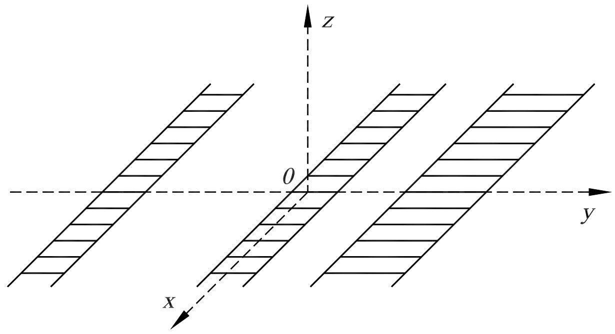

Рис. 1. Ограниченная ленточная решетка.

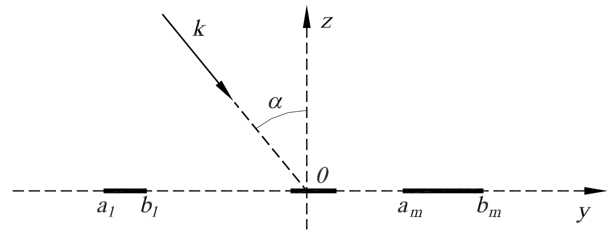

Рис. 2. Сечение решетки плоскостью yOz.

Обозначим Λ — множество точек пересечения этой плоскости с решеткой

$$\Lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ y \in \overline{\mathbb{L}},\ z = 0\},$$

где

$$\mathbb{L} = \bigcup_{p=1}^{m} \mathbb{L}_p, \quad \mathbb{L}_p = (a_p, b_p),$$

$$-\infty < a_1 < b_1 < \cdots < a_m < b_m < +\infty.$$

Введем еще обозначение для дополнения множества $\mathbb{L}$ до всей оси $\mathbb{R}$

$$C\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{L}.$$

Рассматриваются двумерные задачи об установившихся колебаниях электромагнитного поля

$$\vec{E}(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}(x, y)e^{-i\omega t}.$$

Оно представлено в виде суперпозиции двух линейно поляризованных вдоль оси Ox полей, а соответствующие проблемы дифракции приводят к краевым задачам для уравнения Гельмгольца

$$\triangle w + k^2 w = 0,\qquad w = w(x, y), (y, z) \in \Lambda, \quad (1.1)$$

$k = \dfrac{\omega}{c}$ — волновое число, с условием Дирихле на идеально проводящих лентах

$$w|_\Lambda = 0 \quad (1.2)$$

в случае E - поляризации ($w = E_x^{полн}$) и с условием Неймана

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_\Lambda = 0 \tag{1.3}$$

в случае H - поляризации ($w = H_x^{полн}$).

Здесь введены обозначения для x - вых составляющих полного поля. Полное поле представляют в виде суперпозиции "падающего" поля $w^{пад}$ (заданное решение уравнения Гельмгольца во всем пространстве), а также "рассеянного" поля w^+ над решеткой (при $z > 0$) и "дифрагированного" w^- под решеткой (при $z < 0$).

Терминология связана с важным частным случаем рассматриваемой задачи: дифракция плоской монохроматической волны, наклонно падающей на решетку из верхнего полупространства (угол падения равен α, см. рис. 2)

$$w^{пад} = e^{i(ky\sin\alpha - kz\cos\alpha)}. \tag{1.4}$$

Поскольку $w^\pm,\ z \gtrless 0$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, для $w^\pm$ имеем Фурье - представление

$$w^\pm = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C^\pm(\lambda) e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda) z} d\lambda,\ z \gtrless 0, \tag{1.5}$$

где

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2},\ Re\gamma \geq 0,\ Im\gamma \leq 0 \tag{1.6}$$

(такой выбор ветви радикала соответствует условиям излучения).

Для того, чтобы полное поле удовлетворяло уравнению (1.1) всюду вне лент должны выполняться условия сопряжения в "щелях"

$$w^+(y,0) = w^-(y,0),\ y \in C\mathbb{L}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial w^+}{\partial z}(y,0) = \frac{\partial w^-}{\partial z}(y,0),\ y \in C\mathbb{L}. \tag{1.8}$$

Граничное условие для полного поля на лентах имеет вид

$$w^\pm(y,0) = -w^{пад}(y,0),\ y \in \mathbb{L} \tag{1.9}$$

в случае E - поляризации, и

$$\frac{\partial w^\pm}{\partial z}(y,0) = -\frac{\partial w^{пад}}{\partial z}(y,0),\ y \in \mathbb{L} \tag{1.10}$$

в случае H - поляризации.

Наконец, условия Майкснера на ребре определяют класс решений рассматриваемых задач (см. п.п. 2,3).

В случае H - поляризации положим в представлении (1.5)

$$C^+(\lambda) = -C^-(\lambda) = C(\lambda)$$

и потребуем, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0,\ y \in C\mathbb{L},$$

тогда условия сопряжения (1.7) и (1.8) будут выполнены. Наконец, граничное условие Неймана (1.10) на лентах будет выполнено, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0,\ y \in \mathbb{L}.$$

Таким образом задача Неймана сведена к парному уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0,\ y \in C\mathbb{L}, \tag{1.11}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y),\ y \in \mathbb{L}, \tag{1.12}$$

где

$$f(y) = \frac{\partial w^{пад}}{\partial z}(y,0),\ y \in \overline{\mathbb{L}}.$$

В случае E - поляризации в представлении (1.5) положим

$$\gamma(\lambda) C^+(\lambda) = \gamma(\lambda) C^-(\lambda) = C(\lambda),$$

и действуя так, как в предыдущем случае, сведем задачу Дирихле к парному уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0,\ y \in C\mathbb{L}, \tag{1.13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)} = f(y),\ y \in \mathbb{L}, \tag{1.14}$$

где

$$f(y) = -w^{пад}(y,0),\ y \in \overline{\mathbb{L}}.$$

В заключение этого пункта покажем, что задача дифракции волн на конечном числе щелей в плоском бесконечно тонком идеально проводящем экране (см. рисунки 3 и 4) приводят к тем же парным уравнениям, что и рассмотренные выше задачи дифракции волн на ограниченной решетке.

