От Уравнений Максвелла до Фазы Берри и Сонолюминисценции: Проблемы Теории Электромагнитного и Других Безмассовых Полей

Ю.П.Степановский
Институт теоретической физики
ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт" НАН Украины

Аннотация

Обсуждаются принципиальные проблемы теории релятивистских безмассовых полей, такие, как уравнения полей и их квантование, существование локальных плотностей энергии и других физических величин, нарушение причинности в релятивистской квантовой теории. Подчеркивается выделенная роль электромагнитного поля среди других безмассовых полей.

.

Это было лучшее изо всех времен, это было худшее изо всех времен; это был век мудрости, это был век глупости; это была эпоха веры, это была эпоха безверия; это были годы Света, это были годы Мрака; это была весна надежд, это была зима отчаяния; у нас было все впереди, у нас не было ничего впереди...
Ч.Диккенс, "Повесть о двух городах".

Этими словами Ч.Диккенса Е.М.Корсон охарактеризовал состояние физики элементарных частиц в начале 60-ых [1]. И трудно было бы лучше, чем это сделал Диккенс, описать то время (начало 70-ых), когда я и мои сверстники впервые появились в ХФТИ.Тогда мы и познакомились с Р.В.Половиным, которому было уже за 30 (нам было чуть за 20). В это время в 1ЖЭТФ'е одна за другой выходили статьи Р.В.,по одной из работ Р.В. [2], вошедшей в классику теоретической физики, мы учились делать расчеты в квантовой электродинамике. Р.В. интересовало все: основания математики, основы теории относительности и квантовой механики, философские проблемы физики и биологии, вопросы преподавания. Более 20 лет Р.В. проводил философские семинары теоретических отделов. О чем только не говорилось на этих философских семинарах! Так, например, в 1966 году мы обсуждали статью Р.Фейнмана [3], в которой Фейнман говорил о том, что сомнение — это сущность знания, что свобода сомневаться, завоеванная в тяжелой борьбе с церковью, имевшей решение всех проблем, абсолютно необходима для развития науки. Фейнман говорил: "Я верю, что наибольшая опасность, которая угрожает современному обществу, — это возрождение и распространение идей контроля над мыслями, идей, которые были у Гитлера, у Сталина в его время, у католической религии в средние века, в Китае сегодня". Сейчас уже трудно себе представить, насколько крамольными казались такие высказывания в 1966 г., но видно, что не только о физике мы читали в физических журналах, что наши мысли уже слабо контролировались, хотя еще и контролировались: то, что разрешалось читать на английском, на русском было недоступно. Так, в 1974 мы обсуждали статью М.Гарднера [4], переведенную на русский язык только в 1990 году [5]. В этой статье речь шла о нобелевском лауреате К.Арроу, доказавшем "теорему о невозможности демократии". Арроу доказал, что в принципе невозможны демократические выборы. Он сформулировал совершенно естественные "аксиомы демократии" и доказал их несовместность. Согласно Арроу, идеальная демократия недостижима из-за внутреннего логического противоречия исходных принципов. Но понимание того, почему невозможна идеальная демократия, помогает совершенствованию общества, стремящегося к демократии. Со временем нам становились близки слова Ф.С.Фитцджеральда (эти слова вполне мог бы сказать и Н.Бор): "Подлинная культура проверяется способностью одновременно удерживать в голове две прямо противоположные идеи" [6]. Под влиянием мягкого юмора Р.В. наши порой слишком резкие суждения становились менее категоричными. Мы стали хорошо понимать слова М.Борна: "Раскрепощение мышления представляется мне величайшим благом, которое может дать нам современная наука... Вера в то, что существует только одна истина и что она уже постигнута, кажется мне главной причиной всех зол на Земле" [7].

