

Некорректность Задачи о Динамическом Хаосе. Регуляризация

Половин Р.В., Демуцкий В.П.

Харьковский Государственный Университет,

Научный физико-технологический центр Министерства образования и НАН Украины.

Содержание

| | |
|------------------------------------|-----|
| 1. Введение. | 156 |
| 2. Хаотизация и перемешивание. | 157 |
| 3. Аналитически решаемая модель. | 157 |
| 3.1. Вычисление корреляций. | 158 |
| 3.2. Решение разностных уравнений. | 158 |
| 3.2.1. Разрывная функция. | 159 |
| 3.2.2. Непрерывная функция. | 159 |
| 4. Корректность. | 160 |

Аннотация

На примере модели динамического хаоса, допускающей аналитическое решение, показывается, что задача о скорости затухания корреляций некорректна. Эта задача становится корректной, если корректность понимать не по Адамару, а по Тихонову. Приводятся соображения, указывающие на то, что при определении корреляций следует в качестве исходных функций выбирать кусочно-гладкие, т.е. разрывные функции.

1. Введение.

Вопрос о хаотизации в детерминированной механической системе возник после создания молекулярно-кинетической теории, ставившей себе целью механическое объяснение термодинамических и кинетических процессов [1-6].

Несколько десятилетий назад было обнаружено, что динамический хаос возникает также в детерминированных системах с малым числом степеней свободы [7-10]. Вскоре оказалось, что динамический хаос является не исключением, а правилом. Примеры динамического хаоса обнаружены практически во всех разделах физики [11-15]. В последнее время существенно возрос интерес к изучению хаоса в динамических системах с малым числом степеней свободы [7-10, 16-18].

Теоретические исследования хаотизации проводились большей частью с использованием ЭВМ. Однако использование численных методов мало-пригодно для исследования наиболее интересной, а именно, заключительной стадии хаотизации - процесса хаотизации по прошествии достаточно боль-

шого промежутка времени от начального момента. Накопление ошибок при таких вычислениях делает численные методы проигрышными в наглядности при анализе экспериментальных данных, оценке перспектив и поисках возможных путей оптимизации различных устройств в сравнении с аналитическими методами исследований. Но в силу нелинейности уравнений динамического хаоса аналитические результаты были получены лишь в отдельных случаях [19-22].

В отдельных работах (напр., в работе [22]) показано, что корреляция $C(f, g, t)$ двух произвольных функций фазовых точек $f(x)$ и $g(x)$ (x -вектор состояния системы) убывает по экспоненциальному закону:

$$C(f, g, t) = A(f, g) \exp(-\nu t). \quad (1)$$

Здесь ν "скорость хаотизации", определяемая свойствами динамической системы (показателями Ляпунова). Однако, в статьях Н. Frish [23], Crawford, Cary [24] показано, что скорость хаотизации зависит не только от свойств динамической

системы, но и от гладкости функций $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$. Иными словами, они показали, что бесконечно малое возмущение функций $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ существенно изменяет корреляцию, в том числе и скорость затухания корреляции. А это означает, что задача о вычислении корреляций некорректна. Эта некорректность ставит под сомнение не только теорию динамического хаоса, но и всю физическую кинетику.

Цель настоящей работы – показать, что задача о затухании корреляций поддается регуляризации, т.е. является корректной не по Адамару [25], а по Тихонову [26].

2. Хаотизация и перемешивание.