В самом деле, обозначим $w_0 = w_0(y,z)$ — заданное решение уравнения Гельмгольца при $z > 0$, удовлетворяющее при $z = 0$ (и всех $y \in \mathbb{R}$) граничному условию вида (1.2) в случае E - поляризации, или (1.3) в случае H - поляризации, и будем искать полное поле в виде

$$w = \left\{ \begin{array}{r} w_0 + w^+,\ z > 0, \\ w^-,\ z < 0, \end{array} \right.$$

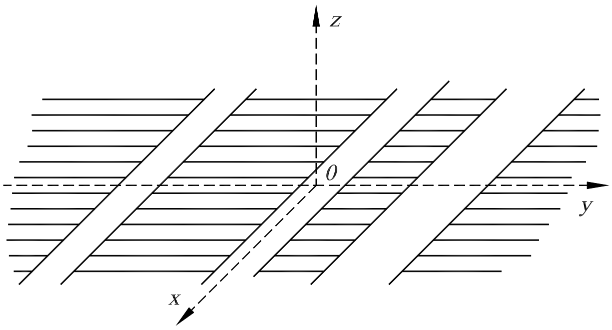

Рис. 3. Плоский экран с конечным числом щелей.

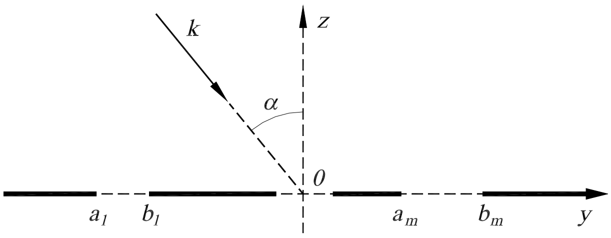

Рис. 4.

причем для $w^{\pm}, z \gtrless 0$ имеем Фурье - представления (1.5).

В случае E - поляризации положим в (1.5) $C^{+}(\lambda) = C^{-}(\lambda) = C(\lambda)$, а для нахождения $C(\lambda)$ имеем парное интегральное уравнение (1.11) - (1.12), где следует положить

$$f(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial z}(y,0),\ y \in \overline{\mathbb{L}}.$$

В случае H - поляризации $C(\lambda) = -\gamma(\lambda)C^{+}(\lambda) = \gamma(\lambda)C^{-}(\lambda)$, и для $C(\lambda)$ имеем парное интегральное уравнение (1.13) - (1.14), где

$$f(y) = w_0(y,0),\ y \in \overline{\mathbb{L}}.$$

Переходя к построению строгой теории решения полученных парных уравнений, прежде всего покажем, что каждое из них в соответствующем функциональном классе эквивалентно СИУ на системе отрезков.

2. Вывод сингулярного интегрального уравнения СИУ в случае H - поляризации.

Рассматривается парное интегральное уравнение (1.11) — (1.12). Введем в рассмотрение функцию

$$F(y) = \frac{\partial w^{+}}{\partial y}(y,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\lambda C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda,\ y \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Из уравнения (1.11) $w^{+}(y,0) = 0,\ y \in C\mathbb{L}$ следует

$$F(y) = 0,\ y \in C\mathbb{L} \quad (2.2)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{L}_q} F(\xi)d\xi = w^{+}(b_q) - w^{+}(a_q) = 0,$$
$$q = 1,...,m. \quad (2.3)$$

Из условий на ребре следует, что сужение функции $\dfrac{\partial w^{+}}{\partial y}(y,0)$ на отрезок $\mathbb{L}_q$ (обозначим эту функцию $F_q(y), a_q < y < b_q$) представимо в виде

$$F_q(y) = \frac{v_q(y)}{\sqrt{(y-a_q)(b_q-y)}},\ y \in \mathbb{L}_q,\ q = 1,...,m, \quad (2.4)$$

где $v_q(y),\ a_q \le y \le b_q$ — ограниченная функция.

Введем в рассмотрение класс D_0 функций $F(y),\ y \in \mathbb{R}$ сужение которых на $\mathbb{L}_q$ представимо в виде (2.4), где $v_q(y),\ a_q \le y \le b_q$ — непрерывная по Гельдеру функция; и выполняются условия (2.2), (2.3).

Используя формулу обращения для преобразования Фурье, из определения $F(y),\ y \in \mathbb{R}$ (2.1) для $F \in D_0$ получаем:

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{L}} F(\xi)\frac{e^{-i\lambda\xi}-1}{\lambda}d\xi, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Обратно, для любой функции $F \in D_0$, функция $C(\lambda)$, найденная по формуле (2.5), удовлетворяет уравнению (1.11).

Покажем теперь, что уравнение (1.12), где $C(\lambda)$ имеет вид (2.5), в классе D_0 эквивалентно СИУ на системе отрезков относительно функции $F(y),\ y \in \mathbb{L}$. Для этого перепишем уравнение (1.12) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \gamma(\lambda))C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda =$$
$$= f(y), y \in \mathbb{L}. \quad (2.6)$$

Первый интеграл выразим через $F(y),\ y \in \mathbb{L}$, используя параметрическое представление преобразования Гильберта [21]

$$G(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda, y \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\xi)d\xi}{\xi - y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda y}d\lambda, y \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

(справедливость которого вытекает из теоремы Рисса [21,22] для $G(y) \in L_p(\mathbb{R}),\ p > 1$). В самом деле, $F(y) = 0,\ y \in C\mathbb{L}$, а из представления (2.4) следует, что $F(y) \in L_p$ для любого $p < 2$, так что имеем

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\frac{d\xi}{\xi - y} = -\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda. \qquad (2.9)$$