Хотелось бы подчеркнуть, что тонкое чувство юмора Р.В., которым, в частности, проникнута одна из его последних публикаций [8], — явление более важное, чем кажется на первый взгляд. "Основное правило — никакой звериной серьезности. Для серьезного развития серьезных наук нет ничего пагубнее звериной серьезности. Нужен юмор и некоторая издевка над собой и над науками" [9]. Прислушаемся к мнению другого биолога: "... сегодня мы еще относимся к юмору недостаточно серьезно. Я полагаю, что он является благотворной силой... и что эта сила находится в процессе не только культурного развития, но и эволюционного роста... я верю, что возрастающее знание даст человеку подлинные идеалы, а в равной степени возрастающая сила юмора поможет ему высмеять ложные" [10].

Я упомянул только об одной стороне нашего общения с Р.В., время философских семинаров прошло, так же, как прошло время научных семинаров, научных, научно-популярных и литературных журналов и многого другого, хорошего и плохого. Жизнь продолжается, и в нашей новой жизни, какой бы она ни была, нам будет недоставать Р.В. с его неистребимым интересом к науке,с его неистощимым юмором, с его философским пониманием происходящего.

Дальнейшая, научная часть статьи написана так, как считал полезным писать научные статьи Р.В., [8]. Предполагается, что цитаты, эпиграфы, исторические замечания не мешают, а помогают восприятию научного содержания статьи.

1. Введение.

В дзэн-буддийском монастыре одному из учеников не терпелось задать учителю вопрос. Учитель с осуждением посмотрел на него и сказал ученикам: "Посмотрите на этого дурака! У него есть вопрос, и он хочет его задать!"

Эту притчу рассказал епископ Никандр в Дубне в 1990 году, когда ОИЯИ организовал первую совместную конференцию физиков, философов и священнослужителей. Епископ Никандр хотел сказать, что счастлив человек, у которого есть вопросы, на которые он не знает ответа. Но мы почему-то не хотим быть счастливыми... В настоящей статье, в основном, рассматриваются некоторые старые вопросы, ответы на которые нас все еще не удовлетворяют. Обсуждаются вопросы о локализации энергии электромагнитного, гравитационного и других безмассовых полей. Рассматриваются проблемы, связанные с локализацией полей, причинностью, поляризацией вакуума и излучением фотонов. Рассмотрение, наряду с электромагнитным, других безмассовых полей позволяет лучше понять свойства электромагнитного поля, разобраться в том, что присуще исключительно электромагнитному полю, а что характерно для всех безмассовых полей. Для полноты и связности текста в статье кратко изложены элементы теории полей с массой нуль.

В начале статьи сравнивается несколько формулировок уравнений Максвелла: обычная, векторная; формулировка с помощью 2x2 матриц, эквивалентная кватернионной формулировке; релятивистская и общековариантная формулировки; формулировка с помощью грассмановых переменных. Сравнение уравнений Максвелла с уравнениями Вейля позволяет ввести волновую функцию фотона, состоящую из шести комплексных компонент. Далее кратко обсуждаются свойства электромагнитного и гравитационного полей как калибровочных, вводятся понятия индуцированного электромагнетизма и гравитации. Рассматриваются уравнения Максвелла в форме Майорана. Обсуждается понятие спиральности безмассовых частиц, рассматриваются уравнения слабых гравитационных волн в форме Бронштейна. Подробно обсуждается свойство релятивистской инвариантности спиральности, вопрос о том, должна ли масса фотона равняться нулю. Рассматриваются бесконечнокомпонентные уравнения Дирака без отрицательных энергий. С помощью расширенной малой группы Лоренца выводятся волновые уравнения безмассовых полей с произвольным спином. Обсуждаются теорема Пенроуза о спинорах и теорема Вейнберга-Виттена о безмассовых полях. Показывается, что энергия классических полей и их квантов в общем случае не обладает локальной плотностью, но обладает билокальными плотностями. Приводится выражение для билокальной плотности слабых гравитационных волн. Обсуждаются проблемы, связанные с локализацией и причинностью в релятивистской квантовой механике. Рассматриваются проявления геометрических фаз при распространении света по искривленным траекториям. Обсуждается явление превращения звука в свет — сонолюминесценция — как проявление эффекта Казимира — изменения свойств вакуума под влиянием внешних условий.