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой в момент времени t характеризуется d -мерным вектором $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)) \quad (2)$$

Мерой "памяти" системы в момент времени $t > 0$ о состоянии в начальный момент времени $t = 0$ является корреляция $C(t)$:

$$C(t) \equiv [f(\vec{x}(t)) - \langle f(\vec{x}(t)) \rangle] \cdot [g(\vec{x}(0)) - \langle g(\vec{x}(0)) \rangle] \quad (3)$$

Здесь $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ - две произвольные функции и угловые скобки означают усреднение по фазовому объему:

$$\langle \varphi(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{V(\Gamma)} \int_{\Gamma} dx_1 dx_2 \dots dx_d \varphi(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad (4)$$

где $V(\Gamma)$ - объем всего фазового пространства Γ . Пользуясь определением среднего (4), выражение (3) для корреляции можно упростить:

$$C(t) = \langle f(\vec{x}(t))g(\vec{x}) \rangle - \langle f(\vec{x}(t)) \rangle \langle g(\vec{x}) \rangle \quad (5)$$

(здесь $\vec{x}(0) \equiv \vec{x}$)

Одним из проявлений динамического хаоса является стремление корреляции к нулю по прошествии достаточно большого промежутка времени от начального момента (условно $\rightarrow \infty$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0 \quad (6)$$

В системе с сохраняющимся фазовым объемом:

$$\det \frac{dx_i(t)}{dx_j} = 1, \quad (7)$$

затухание корреляций (6) означает перемешивание фазового объема. В самом деле, пусть в начальный момент времени ($t=0$) известно только то, что она находилась в области Γ_i . Тогда плотность вероятности в начальный момент времени равна:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{V(\Gamma_i)}, & \text{if } \vec{x} \in \Gamma_i \\ 0, & \text{if } \vec{x} \notin \Gamma_i \end{cases} \quad (8)$$

где $V(\Gamma_i)$ - объем области Γ_i . Вероятность того, что в момент времени $t > 0$ фазовая точка будет находиться в области Γ_f , равна

$$p = \langle f(\vec{x}(t))g(\vec{x}) \rangle \quad (9)$$

где $g(\vec{x})$ - характеристическая функция области Γ_f ,

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \vec{x} \in \Gamma_f \\ 0, & \text{if } \vec{x} \notin \Gamma_f \end{cases} \quad (10)$$

Величина $\langle f(\vec{x}(t)) \rangle$, входящая в формулу (5), равна единице в силу сохранения фазового объема (7). Величина $\langle g(\vec{x}) \rangle$, также входящая в формулу (5), равна, очевидно,

$$\langle g(\vec{x}) \rangle = \frac{V(\Gamma_f)}{V(\Gamma)} \quad (11)$$

Поэтому затухание корреляций означает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle f(\vec{x}(t))g(\vec{x}) \rangle = \frac{V(\Gamma_f)}{V(\Gamma)} \quad (12)$$

Иными словами, вероятность того, что фазовая точка находится в области Γ_f , равна отношению объема области Γ_f , $V(\Gamma_f)$ к объему всего фазового пространства Γ , $V(\Gamma)$. Это и означает перемешивание.

Заметим, что при перемешивании функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ играют различную роль. А именно, функция $f(\vec{x})$ (точнее, объем области Γ_i , $V(\Gamma_i)$, в которой она отлична от нуля), характеризует начальную неопределенность, тогда как функция $g(\vec{x})$ (точнее, объем $V(\Gamma_f)$ области Γ_f , в которой она отлична от нуля) характеризует погрешность "измерительного прибора".

3. Аналитически решаемая модель.

С течением времени t фазовая точка $\vec{x}(t)$ многократно проходит через сечение Пуанкаре:

$$\vec{x}^{(t+1)} = T \vec{x}^{(t)} \quad (13)$$

Здесь T -заданный нелинейный оператор, а \vec{x} - точка фазовой плоскости, соответствующая t -му прохождению траектории через сечение Пуанкаре. Вместо исследования функции непрерывного времени $\vec{x}(t)$ будем описывать динамическую систему последовательностью фазовых точек $\vec{x}^{(t)}, \vec{x}^{(t+1)}, \dots$, т.е. перейдем к дискретному времени t . При этом корреляция (5) принимает вид:

$$C(t) = \langle g(\vec{x})T^t f(\vec{x}) \rangle - \langle g(\vec{x}) \rangle \langle T^t f(\vec{x}) \rangle \quad (14)$$

Здесь T^t - t -кратное применение преобразования (13).