Второй интеграл в (2.6) преобразуем, подставляя представление для $C(\lambda)$ (2.5) и применяя теорему Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \gamma(\lambda)) C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{L}} F(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \gamma(\lambda)) \frac{e^{i\lambda(y-\xi)} - e^{i\lambda y}}{2i\lambda} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{L}} \mathcal{K}(y-\xi) F(\xi) d\xi, \qquad (2.10)$$

где

$$\mathcal{K}(x) = \int_{0}^{\infty} (\lambda - \gamma(\lambda)) \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda. \qquad (2.11)$$

Подставим найденные выражения (2.9) и (2.10) в (2.6). Имеем СИУ для $F(y),\ y \in \mathbb{L}$

$$\frac{1}{\pi} V.P. \int_{\mathbb{L}} \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - y} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{L}} \mathcal{K}(y-\xi) F(\xi) d\xi = -f(y), y \in \mathbb{L} \qquad (2.12)$$

причем $F(\xi), \xi \in \mathbb{L}$ ищем в классе функций, представимых в виде (2.4) и удовлетворяющих m дополнительным условиям (2.3).

Однозначная разрешимость СИУ (2.12) в классе D_0 следует из его эквивалентности парному интегральному уравнению (1.11) — (1.12), а потому и исходной краевой задаче.

В заключение опишем более общую ситуацию, которая возникает во многих конкретных задачах о дифракции H - поляризованной волны на ограниченных структурах из тонких лент и экранов.

Рассматривается парное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, y \in C\mathbb{L}, \qquad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) V(\gamma) C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), y \in \mathbb{L}, \qquad (2.14)$$

где $V(\gamma), \lambda \in \mathbb{R}$ заданная достаточно гладкая функция, такая, что существует отличный от нуля предел

$$\lim_{\gamma \to +\infty} V(\gamma) \equiv V(\infty) \neq 0 \qquad (2.15)$$

и абсолютно сходится интеграл

$$\mathcal{K}(x) = \int_{0}^{\infty} (\lambda V(\infty) - \gamma V(\gamma)) \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda, \qquad (2.16)$$

причем $\mathcal{K}(x) \in C^{r,\alpha}$ (класс r раз непрерывно дифференцируемых функций, причем r-ая производная удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$). В частном случае, когда $V(\gamma) \equiv 1$, парное уравнение (2.13) - (2.14) было изучено выше. Действуя так же как в этом частном случае и используя свойства функции $V(\gamma), \lambda \in \mathbb{R}$ (2.15), (2.16) получим следующий результат.

Пусть функция $F(y), y \in \mathbb{L}$, принадлежащая классу D_0 (сужение $F(y)$ на $\mathbb{L}_q$ функция $F_q(y)$ представима в виде (2.4), где $v_q(y) \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{L}}_q)$, $q = 1, ..., m$; и выполняются дополнительные условия (2.3) является решением СИУ

$$\frac{V(\infty)}{\pi} VP \int_{\mathbb{L}} \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - y} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{L}} \mathcal{K}(y-\xi) F(\xi) d\xi =$$

$$= -f(y), y \in \mathbb{L} \qquad (2.17)$$

здесь константа $V(\infty)$ определена равенством (2.15), а гладкая функция $\mathcal{K}(x)$ — равенством (2.16).

Тогда функция $C(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ (2.5)

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{L}} F(\xi) \frac{e^{-i\lambda\xi} - 1}{\lambda} d\xi$$

является решением парного уравнения (2.13) — (2.14).

3. Вывод сингулярного интегрального уравнения в случае E — поляризации.

Приступая к выводу СИУ эквивалентного парному интегральному уравнению (1.13) — (1.14), обозначим

$$F(y) = w^{+}(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda,\ y \in \mathbb{R}. \qquad (3.1)$$

В силу (1.13)

$$F(y) = 0,\ y \in C\mathbb{L}. \qquad (3.2)$$

В соответствии с условиями на ребре, будем искать функцию $F(y),\ y \in \mathbb{L}$ в классе функций, сужение которых на $\mathbb{L}_q$ представимо в виде (2.4). Ясно, что $F(y) \in L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leq p < 2$, и из (3.1) с учетом (3.2) получаем представление для $C(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ через искомую функцию $F(\xi), \xi \in \mathbb{L}$

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{L}} F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в левую часть уравнения (1.4) и учитывая, что функции $F(\xi), \xi \in \mathbb{R}$ и

$$\frac{e^{i\lambda y}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

принадлежат L_p при любом $1 < p < 2$, воспользуемся равенством Парсеваля [22] и поменяем порядок интегрирования. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda \gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{L}} Q(|y-\xi|) F(\xi) d\xi, \quad (3.4)$$

где

$$Q(|x|) = \frac{i}{\pi} \int_0^k \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda,$$

и, используя интегральные представления [23] Пуассона для функций Бесселя с индексом нуль

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

и Мелера - Сонина для функции Неймана с нулевым индексом и положительным аргументом

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2 - 1}} dt,\ x > 0,$$

окончательно получаем интегральное уравнение первого рода для искомой функции

$$\frac{i}{2} \int_{\mathbb{L}} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|y-\xi|) F(\xi) d\xi = f(y),\ y \in \mathbb{L} \quad (3.5)$$

с ядром, имеющим логарифмическую особенность: здесь $\mathcal{H}_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода, индекса нуль. Учитывая, что $\frac{d}{dx}\mathcal{H}_0^{(1)}(x) = -\mathcal{H}_1^{(1)}(x)$, получаем: уравнение (3.5) в рассматриваемом классе функций эквивалентно СИУ

$$\frac{1}{2i} VP \int_{\mathbb{L}} k \mathcal{H}_1^{(1)}(k|y-\xi|) \frac{|y-\xi|}{y-\xi} F(\xi) d\xi = \\ = f^{'}(y),\ y \in \mathbb{L} \quad (3.6)$$