Нужно отметить, что рассматриваемые в статье вопросы, такие как, что же считать волновой функцией фотона, вопросы теории релятивистских волновых уравнений, проблемы локализации и причинности в релятивистской квантовой механике, сонолюминесценция и др., несмотря на то, что многие из них возникли еще в первые годы возникновения квантовой механики, оживленно обсуждаются и в настоящее время [11-21].

Я благодарен Г.А.Афанасьеву (г.Дубна, ОИЯИ) за долгие и полезные обсуждения многих из рассмотренных в статье вопросов и за предоставленную им возможность ознакомиться с последней литературой по

обсуждаемым вопросам.

2. Уравнения Максвелла в кватернионной форме записи.

Мне незачем здесь говорить, до каких чудес развилось радио... Первоисточник же этих чудес —- уравнения Максвелла в кватернионных операторах Гамильтона...
А.Н.Крылов, [22].

А.Н.Крылов немного лукавил. Не любил он кватернионы и векторное исчисление [23]. Но фундаментальную науку уважал, считал своим долгом ее защищать и ради этого готов был покривить душой. И защищал фундаментальную науку блестяще! Рассказывал о том, как правильно поступил Кембриджский университет, не осудив своего профессора экспериментальной физики за то, что "он занимается не своим делом, а фантастическим применением сугубо мнимых кватернионов", что "никто не осмелился сделать даже намек на порицание Максвеллу". А.Н. ярко описал, как благодаря Максвеллу, кватернионам Гамильтона и "преподавателю минного класса А.С.Попову" был спасен броненосец "Генерал-адмирал Апраксин", который "во время штурмовой снежной пурги... с полного хода вылез на скалы о.Гогланда" [22].

Рассмотрим уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле в вакууме (будем пользоваться единицами, в которых $c = \hbar = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\vec{E}, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0, \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \quad \mathrm{rot}\vec{H}, \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_i &= -\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} E_l, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} H_i = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} E_i &= \quad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_l, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} E_i = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где ε_{ikl} — единичный, полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Как было замечено еще в начале века [24], запись уравнений Максвелла можно упростить, если ввести комплексную величину

$$\vec{\psi} = \vec{E} - i\vec{H}. \tag{3}$$

Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{\psi}, \qquad \mathrm{div}\vec{\psi} = 0. \tag{4}$$

А.Н.Крылов любил записывать векторные уравнения покомпонентно. Поступим так и мы. А.Н.Крылов цитировал лорда Кельвина:"Векторы сберегают мел и расходуют мозг. Когда при координатном вычислении вы получили первое уравнение из трех, то остальные два вы получаете, делая как бы машинально круговую перестановку букв. В это время ваш мозг отдыхает. Когда же три полученных уравнения заменяются одним уравнением векториальным, то ваш мозг этого отдыха лишен. Иными словами, при векторном исчислении вы сберегаете мел и утомляете мозг "[23]. Итак, не утомляя мозг, мы получим из уравнений (4) ($x_4 \equiv it, \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \mu = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \partial_3\psi_2 - \partial_2\psi_3 + \partial_4\psi_1 = 0, \\ \partial_1\psi_3 - \partial_3\psi_1 + \partial_4\psi_2 = 0, \\ \partial_2\psi_1 - \partial_1\psi_2 + \partial_4\psi_3 = 0, \\ \partial_1\psi_1 + \partial_2\psi_2 + \partial_3\psi_3 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Четыре уравнения (5) могут быть записаны в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_3 & -\psi_2 & -\psi_1 \\ -\psi_3 & 0 & \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 0 & -\psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Однако нетрудно проверить, что все шестнадцать нижеследующих уравнений, получающихся при перемножении двух 4x4 матриц, также сводятся к четырем уравнениям Максвелла (5):