Чтобы лучше представить себе ситуацию, ограничимся случаем двумерного фазового пространства и рассмотрим модель динамического хаоса, допускающую аналитическое решение (D-мерная модель была исследована в работе [22]).

Аналитическое решение возможно при выполнении следующих трех условий: 1. Преобразование

$$\vec{x}^{(t)} \rightarrow \vec{x}^{(t+1)} \quad (15)$$

является преобразованием кусочно-линейного вида

$$x_i^{(t+1)} = \{\alpha_{ij}x_j^{(t)}\} \quad (16)$$

Здесь α_{ij} - константы; $i, j = 1, 2$ по повторяющимся индексам производится суммирование; символ $\{\dots\}$ означает дробную часть числа. Подчеркнем, что преобразование (16) является нелинейным, так как оно неинвариантно относительно замены $\vec{x}^{(t)} = \mu \vec{x}^{(t)}$ ($\mu = const$).

2. Элементы матрицы - целые числа,

$$\{\alpha_{ij}\} = 0 \quad (17)$$

3. Функция $f(\vec{x})$ зависит только от одной пространственной координаты, скажем, от x_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \quad (18)$$

Вместе с тем, мы будем полагать, что функция $g(\vec{x})$ зависит от обеих координат:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0, \frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0, \quad (19)$$

Нарушение последнего условия (при одновременном выполнении условия (18)) приводит к тому, что "измерительный прибор" является слишком грубым: он регистрирует перемешивание, т.е. равенство корреляции нулю, $C(t) = 0$, уже после первого шага.

Выражение (16) означает, что мы рассматриваем преобразование тора [27]. Благодаря условию 2, операция взятия дробной части коммутирует с операцией

$$\vec{x}^{(t)} \rightarrow \vec{x}^{(t+1)}. \quad (20)$$

Поэтому в выражениях (16) можно временно опустить символ $\{\dots\}$. При этом нелинейные соотношения сводятся к системе линейных разностных уравнений

$$\vec{x}^{(t+1)} = \alpha_{ij}\vec{x}^{(t)}, \quad (21)$$

для решения которой можно воспользоваться хорошо разработанными методами [28]. После решения этих уравнений, в окончательном результате следует заменить $\vec{x}^{(t)}$ на $\{\vec{x}^{(t)}\}$.

3.1. Вычисление корреляций.

Разложим функцию $f(x_1)$ в ряд Фурье

$$f(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \exp(2\pi i m x_1) \quad (22)$$

где

$$f_m = \int_0^1 dx_1 f(x_1) \exp(-2\pi i m x_1) \quad (23)$$

В силу соотношений (16)

$$f(\vec{x}^{(t)}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \exp(2\pi i m (\alpha_{11}^t x_1 + \alpha_{12}^t x_2)), \quad (24)$$

где α_{ij}^t - элементы t -ой степени матрицы α_{ij} . Согласно определению корреляции (5)

$$C(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 g(x_1 x_2) \cdot \exp(2\pi i m (\alpha_{11}^t x_1 + \alpha_{12}^t x_2)). \quad (25)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что опускается слагаемое с $m=0$.

3.2. Решение разностных уравнений.

Для нахождения элементов матрицы необходимо решить систему разностных уравнений (16). Линейные разностные уравнения решаются аналогично линейным дифференциальным уравнениям. Мы ограничимся рассмотрением стандартного отображения [7]

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}, \quad (26)$$

причем для простоты и конкретизации вычислений остановимся на частном случае этого отображения, а именно, случае "кота Арнольда" ($k = 1$):

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Система уравнений (21) имеет частные решения вида:

$$\begin{aligned} x_1^{(t)} &= A_1 \lambda^t \\ x_2^{(t)} &= A_2 \lambda^t \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя эти выражения в (21), находим два значения (собственные значения матрицы (27)):