с m дополнительными условиями

$$\frac{1}{2i} VP \int_{\mathbb{L}} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|y_q - \xi|) F(\xi) d\xi = \\ = f(y_q),\ q = 1, ..., m, \quad (3.7)$$

где y_q произвольная фиксированная точка интервала $\mathbb{L}_q$, а из представления для функции Ханкеля $\mathcal{H}_1^{(1)}(x)$ первого рода, индекса один следует, что

$$\frac{ki}{2} \mathcal{H}_1^{(1)}(k|x|) \frac{|x|}{x} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x} + G(x),$$

где $G(x)$ — гладкая функция. Проведенный вывод СИУ существенно использует конкретные представления цилиндрических функций и неприменим для более общих парных уравнений, встречающихся в теории дифракции E - поляризованной волны на ограниченных ленточных структурах при наличии экранов, а также при решении родственных задач дифракции акустических волн.

При рассмотрении более общего парного уравнения можно воспользоваться идеей выделения сингулярного слагаемого в ядре, предложенного в предыдущем параграфе. Рассматривается парное интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0,\ y \in C\mathbb{L}, \quad (3.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} V(\gamma) \frac{d\lambda}{\gamma} = f(y),\ y \in \mathbb{L}, \quad (3.9)$$

где гладкая функция $V(\gamma)$ обладает такими свойствами: существует предел

$$\lim_{\gamma \to +\infty} V(\gamma) \equiv V(\infty) \neq 0 \quad (3.10)$$

и интеграл

$$\mathcal{K}(x) = \int_0^{\infty} (V(\infty) - \frac{\lambda}{\gamma(\lambda)} V(\gamma)) \sin \lambda x d\lambda \quad (3.11)$$

абсолютно сходится.

Заметим, что изученное выше парное уравнение (1.13) — (1.14) является частным случаем рассматриваемого при $V(\gamma) \equiv 1$. Очевидно, что условия (3.10) и (3.11) выполнены, причем модуль подинтегральной функции в (3.11) удовлетворяет асимптотическому условию

$$1 - \frac{\lambda}{\gamma(\lambda)} \sim \frac{k^2}{2\lambda^2},\ \lambda \to +\infty.$$

Приступая к доказательству эквивалентности парного уравнения (3.8) — (3.9) СИУ с дополнительными условиями введем, как и выше, функцию

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda,\ y \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

удовлетворяющую условиям (2.4) и равную нулю вне $\mathbb{L}$. Тогда (3.12) эквивалентно такому представлению для $C(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{L}} F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.13)$$

Далее, уравнение (3.9) эквивалентно уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} V(\gamma) \frac{i\lambda d\lambda}{\gamma(\lambda)} = f^{'}(y),\ y \in \mathbb{L}, \quad (3.14)$$

с m дополнительными условиями

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda y_q}V(\gamma)\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)} = f(y_q),\ q = 1, ..., m, \quad (3.15)$$

где y_q — произвольная фиксированная точка интервала $\mathbb{L}_q$.

Функциональный класс D, в котором будем работать, определим следующим образом: сужение $F_q(y)$ функции $F(y)$ из $\mathbb{L}_q$ представимо в виде

$$F_q(y) = \frac{v_q(y)}{\sqrt{(y-a_q)(b_q-y)}},\ a_q < y < b_q, \quad (3.16)$$

где $v_q(y), a_q \le y \le b_q$ функция непрерывная по Гельдеру, и выполняются условия $F(y) = 0,\ y \in C\mathbb{L}$;

$$\int\limits_{\mathbb{L}} Q(|y_q - \xi|)F(\xi)d\xi = f(y_q),\ q = 1, ..., m, \quad (3.17)$$

где

$$Q(|x|) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} V(\gamma)\frac{\cos\lambda x}{\gamma(\lambda)}d\lambda,$$

которые в классе D эквивалентны соотношениям (3.15) и получаются, как и выше, подстановкой в них выражения (3.13) с последующей переменой порядка интегрирования (здесь $F(y) \in L_p(\mathbb{R}),\ \frac{V(\gamma)}{\gamma} \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < 2$).

Перепишем уравнение (3.14) в виде

$$V(\infty)\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)i\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda y}d\lambda +$$
$$+ i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\gamma}V(\gamma) - \frac{\lambda}{|\lambda|}V(\infty)\right)C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda =$$
$$= f'(y),\ y \in \mathbb{L}. \quad (3.18)$$

Из параметрического представления преобразования Гильберта (2.7) — (2.8) с учетом (3.8) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)i\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda y}d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi - y}.$$

Второй интеграл в (3.18) тождественно преобразуем, используя представление (3.13) для $C(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ и, применяя теорему Фубини

$$i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{\lambda}{\gamma}V(\gamma) - \frac{\lambda}{|\lambda|}V(\infty))C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi, \quad (3.19)$$

где

$$\mathcal{K}(x) = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}V(\infty) - \frac{\lambda}{\gamma}V(\gamma)\right)\sin\lambda x d\lambda. \quad (3.20)$$

Подставляя полученное тождество в (3.18), получаем СИУ

$$\frac{V(\infty)}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi - y} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi =$$
$$= f'(y),\ y \in \mathbb{L} \quad (3.21)$$

решение которого ищем в классе D.

Сформулируем полученные результаты в такой форме.

Пусть функция $F(y)$, $y\in\mathbb{L}$, принадлежащая классу D (выполняются условия (3.16), (3.17)), является решением сингулярного интегрального уравнения (3.20). Тогда решение парного интегрального уравнения (3.8) — (3.9) выражается по формуле (3.13) через $F(y)$, $y\in\mathbb{L}$.

И, обратно, если $C(\lambda)$ — решение парного уравнения (3.8) — (3.9) такое, что функция $F(y) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda$, принадлежит классу D, то эта функция удовлетворяет уравнению (3.20).