$$\begin{pmatrix} \partial_4 & \partial_3 & -\partial_2 & -\partial_1 \\ -\partial_3 & \partial_4 & \partial_1 & -\partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_1 & \partial_4 & -\partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_3 & -\psi_2 & -\psi_1 \\ -\psi_3 & 0 & \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 0 & -\psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Разобьем матрицы (7) на блоки из 2x2 матриц следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \partial_4 & \partial_3 \\ -\partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\partial_2 & -\partial_1 \\ \partial_1 & -\partial_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \partial_2 & -\partial_1 \\ \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \partial_4 & -\partial_3 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \psi_3 \\ -\psi_3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\psi_2 & -\psi_1 \\ \psi_1 & -\psi_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \psi_2 & -\psi_1 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3 \\ \psi_3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) = 0 \tag{8}$$

и обратим внимание на то, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ эквивалентны комплексным числам $a+bi$. Теперь мы можем переписать уравнения (8) в виде

$$\begin{pmatrix} \partial_4 + i\partial_3 & -\partial_2 - i\partial_1 \\ \partial_2 - i\partial_1 & \partial_4 - i\partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\psi_3 & -\psi_2 - i\psi_1 \\ \psi_2 - i\psi_1 & -i\psi_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Или вводя 2x2 матрицы τ_i, эквивалентные кватернионным единицам Гамильтона [25],

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

получим кватернионную запись уравнений Максвелла [26]:

$$(\partial_4 + \vec{\tau}\vec{\partial})\vec{\tau}\vec{\psi} = 0. \tag{11}$$

Переходя от матриц τ_i к общепринятым в квантовой механике матрицам Паули [27],

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

мы можем записать уравнения Максвелла в виде, эквивалентном (1) и (11), причем двумя различными способами. Вводя величины

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_R &= \vec{E} + i\vec{H}, \\ \vec{\psi}_L &= \vec{E} - i\vec{H}, \end{aligned} \tag{13}$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{\psi}_R}{\partial t} &= \ \ \mathrm{rot}\vec{\psi}_R, \quad \mathrm{div}\vec{\psi}_R = 0, \\ \frac{\partial\vec{\psi}_L}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\vec{\psi}_L, \quad \mathrm{div}\vec{\psi}_L = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

и в виде, эквивалентном (11),

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\vec{\sigma}\vec{\psi}_R = 0, \\ &(\tfrac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\vec{\sigma}\vec{\psi}_L = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Каждое из уравнений (15) содержит в себе все восемь уравнений Максвелла (1). Эти уравнения очень похожи на уравнения Вейля для нейтрино и антинейтрино, их двойственность соответствует тому, что кванты электромагнитного поля — фотоны — могут обладать правыми (R) и левыми (L) круговыми поляризациями. Матрицы Паули удовлетворяют соотношениям, эквивалентным соотношениям для кватернионных единиц Гамильтона,

$$\begin{aligned} &\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \\ &\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \\ &\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \\ &\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2, \end{aligned} \tag{16}$$

или в компактной форме

$$\sigma_i\sigma_k = \delta_{ik}I + i\varepsilon_{ikl}\sigma_l. \tag{17}$$

3. Уравнения Максвелла в общековариантной форме и грассмановы переменные.

Математику можно определить как предмет, занимаясь которым вы никогда не знаете, о чем вы разговариваете, и не знаете, истинно ли то, что вы говорите.
Б.Рассел, [28].

Сами говорите, что математик, но разговариваете не на их собачьем языке, а так, будто всю жизнь были физиком.
Комплимент, сказанный М.А.Леонтовичем Ю.А.Данилову, [29].