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \quad (29)$$

Общее решение системы (21) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(t)} &= A_1^+ \lambda_+^t + A_1^- \lambda_-^t \\ x_2^{(t)} &= A_2^+ \lambda_+^t + A_2^- \lambda_-^t \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из (21) следует, что:

$$A_2^+ = \frac{\lambda_+ - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_1^+, \quad (31)$$

$$A_2^- = \frac{\lambda_- - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_1^-. \quad (32)$$

Подставляя в (30) $t = 0$ и используя выражения (31), находим

$$\alpha_{11}^t = \frac{sh t L - sh(t-1)L}{sh L} \quad (33)$$

$$\alpha_{12}^t = \frac{sh t L}{sh L} \quad (34)$$

Здесь

$$L = \ln \lambda_+ \quad (35)$$

- показатель Ляпунова. При $t \rightarrow \infty$ для требуемых компонент матрицы α_{ij}^t получаем:

$$\alpha_{11}^t = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-L}}{sh L} \exp t L \quad (36)$$

$$\alpha_{12}^t = \frac{1}{2sh L} \exp t L \quad (37)$$

3.2.1. Разрывная функция.

В качестве первого примера для вычисления скорости хаотизации выберем обе функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ в виде разрывных функций:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}; (0 \leq x_2 \leq 1) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (38)$$

и

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}; (0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (39)$$

При этом для функции $f(\vec{x}^{(t)})$ получим

$$f(\vec{x}^{(t)}) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)} \cdot \sin[2\pi(2l+1)(\alpha_{11}^t x_1 + \alpha_{12}^t x_2)] \quad (40)$$

Подставляя это выражение в формулу для корреляции (5) и используя при этом значение (38) для функции $g(\vec{x})$, получим:

$$C(t) = \frac{1}{2\pi^3 \alpha_{11}^t \alpha_{12}^t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^3} \cdot [\sin \frac{2\pi}{3}(2l+1)\alpha_{11}^t + \sin \frac{2\pi}{3}(2l+1)\alpha_{12}^t - \sin \frac{2\pi}{3}(2l+1)(\alpha_{11}^t + \alpha_{12}^t)] \quad (41)$$

Подставляя в эту формулу асимптотические выражения (35) и (36) для соответствующих компонент матрицы α_{ij}^t , получим асимптотику корреляции $C(t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$C(t) = B(t) \exp(-2Lt), \quad (42)$$

где

$$B(t) = \begin{cases} \pm \frac{sh^2 L}{24(1-e^{-L})} att = 4N \pm 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (43)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

Мы видим, что в данном примере скорость убывания корреляции равна $2L$:

$$\nu = 2L \quad (44)$$

Иными словами, скорость хаотизации в данном примере равна умноженному на полную размерность фазового пространства максимальному показателю Ляпунова.

3.2.2. Непрерывная функция.

Пусть теперь $f(\vec{x})$ по-прежнему является разрывной и определяется выражением (38). Что же касается функции $g(\vec{x})$, то ее полагаем непрерывной по одной переменной, скажем, x_1 . Пусть, например, функция $g(\vec{x})$ определяется выражениями,

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} x_1, & \text{if } 0 \leq x_1 \leq \varepsilon; 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{if } \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{3} - \varepsilon; 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\varepsilon}(\frac{1}{3} - x_1), & \text{if } \frac{1}{3} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (45)$$

В этом случае вычисление корреляции $C(t)$ приводит к результату:

$$C(t) = \frac{1}{4\pi^4} \frac{1}{(\alpha_{11}^t)^2 \alpha_{12}^t \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4} \cdot \{ \cos[2\pi(2l+1)\alpha_{11}^t \cdot \varepsilon] + \cos[2\pi(2l+1)(\frac{1}{3} - \varepsilon)\alpha_{11}^t] + \cos[2\pi(2l+1)\frac{\alpha_{11}^t + \alpha_{12}^t}{3}] + \cos[2\pi(2l+1)\frac{\alpha_{12}^t}{3} - 1 - \cos[2\pi(2l+1)(\alpha_{11}^t \cdot \varepsilon + \frac{\alpha_{12}^t}{3})] - \cos[2\pi(2l+1)((\frac{1}{3} - \varepsilon)\alpha_{11}^t + \frac{\alpha_{12}^t}{3})] - \cos[2\pi(2l+1)\frac{\alpha_{11}^t}{3}] \} \quad (46)$$