Оба результата, для краткости, будем формулировать так: парное интегральное уравнение (3.8) — (3.9) в классе функций D эквивалентно сингулярному интегральному уравнению (3.20).

4. Третья краевая задача.

Построенная выше теория парных интегральных уравнений, к которым приводят задачи Неймана и Дирихле позволяет свести третью и четвертую краевые задачи для уравнения Гельмгольца в рассматриваемых областях также к СИУ первого рода на системе отрезков. Поскольку речь идет о конкретных задачах — ограничимся формальным выводом граничных уравнений. Настоящий параграф посвящен третьей краевой задаче: вместо граничного условия (1.2) или (1.3) на лентах должна обращаться в нуль линейная комбинация полного поля и его нормальной производной

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial z} + \beta w\Big|_{\lambda} = 0, \quad \alpha\beta \ne 0, \quad (4.1)$$

где α и β — заданные комплексные константы, причем соответствующая краевая задача для уравнения Гельмгольца однозначно разрешима.

Полное поле ищем в виде

$$w = w + w^{\pm}, \quad z \lessgtr 0, \quad (4.2)$$

где для $w^{\pm}$ имеем Фурье–представления (1.5), причем всюду вне лент выполняются условия сопряжения в "щелях" (1.7) и (1.8), а граничное условие на лентах (4.1) принимает вид

$$\alpha\frac{\partial w^+}{\partial z}(y,0)+\beta w^+(y,0)= \\ =\alpha\frac{\partial w^-}{\partial z}(y,0)+\beta w^-(y,0)=f(y),\ y\in\mathbb{L}, \quad (4.3)$$

где

$$f(y)=-\Big(\alpha\frac{\partial w}{\partial z}(y,0)+\beta w(y,0)\Big),\ y\in\mathbb{L}.$$

В терминах Фурье–представлений соотношения (1.7), (1.8) записываются так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in C\mathbb{L}, \quad (4.4)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in C\mathbb{L}. \quad (4.5)$$

Из (4.3) — (4.5) следует, что

$$\alpha\gamma\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)=\beta\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big),\quad \lambda\in\mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Далее введены обозначения:

$$U(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in\mathbb{R}, \quad (4.7)$$

$$F(y)=U^{'}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\lambda\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in\mathbb{R}, \quad (4.8)$$

$$G(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in\mathbb{R}. \quad (4.9)$$

В силу (4.4)

$$U(y)=0,\quad y\in C\mathbb{L} \quad (4.10)$$

$$F(y)=0,\quad y\in C\mathbb{L} \quad (4.11)$$

$$\int\limits_{a_q}^{b_q}F(\xi)d\xi=0,\quad q=1,...,m. \quad (4.12)$$

Наконец, из (4.6) следует, что

$$\alpha G(y)=\beta U(y),\quad y\in\mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Для выполнения условий Майкснера требуем, чтобы искомая функция $F(y)$, $y\in\mathbb{L}$ принадлежала функциональному классу определяемому представлениями (2.4).

Переходя к выводу, СИУ перепишем краевое условие (4.3) в терминах Фурье–представлений

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda+ \\ +\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda= \\ =2f(y),\ y\in\mathbb{L}. \quad (4.14)$$

Используя результаты, полученные в п.п.2 и 3 выпишем представления для интегралов, входящих в (4.14), содержащие введенные выше функции $F(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}$ и $G(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}$

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda= \\ =\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi-y}+\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi, \quad (4.15)$$

где $\mathcal{K}(x)$ определено формулой (2.11),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}\frac{d\lambda}{\gamma}= \\ =\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{H}_0^{(1)}(k|y-\xi|)G(\xi)d\xi.$$

Теперь уравнение (4.14) с учетом (4.13) можно переписать так

$$\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi-y}+\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi \\ +\frac{i\beta^2}{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{H}_0^{(1)}(k|y-\xi|)U(\xi)d\xi= \\ =2f(y),\ y\in\mathbb{L}.$$

Далее, интегрируя в последнем интеграле по частям и учитывая (4.9), получаем окончательно СИУ для функции $F(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi-y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi+ \\ +\frac{i\beta^2}{2\alpha^2}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}_1(y,\xi)F(\xi)d\xi=\frac{2}{\alpha}f(y),\ y\in\mathbb{L}, \quad (4.16)$$

где

$$\mathcal{K}_1(y,\xi)=\int\limits_{0}^{\xi}\mathcal{H}_0^{(1)}(k|y-\tau|)d\tau, \quad (4.17)$$

причем, $\mathcal{K}_1(y,\xi)$ принадлежит гельдеровскому классу с любым показателем, меньшим единицы.

Решение СИУ первого рода (4.16) следует искать в классе функций, определяемом условиями (4.12) и представлениями (2.4).

Таким образом, показано, что и третья краевая задача сводится к решению СИУ того же типа, что и первая, в том же функциональном классе.

В заключение заметим, что второй интеграл в (4.14) можно преобразовать непосредственно, используя выражение для

$$C^+(\lambda)+C^-(\lambda) \tag{4.18}$$

$$C^+(\lambda)+C^-(\lambda)=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{C^+(\lambda)-C^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)} \tag{4.19}$$

и явное выражение для $C^+(\lambda)-C^-(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, вытекающее из определения (4.8) и свойств (4.11), (4.12)

$$C^+(\lambda)-C^-(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{L}}F(\xi)\frac{e^{-i\lambda\xi}-1}{\lambda}d\xi. \tag{4.20}$$

Имеем

$$\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda$$
$$=\frac{\beta^2}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}=$$
$$=\frac{\beta^2}{\pi\alpha}\int\limits_{\mathbb{L}}F(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(y-\xi)}-e^{i\lambda y}}{2i\lambda}\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}$$
$$=\frac{\beta^2}{\pi\alpha}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}_3(y-\xi)F(\xi)d\xi,$$

где

$$\mathcal{K}_3(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}. \tag{4.21}$$

Так что уравнение (4.16) можно записать и в такой форме

$$\frac{1}{\pi}VP\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{\xi-y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{\beta^2}{\pi\alpha^2}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}_3(y-\xi)F(\xi)d\xi=\frac{2}{\alpha}f(y),\quad y\in\mathbb{L}.$$

После того, как СИУ с дополнительными условиями будет решено, искомые функции $C^+(\lambda)$, $C^-(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ могут быть найдены из (4.6) и (4.18).