Отметим еще один способ записи уравнений Максвелла. Матрица, состоящая из компонент ψ_i в соотношении (6) — это ни что иное как лоренцковариантный антисимметричный тензор в пространстве Минковского $\psi_{\mu\nu} = -\psi_{\nu\mu}$ с компонентами

$$\psi_{ik} = \varepsilon_{ikl}\psi_l, \qquad \psi_{i4} = -\psi_{4i} = -\psi_i. \tag{18}$$

Этот тензор обладает свойством

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma}, \tag{19}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — единичный полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{1234} = 1$. Благодаря последнему свойству каждое из написанных ниже уравнений эквивалентно уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu\psi_{\rho\sigma} + \partial_\rho\psi_{\sigma\mu} + \partial_\sigma\psi_{\mu\rho} = 0, \qquad \partial_\nu\psi_{\mu\nu} = 0. \tag{20}$$

Введем четыре антикоммутирующие грассмановы переменные θ_μ,

$$\theta_\mu\theta_\nu + \theta_\nu\theta_\mu = 0. \tag{21}$$

Введем, далее, величины

$$\partial \equiv \partial_\mu\theta_\mu, \qquad \psi \equiv \psi_{\mu\nu}\theta_\mu\theta_\nu. \tag{22}$$

Теперь уравнения Максвелла (20) могут быть представлены в следующей компактной форме записи, эквивалентной формулировке уравнений Максвелла на языке дифференциальных форм [30],

$$\partial\psi = 0. \tag{23}$$

Хорошо известно, следующее свойство полной системы уравнений Максвелла,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\vec{E}, & \mathrm{div}\vec{B} &= 0, \\ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} &= \mathrm{rot}\vec{H} - 4\pi\vec{j}, & \mathrm{div}\vec{D} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы электрического и магнитного полей, а $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции. Система уравнений (24) не только инвариантна относительно преобразований Лоренца, но и общековариантна относительно произвольных преобразований координат некоторого 4-мерного дифференцируемого многообразия, не обязательно наделенного метрикой или аффинной связностью [31]. В общековариантной форме уравнения (24) имеют вид (запятая здесь обозначает дифференцирование по $x_1, x_2, x_3, x_4 \equiv t$):

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \\ &\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma,\nu} = 4\pi J^\mu, \end{aligned} \tag{25}$$

где $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ — антисимметричные тензоры с компонентами

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \varepsilon_{ikl}B_l, & F_{i4} &= -F_{4i} = E_i, \\ G_{ik} &= -\varepsilon_{ikl}D_l, & G_{i4} &= -G_{4i} = H_i, \end{aligned} \tag{26}$$

J^μ — 4-векторная плотность тока, $\vec{J} = \vec{j}, J^4 = \rho$. Вводя грассмановы переменные с контравариантными индексами θ^μ, и определив величины

$$\partial \equiv \partial_\mu\theta^\mu, \quad F = F_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu, \quad G = G_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu, \quad J = \frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\theta^\mu\theta^\nu\theta^\rho J^\sigma \tag{27}$$

мы можем записать уравнения Максвелла (24) в следующей общековариантной форме,

$$\partial F = 0, \qquad \partial G = 4\pi J. \tag{28}$$

Полилинейную форму Φ от грассмановых переменных математики называют точной, если она удовлетворяет соотношению $\partial\Phi = 0$. Форму Ξ они называют замкнутой, если Ξ представимо в виде $\Xi = \partial\Omega$. Нетривиальное утверждение *всякая точная форма является замкнутой* известно как *лемма Пуанкаре* [32]. Обратное утверждение очевидно, так как ясно, что $\partial^2 = 0$.

Таким образом, уравнения Максвелла (28) говорят о том, что билинейная форма F является точной, а следовательно, замкнутой, $F = \partial A$. Линейная форма A, определяющая *4-вектор потенциала*, очевидно, определена с точностью до замкнутой формы $\partial\chi$, то-есть $F = \partial(A + \partial\chi)$ (*калибровочная инвариантность*). Трилинейная форма J является замкнутой, таким образом $\partial J = 0$ (*уравнение непрерывности*).