Асимптотика корреляции в этом случае имеет вид:

$$C(t) = D(t) \exp(-3Lt), \quad (47)$$

где $D(t)$ - быстро осциллирующая ограниченная функция

$$|D(t)| < \frac{Sh^2L}{48\varepsilon(1 - e^{-L})}. \quad (48)$$

Таким образом, если функция $g(\vec{x})$ непрерывна по одной из переменных (по x_1), скорость хаотизации равна $3L$:

$$\nu = 3L. \quad (49)$$

Итак, мы получили разные скорости хаотизации в двух случаях. Но эти два случая при малых ε , как это следует из выражений (38) и (44), близки друг к другу. Это означает, что бесконечно малое изменение функции $g(\vec{x})$ вызывает существенное изменение скорости корреляции. Иными словами, задача о нахождении корреляции некорректна.

Отметим попутно, что, в противоположность термодинамике, стремление корреляций (41) и (46) к нулю никогда не бывает монотонным даже по прошествии как угодно большого промежутка времени.

4. Корректность.

Математическая задача называется корректной по Адамару, если выполняются следующие три условия [25]:

1. Решение существует.
2. Решение единственно.
3. Решение непрерывно зависит от исходных данных.

Как было показано в предыдущем разделе, задача об определении скорости хаотизации некорректна, так как две бесконечно близкие функции $g(\vec{x})$, определяемые выражениями (39) и (45), приводят к двум различным скоростям хаотизации (44) и (47).

Нам представляется, что в данном случае корректность следует понимать не по Адамару, а по Тихонову [26]. Иными словами, некорректную по Адамару задачу следует регуляризовать. Регуляризация состоит в сужении класса допустимых исходных данных (начальных функций). Например, задача Коши для уравнения Лапласа становится корректной, если решения искать в классе ограниченных функций [29].

В случае задачи о затухании корреляций регуляризация основана на том факте, что почти все взятые наугад функции разрывны (за исключением множества меры нуль). Это рассуждение аналогично выводу о несоизмеримости частот при условно-периодическом движении [30,31].

Таким образом, пренебрегая множеством меры нуль, можно сказать, что почти все функции разрывны. Поэтому регуляризирующий алгоритм в задаче о скорости хаотизации состоит в том, что в качестве начальных функций и следует выбрать функции, имеющие разрывы первого рода. В кинетической теории это соответствует заданию начального состояния в виде "грубого" распределения: μ - пространство ¹ разбито на ячейки и заданы числа частиц в каждой ячейке [5]. "...Делаемые нами предположения о частности различных случаев и о вероятностях состояний являются предположениями о функциях распределения, описывающих вероятность обнаружить различные микроскопические состояния внутри области Γ -пространства ², определяемой заданным макроскопическим состоянием.

Очевидно также, что эти предположения носят характер утверждений о равномерности распределения внутри малых интервалов -пространства и внутри соответствующих областей Γ -пространства. Только предположения такого типа позволяют нам, в частности, применять в кинетической теории обычную формулу для числа соударений [5, стр.22]."

Таким образом, в задаче о скорости затухания корреляций следует брать исходные функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ кусочно-постоянными. При этом, как мы видели в разделе 6., в случае двумерного фазового пространства скорость затухания корреляций равна удвоенному максимальному показателю Ляпунова L : $\nu = 2L$. В случае же d -мерного фазового пространства скорость затухания корреляций равна [22]: $\nu = dL$.