5. Четвертая краевая задача.

Рассмотрим граничную задачу для уравнения Гельмгольца с условием: на лентах задана линейная комбинация нормальной и тангенциальной производных полного поля:

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial z}+\delta\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{\Lambda}=0 \tag{5.1}$$

где α и δ – заданные константы, причем $\alpha\neq 0$.

Ограничимся формальным выводом граничного интегрального уравнения.

Как и в предыдущем параграфе, полное поле ищем в виде (4.2), (1.5).

Всюду вне лент при $z=0$ выполняются условия сопряжения (1.7) и (1.8), а граничное условие (5.1) на лентах можно записать в виде

$$\alpha\frac{\partial w^+}{\partial z}(y,0)+\delta\frac{\partial w^+}{\partial y}(y,0)=$$
$$=\alpha\frac{\partial w^-}{\partial z}(y,0)+\delta\frac{\partial w^-}{\partial y}(y,0)=f(y),\quad y\in\mathbb{L} \tag{5.2}$$

где положено

$$f(y)=-\Big(\alpha\frac{\partial w}{\partial z}(y,0)+\delta\frac{\partial w}{\partial y}(y,0)\Big),\ y\in\overline{\mathbb{L}}.$$

В терминах Фурье–представлений условия сопряжения выписаны в п.4, формулы (4.4), (4.5), а граничное условие (5.2) перепишем в виде

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^+(\lambda)\gamma(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda+$$
$$+\delta\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^+(\lambda)i\lambda e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^-(\lambda)\gamma(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda+$$
$$+\delta\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^-(\lambda)i\lambda e^{i\lambda y}d\lambda=f(y),\quad y\in\mathbb{L}. \tag{5.3}$$

Из (4.4), (4.5), (5.3) вытекает, что

$$\alpha\gamma(\lambda)\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)=$$
$$=\delta i\lambda\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big),\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Как и в п.4, введем в рассмотрение функции $U(y)$ и $F(y), y\in\mathbb{L}$, определяемые формулами (4.7)–(4.8). Эти функции удовлетворяют условиям (4.10)–(4.12).

Переходя к выводу граничного интегрального уравнения, перепишем краевое условие (5.2) в терминах Фурье–представлений

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda+$$

$$+\delta\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\lambda\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=2f(y),\quad y\in\mathbb{L}$$

и, с учетом (5.4), придадим ему такой вид

$$(\alpha^2+\delta^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}d\lambda+$$

$$+k^2\delta^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}=$$

$$=-2\alpha f(y),\quad y\in\mathbb{L}.$$

Первый интеграл выражается через $F(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}$ по формуле (4.15), а второй, используя соображения, изложенные в п.п.3 и 4, выразим через $U(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}$ следующим образом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\Big)e^{i\lambda y}\frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}=$$

$$=\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{H}_0^{(1)}(k|y-\xi|)U(\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}_1(y,\xi)F(\xi)d\xi,$$

где $\mathcal{K}_1(y,\xi)$ выражается по формуле (4.17) через функцию Ханкеля первого рода, индекса нуль. Окончательно уравнение (5.5) примет такой вид

$$\frac{\alpha^2+\delta^2}{\pi}VP\int\limits_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)d\xi}{y-\xi}+\frac{\alpha^2+\delta^2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(y-\xi)F(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{k^2\delta^2}{2i}\int\limits_{\mathbb{L}}\mathcal{K}_1(y,\xi)F(\xi)d\xi=$$

$$=-2\alpha f(y),\quad y\in\mathbb{L},\quad (5.5)$$

где $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$, заданные гладкие функции, определенные выше выражениями (2.11) и (4.17), соответственно. Это СИУ решается при дополнительных условиях (4.12).

6. Схема численного решения СИУ на системе отрезков.

Все задачи, встретившиеся нам до сих пор, были сведены к СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{L}}Q(y,\xi)F(\xi)d\xi=f(y),\quad y\in\mathbb{L},\qquad(6.1)$$

где $\overline{\mathbb{L}}$ — объединение непересекающихся отрезков $\overline{\mathbb{L}}_q=[a_q,b_q]$, $q=1,\cdots,m$; $f(y)$, $y\in\overline{\mathbb{L}}$ — заданная гладкая функция;

$$Q(y,\xi)=\frac{1}{\xi-y}+\mathcal{K}(y,\xi)$$

причем, $\mathcal{K}(y,\xi)$, $y\in\overline{\mathbb{L}}$, $\xi\in\overline{\mathbb{L}}$ — заданная непрерывная по Гельдеру функция.

Решение этого уравнения на каждом из интервалов $\mathbb{L}_q$ ищется в виде

$$F(\xi)\Big|_{\mathbb{L}_q}=f_q(\xi)=\frac{v_q(\xi)}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}},\quad a_q<\xi<b_q\qquad(6.2)$$

причем должен выполняться один из двух наборов дополнительных условий

$$\int\limits_{a_q}^{b_q}F(\xi)d\xi=0,\quad q=1,...,m\qquad(6.3)_0$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{L}}\Phi_p(\xi)F(\xi)d\xi=C_p,\quad p=1,...,m,\qquad(6.3)$$

где

$$\Phi_p(\xi)=\ln|\xi-y_p|+h_p(\xi),$$

$y_p\in\mathbb{L}_p$ — фиксированное число, а $h_p(z)$, $\xi\in\overline{\mathbb{L}}$ — непрерывная по Гельдеру функция.