Формулировка уравнений Максвелла с помощью грассмановых переменных (28) привлекательна своей простотой и краткостью. Красота подобных формулировок фундаментальных уравнений физики завораживает. К сожалению, это приводит к появлению работ, относящихся, скорее, к чистой математике, чем к физике. Здесь опять уместно процитировать Б.Рассела: "Чистая математика целиком состоит из высказываний, провозглашающих, что если какое–то утверждение истинно по отношению к *чему–то*, то такие–то и такие–то утверждения также истинны. Не существенно, действительно ли первое утверждение истинно и незачем обсуждать, что такое это *что–то*, по отношению к чему предполагается его истинность," [28].

4. Уравнения Вейля. Нейтрино и антинейтрино. Волновая функция фотона.

Сравнивая работу физика-теоретика с работой математика, я нахожу, что на долю первого выпали бо̀льшие трудности.
Г.Вейль, [33].

... среди физиков теоретические физики самые, конечно, бедные, потому что они ничего не изобретают, денег ниоткуда не зарабатывают, красть им негде и нечего.
Н.В.Тимофеев-Ресовский, [9].

Г.Вейль имел в виду следующие трудности в работе физика-теоретика: во-первых, физик-теоретик должен решать задачу, сколь бы трудна она не была, потому что задачи перед ним ставит природа, а не он сам (как это делает математик, который может, в случае необходимости, видоизменить задачу), во-вторых, перед физиком-теоретиком постоянно возникает вопрос, а соответствует ли что-либо в природе его замечательным уравнениям? Рассмотрим, например, первую пару уравнений (14), которая содержит только ψ_R. Описывает ли это уравнение что-либо в природе? Казалось бы, нет, поскольку при P-отражениях $\vec{x} \to -\vec{x}$ эти уравнения переходят во вторую пару уравнений (14), поскольку при P-отражении $\psi_R \to -\psi_L$, $\mathrm{rot} \to -\mathrm{rot}$. Таким образом, если законы природы P-инвариантны, то рассматриваемым нами уравнениям, содержащим только ψ_R, ничего в природе не соответствует. С другой стороны, эти уравнения совпадают с P-инвариантными уравнениями Максвелла, описывающими электромагнитное поле. Возникает вопрос, к которому мы еще вернемся, а пока обратимся к уравнениям, введенным Г.Вейлем в 1929 г. [34].

В 1928 г. П.А.М.Дирак открыл свое знаменитое уравнение [35]. В том же 1928 г. вышло первое издание известной книги Г.Вейля [36]. В своей книге Вейль записал 4-компонентное уравнение Дирака в виде пары двух 2-компонентных уравнений,

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_R + im\psi_L = 0, \\ &(\tfrac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_L + im\psi_R = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где ψ_R и ψ_L — 2-компонентные величины, спиноры. В пределе $m = 0$ уравнения (29) переходят в уравнения, аналогичные уравнениям (15) [34],

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_R = 0, \\ &(\tfrac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_L = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Все четыре компоненты ψ_R и ψ_L необходимы для описания релятивистского электрона. Г.Вейль писал, что "можно обойтись двумя компонентами, если отказаться от симметричности левого и правого" [34]. Но для этого не было никаких оснований. От симметричности левого и правого пришлось отказаться только в 1957 г. после открытия несохранения четности, уже после смерти Г.Вейля (Г.Вейль умер в 1955 г.). Когда выяснилось, что фундаментальные взаимодействия в природе не обладают зеркальной симметрией, оказалось, что уравнения Вейля (30), каждое порознь, описывают электронное нейтрино (первое уравнение) и электронное антинейтрино (второе уравнение), если масса этих частиц равна нулю (в настоящее время экспериментальные ограничения на массу нейтрино $m_\nu < 7 \approx 10^{-34}$ [37]).