Список литературы

- [1] H.Poincare. J.d.Phys, 1906, v.4(5), p.369.
- [2] N.N.Bogoliubov. Problemi dinamicheskoi teorii v statisticheskoi fizike (Gostekhizdat, Moscow, 1946).
- [3] J.Gibbs. Osnovnie principii statisticheskoi mehaniki (GTTI,1946).
- [4] E.Hopf. Uspekhi matematicheskikh nauk. v.4, 1949, p.113.
- [5] N.S.Krilov. Raboti po obosnovaniyu statisticheskoi fiziki (Izd-vo USSR Acad. of Sci., Moscow-Leningrad, 1950).
- [6] J.Mozer. Stable and random motions in dynamical system (Princeton Univ.Press, Princeton, New Jersey, 1973).

¹ фазовое пространство одной частицы

² фазовое пространство всей системы.

- [7] B.V.Chirikov. Phys.Rev., v.52, 1979, p.263.
- [8] G.M.Zaslavsky. Chaos in Dynamical Systems. (Harward, New York, 1985).
- [9] I.P.Kornfeld, Ia.G.Sinai, S.V.Fomin Ergodicheskaja teория. (Moscow, Nauka, 1980).
- [10] A.V.Gaponov-Grehov, M.I.Rabinovich. Uspekhi fizicheskikh nauk, v.128, 1979, p.579.
- [11] G.M.Zaslavski, R.Z.Sagdeed. Vvedenie v nelineinuiu fiziku ot maiatnika do turbulentsnosti.(Fizmatlit, Moscow, 1988).
- [12] A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman. Regular and Stochastic Motion.-Applied Mathematical Sciences, v.38 (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [13] D.M.Sonechkin. Stokhastichnost v modeliah obshei circuliacii. -L.Gidrometeoizdat, 1984, p.202.
- [14] V.S.Anishenko. Stokhasticheskie kolebania v radiofizicheskikh sistemah (Saratov, izd-vo SGU, 1985, 1986, parts 1 and 2).
- [15] N.F.Shulga. Regularnost i haos v fizike vzaimodeistvia zariazhennih chastic s kristallami (Problemi teor. fiziki, Kiev, Naukova dumka, 1986, p.298-313).
- [16] S.V.Manakov. O polnoi integriruемости i stokhastizacii v diskretnih dinamicheskikh sistemah.-JETP, 1974 v.67, iss.2, p.543-555.
- [17] Iu.I.Neimark, P.S.Landa. Stokhasticheskie i haoticheskie kolebania.-Moscow,Fizmatlit,1987, 424 pp.
- [18] D.E.Escande. Stochasticity in Classical Hamiltonian Systems:universal aspects.- Phys.Rep., v.121, 1985, N3,4, pp.165-261.
- [19] I.A.Bunimovich, Y.G.Sinai. Statistical Properties of Lorentz Gas with Periodic Cofiguration of Scatterers. -Commun.Math.Phys., v.78, 1981, N4, p.479-497.
- [20] T.Nogashima, H.Haken. - Phys.Lett., v.96A, 1983, 385.
- [21] R.Graham.-Phys.Rev.A, v.28,1983, p.1679.
- [22] V.P.Demutski, R.V.Polovin- Sov. J. Techn. Phys.,v.61, 1991, p.1.
- [23] H.Frish.-Phys.Rev.,v.109, 1958, p.22.
- [24] J.D.Crawford, J.R.Cary-Physica. 6D, 1983, p.223.
- [25] V.I.Arnol'd and A.Avez. Ergodical Problems in Classical Mechanics (W.A.Benjamin, New York, 1968).
- [26] G.E.Shilov. Konechnomernie lineynie prostranstva.-M.:Nauka, 1969, p.305.
- [27] S.G.Krein.-Dokladi AN SSSR, v.114, 1957, p.1162.
- [28] A.N. Kolmogorov.-Dokladi AN SSSR, v.98, 1954, p.527.
- [29] V.I.Arnold. - Uspekhi Matematicheskikh Nauk. v.18, 1963, p.13.