6.1. Остановимся сначала на задаче (6.1), $(6.3)_0$. Численное решение было предложено в работе [2] (см. также монографию [17]).

Вводятся отображения

$$g_p:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{L}_p:t\longmapsto\xi=$$

$$=\frac{b_p-a_p}{2}t+\frac{b_p+a_p}{2},\quad p=1,...,m$$

и для дискретизации уравнения (6.1) и дополнительного условия (6.3) используются гауссовы квадратуры. Имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения приближенных значений функции $v_q(\xi)$ в представлении (6.2) для $F_q(\xi)=F(\xi)\Big|_{\mathbb{L}_q}$, $q=1,...,m$

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_q}Q\Big(y_{pj}^{n_{pi}},\xi_q^{n_q}\Big)v_q^{n_q}(\xi_{qi}^{n_q})\frac{1}{n_q}=$$

$$=f(y_{pj}^{n_p}),\ j=1,...,n_p-1\quad(6.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n_p}v_p^{n_p}(\xi_{pi}^{n_p})=0,\quad(j=n_p),\quad p=1,2,...,m\quad(6.5)$$

где $n_1, ..., n_m$ — заданные натуральные числа,

$$\xi_{qi}^{n_q} = g_q(t_i^{n_q}),\ t_i^{n_q} = \cos\frac{2i-1}{2n_q}\pi,\ i = 1, ..., n_q$$

$$y_{pj}^{n_q} = g_p(t_{0j}^{n_p}),\ t_{oj}^{n_p} = \cos\frac{j}{n_p}\pi,$$

$$j = 1, ..., n_p - 1;\ q, p = 1, ..., m.$$

СЛАУ содержит $(n_1 - 1) + \cdots + (n_m - 1) + m = n_1 + \cdots + n_m$ уравнений относительно $n_1 + \cdots + n_m$ неизвестных $v_q^{n_q}(\xi_{qi}^{n_q})$, $i = 1, ..., n_q$, $q = 1, ..., m$ — "$\overline{n}$–ому приближении" искомых функций $v_q(\xi)$ (вычисленному в узлах интерполирования), определяемому вектором $\overline{n} = (n_1, ..., n_m)$ с целочисленными компонентами n_q, равными числу узлов на соответствующем отрезке $\mathbb{L}_q$.

6.2. В случае, когда строится численное решение задачи (6.1), (6.3) (со вторым набором дополнительных условий, см. [10], [11]), дискретизация дополнительных условий производится с использованием квадратурной формулы интерполяционного типа

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} p(t)\ln|t - t_0|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(t_i^n)\Big(\ln 2 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r}T_r(t_i^n)T_r(t_0)\Big)$$
$$t_0 \in (-1, 1),$$

где $p(t)$ — алгебраический многочлен степени $n-1$.

В этом случае в дополнение к $(n_1 - 1) + \cdots + (n_m - 1)$ линейным алгебраическим уравнениям (6.4) имеем вместо (6.5) еще m уравнений (результат дискретизации условий (6.3)).

$$\sum_{q=1;q\neq p}^{m}\sum_{i=1}^{n_q}\frac{1}{n_q}\Phi_p(\xi_{qi}^{n_q})v_q^{n_q}(\xi_{qi}^{n_q}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n_p}\frac{1}{n_p}\Big(h_p(\xi_{pi}^{n_p}) + \ln\frac{b_p - a_p}{4} -$$
$$-2\sum_{i=1}^{n_p-1}\frac{1}{r}T_r(t_i^{n_p})T_r\Big(\frac{2y_p - b_p - a_p}{b_p - a_p}\Big)\Big)v_p^{n_p}(\xi_{pi}^{n_p}) = C_p$$
$$p = 1, \cdots, m.$$

6.3. При вычислении коэффициентов СЛАУ, кроме значений элементарных и "хорошо табулированных" специальных функций [24], возникает необходимость вычислить с достаточно высокой точностью приближенные значения интегралов вида

$$\mathcal{K}(x) = \int\limits_0^\infty\Big(V(\infty)\lambda - V(\gamma)\gamma\Big)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}d\lambda \qquad (6.6)$$

(где $V(\gamma)$ — гладкая функция, причем при $\gamma\to+\infty$ $V(\gamma)\sim V(\infty) + \frac{C_1}{\gamma^2} + \frac{C_2}{\gamma^4} + \cdots$).

Возможности "ускорения сходимости" несобственных интегралов такого типа рассмотрим на примере важнейшего частного случая (при $V(\gamma)\equiv 1$).

$$\mathcal{K}_0(x) = \int\limits_0^\infty(\lambda - \gamma(\lambda))\frac{\sin\lambda x}{\lambda}d\lambda. \qquad (6.7)$$

Воспользуемся выражением через интегральный косинус [24] такого интеграла

$$\mathcal{I}_2(x) = \int\limits_x^\infty\frac{\sin t}{t^2}dt = \frac{\sin x}{x} - Ci(x), \quad x > 0.$$

Имеем при $x > 0$

$$x\mathcal{K}_0(x) = \int\limits_0^{kx}(t + i\sqrt{(kx)^2 - t^2})\frac{\sin t}{t}dt + \frac{kx}{2}\sin kx -$$
$$-\frac{(kx)^2}{2}Ci(kx) + \int\limits_{kx}^\infty b(t)\sin t dt,$$

где

$$b(t) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{kx}{t}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{kx}{t}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{kx}{t}\right)^4 + \sum_{m=3}^\infty\frac{(2m-3)!!}{(2m)!!}\left(\frac{kx}{t}\right)^{2m},\ t > kx,$$

и речь идет о вычислении последнего интеграла.