Пара спиноров ψ_R и ψ_L, входящих в уравнения (29) и (30), описывает релятивистский электрон. Равна, или не равна масса электрона нулю, это не принципиально. На современных ускорителях (e^+e^--коллайдерах), таких, как SLC (SLAC), LEP (CERN), в которых электроны разгоняются до энергий порядка 50 ГэВ, отношение $\frac{m}{\varepsilon} \approx 10^{-5}$ и этой величиной можно смело пренебречь, тем более, что обычно она появляется в виде $(\frac{m}{\varepsilon})^2$. Что касается уравнений (14) и (15), то пара векторов $\vec{\psi}_R$ и $\vec{\psi}_L$, входящих в эти уравнения, описывает не электромагнитное поле, а релятивистскую безмассовую частицу — фотон. Обычно фотон описывают двумя векторными полями $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$, но комплексными [18,38]. Положим

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_R &= \vec{E}_R + i\vec{H}_R, \\ \vec{\psi}_L &= \vec{E}_L - i\vec{H}_L, \end{aligned} \tag{31}$$

и введем новые комплексные $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \vec{E}_R + \vec{E}_L + i(\vec{H}_R - \vec{H}_L), \\ \vec{\mathcal{H}} &= \vec{H}_R + \vec{H}_L - i(\vec{E}_R - \vec{E}_L). \end{aligned} \tag{32}$$

Комплексные поля $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла и могут быть объединены в комплексный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{F}_{\nu\mu}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ik} &= \varepsilon_{ikl}\mathcal{H}_l, \\ \mathcal{F}_{i4} &= -\mathcal{F}_{4i} = -i\mathcal{E}_i, \end{aligned} \tag{33}$$

удовлетворяющий обеим парам уравнений Максвелла,

$$\partial_\mu \mathcal{F}_{\rho\sigma} + \partial_\rho \mathcal{F}_{\sigma\mu} + \partial_\sigma \mathcal{F}_{\mu\rho} = 0, \qquad \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0. \tag{34}$$

5. Пифагоровы треугольники и спиноры. Вейлевские спиноры.

В теоретической физике редко возникает необходимость знать в деталях работу, написанную тридцать лет тому назад,или даже вообще помнить, что такая работа была написана. Но, скорее всего, потерян для математики тот, кто не знает, что сказал Пифагор в Кротоне в 500 г. до Р.Х. о квадрате самой длинной стороны в прямоугольном треугольнике.

Е.Т.Белл, [28].

Простейший способ ввести релятивистские спиноры — это вспомнить формулы, устанавливающие связь между пифагоровым треугольником с целочисленными сторонами a, b и

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{35}$$

и парой целых чисел φ и χ [39],

$$\begin{aligned} a &= \varphi^2 - \chi^2, \\ \underline{b =} &\underline{\;\;2\varphi\chi,} \\ c &= \varphi^2 + \chi^2 \end{aligned} \tag{36}$$

(обратим внимание на то, что $a + ib = (\varphi + i\chi)^2$. Если теперь считать a, b и произвольными вещественными числами, то φ и χ представляют собой спинор 3-мерного пространства Минковского с координатами a, b и [40]. Спинор преобразуется по двухзначному представлению группы Лоренца $SO(2,1)$. При пространственном повороте

$$\begin{aligned} a' &= a\cos\theta - b\sin\theta, \\ b' &= a\sin\theta + b\cos\theta, \end{aligned} \tag{37}$$

компоненты спинора преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi \cos\tfrac{\theta}{2} - \chi \sin\tfrac{\theta}{2}, \\ \chi' &= \varphi \sin\tfrac{\theta}{2} + \chi \cos\tfrac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{38}$$

При повороте на угол 2π спинор изменяет знак, $\varphi\prime = -\varphi$, $\chi\prime = -\chi$.