Пусть $n\in\mathbb{N}$ такое, что $\pi n > kx$. Тогда

$$\int\limits_{kx}^\infty b(t)\sin t dt = \int\limits_{kz}^{\pi n} b(t)\sin t dt + r_n,$$

а для r_n имеет место оценка

$$r_n < \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} b(t)dt < \frac{\pi}{8}\Big(\frac{kx}{\pi n}\Big)^4 + O\Big(\Big|\frac{kx}{\pi n}\Big|^6\Big).$$

Дальнейшее "ускорение сходимости" несобственного интеграла, который приходится вычислять, может быть получено аналогично с использованием интегралов

$$\mathcal{I}_{2m}(x) = \int\limits_x^\infty\frac{\sin t}{t^{2m}}dt, \quad x > 0, \quad m\in\mathbb{N},$$

которые вычисляются при $m > 1$ последовательно по формуле

$$\mathcal{I}_{2(m+1)}(x) =$$
$$= \frac{\sin x}{(2m+1)x^{2m+1}} + \frac{\cos x}{2m(2m+1)x^{2m}} - \frac{1}{2m(2m+1)}\mathcal{I}_{2m}(x) \qquad (6.8)$$

(выражение для $\mathcal{I}_2(x)$ приведено выше).

6.4. Что касается вычисления значений элементарных и высших трансцендентных функций (тригонометрических, цилиндрических и др.), то используются формулы высокой точности, основанные на специальных разложениях этих функций по полиномам Чебышева, приведенные в уже упоминавшемся современном справочнике по аппроксимации специальных математических функций [24]. В этом справочнике содержатся таблицы, приспособленные для использования их на ЭВМ, в памяти которых они занимают минимальный объем.

Эта работа была частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP), грант № APU051030

Список литературы

[1] Гандель Ю.В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков: Вища школа. - 1983. - Вып. 40. - С. 33 - 36.

[2] Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков// там же, С. 104 - 110.

[3] Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. Численное решение смешанных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. - Препринт Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, - №174 - М. - 1984. - 55 с.

[4] Гандель Ю.В., Логвинов Ю.И. О численном решении методом дискретных особенностей некоторых смешанных краевых задач стационарной теплопроводности // Вестн. Харьк. ун-та. Пробл. управления и механики сплошных сред. - 1995. - N 277. - С. 78 - 85.

[5] Гандель Ю.В. Парные и сингулярные интегральные уравнения смешанных краевых задач для уравнения Гельмгольца в полупространстве. В сб.: Республ. конф. посвященная 200 - летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. Тезисы докладов, ч. 2. Одесса, 1992. - С. 61 - 62.

[6] Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Основание метода дискретных особенностей для систем сингулярных интегральных уравнений, к которым сводятся смешанные краевые задачи математической физики // Харьков. ун - т, Деп. Укр. НИИНТИ. - 1984. - N 720 - Ук. - 84 - 34 с.

[7] Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. - М.: Изд. АН СССР, 1986. - ВК N 124. - с. 166 - 183.

[8] Gandel Yu. V., Polyanskaya T. S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary - Value Problems of Mathematical Physics // Journal of Soviet Mathematics. — New York, 1990. — Volum 48, №2. — P. 144 — 152.

[9] Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. Учебное пособие. Харьков: Изд. ХГУ, 1991. — 67 с.

[10] Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч.П. — Харьков: Изд. ХГУ, 1992. — 145 с.

[11] Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Полянская Т.С. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции // Дифференциальные уравнения, 1995, Т. 31, №9. – С. 1501 – 1506.

[12] Сологуб В.Г. Об одном методе исследования задачи о дифракции на конечном числе лент, расположенных в одной плоскости // Докл. АН СССР. Сер. А, 1975, №6. — С. 550 — 554.

[13] Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. — Киев: Наук. думка, 1984. — 239 с.

[14] Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. — К.: Наук. думка, 1984. — 344 с.

[15] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики: Учебн. пособие. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. — 167 с.

[16] Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. — К.: Наук. думка, 1989. — 256 с.

[17] Tsalamengas J.L., Fikioris J.G. Efficient solutions for scattering from strips and slots in the presence of a dielectric half - space: Extension to wide scatterers. I. Theory. II. Applications // J. Appl. Phys. — V. 70, №3, August 1991. — P. 1121 — 1131, 1132 — 1143.

[18] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). — М.: ТОО "Янус", 1995. — 520 с.

[19] Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на ограниченной ленточной решетке. В сб. Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов VI Международного симпозиума. Ч. I. Харьков, май 1993. — С. 119 — 120.

[20] Dushkin V., Gandel Yu., Morozova N. Numerical realisation for the diffraction problems on multielement gratings // Proceeding of the Internationel Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. — Kharkov, 1994. — P. 95 — 98.

[21] Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях. — Харьков: Харьк. ун-т, 1984. — 120 с.

[22] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – М. - Л.: ИЛ, 1949. – 479 с.

[23] Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966. — 295 с.

[24] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.

[25] Гандель Ю. В. Математические модели в электродинамике на основе теории парных уравнений и метода дискретных особенностей. В сб.: Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов VI Международного симпозиума. Ч. I. — Харьков, май 1993. — С. 16 — 17.

[26] Гандель Ю. В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы. Дис... доктора физ.-мат. наук. Х.: ХГУ, 1994. — 359 с.

[27] Гандель Ю. В., Сидельников Г. Л. Математические модели для численного анализа дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем // Журнал Технической физики, 1995, Т. 65, В. 7. — С. 143 — 153.

[28] Гандель Ю. В., Стрельченко В. А. Сингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на ленточных диафрагмах в волноводе // Ўнтегральнў перетворення та ?х застосування до крайових задач. — Ки?в: Ўн-т математики НАН Укра?ни, 1995. — Вип. 9. — С. 154 — 161.

[29] Gandel' Yu. V., Zaginailov G. I. Rigorous numerical technique for simulation of relativistic electron beam (REB) radiation processes near a finite length grating // Abstract Submitted for the 22nd IEEE International Conference on Plasma Science, June 5 — 8 1995. Madison, Wisconsin, USA. — P. 280.