Г.Вейль вводит спиноры 4-мерного пространства-времени с помощью простого обобщения формул (35) и (36). В этом случае недостаточно ввести вещественный спинор, и Г.Вейль вводит спинор с двумя комплексными компонентами u_1 и u_2. Тогда 4-вектор энергии-импульса безмассовой частицы с компонентами $(p_1, p_2, p_3, \varepsilon)$,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \varepsilon^2, \tag{39}$$

выражается через компоненты спинора u_1 и u_2 следующим образом [34]:

$$\begin{array}{l} p_1 = \quad u_1^* u_2 + u_2^* u_1, \\ p_2 = i(u_1^* u_2 - u_2^* u_1), \\ p_3 = \quad u_1^* u_1 - u_2^* u_2, \\ \hline \varepsilon \;=\; \quad u_1^* u_1 + u_2^* u_2. \end{array} \tag{40}$$

Есть и другая возможность ввести спиноры по Вейлю, со знаками "минус" в первых трех формулах (40). Обе эти возможности можно компактно записать с помощью матриц Паули (12). Соответствующие спиноры обозначим u_R и u_L,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \quad u_R^* \vec{\sigma} u_R, \qquad \varepsilon = u_R^* u_R, \\ \vec{p} &= -u_L^* \vec{\sigma} u_L, \qquad \varepsilon = u_L^* u_L. \end{aligned} \tag{41}$$

При этом автоматически выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \vec{p}\vec{\sigma} u_R &= \ \ \varepsilon u_R, \\ \vec{p}\vec{\sigma} u_L &= -\varepsilon u_L. \end{aligned} \tag{42}$$

Уравнения (42) получаются из уравнений (30), если решения последних искать в виде плоских волн, соответствующих решениям с определенным импульсом $\vec{p}$ и энергией ε ,

$$\psi_{R,L}(\vec{x}, t) = u_{R,L} e^{i\vec{p}\vec{x} - \varepsilon t}. \tag{43}$$

Подвергнем спинор $u_{R,L}$ преобразованиям

$$u'_{R,L} = (1 + i\frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{\varphi} \mp \frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{v}) u_{R,L}, \tag{44}$$

где $|\vec{\varphi}| \ll 1$ и $|\vec{v}| \ll 1$, знак $-$ соответствует u_R, знак $+$ соответствует u_L. Тогда, согласно (44) и (41), величины $\vec{p}$ и ε преобразуются следующим образом (в чем нетрудно убедиться, используя правило перемножения матриц Паули (17)):

$$\begin{aligned} \vec{p'} &= \vec{p} - [\vec{\varphi}\vec{p}] - \varepsilon \vec{v}, \\ \varepsilon' &= \varepsilon - (\vec{p}\vec{v}). \end{aligned} \tag{45}$$

Мы видим, что преобразования (44) и (45) соответствуют повороту системы координат относительно первоначальной на угол $\vec{\varphi}$ и движению новой системы координат относительно старой со скоростью $\vec{v}$.

6. Электромагнитное и гравитационное поля как калибровочные.

– Ходите ли Вы в кино?
– Да.
– И как часто?
– В 1920 и, кажется, еще в 1930...
– Существует ли человек, которого даже Вы не понимаете?
– Да.
– И кто же это?
– Вейль.

Из интервью с П.А.М.Дираком, [41].

Статья Г.Вейля [34] называлась "Электрон и гравитация". Г.Вейль был одним из первых, кто рассмотрел задачу о квантовомеханическом электроне, взаимодействующем с полем тяготения. В настоящее время гравитационное поле, наряду с электромагнитным, рассматривается как калибровочное. При этом основные идеи восходят к Г.Вейлю [33,42].

Напишем уравнение Дирака [35], из которого исходил Вейль,

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi(x) = 0, \tag{46}$$

где 4x4 матрицы γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{47}$$

Вейль показал, что 4-компонентная величина ψ состоит из двух 2-компонентных спиноров ψ_R и ψ_L, которые при собственных преобразованиях Лоренца преобразуются независимо друг от друга. Но почему вообще спиноры преобразуются при преобразованиях системы координат? Спиноры — это векторы 2-мерного комплексного пространства, точнее, компоненты 2-мерных комплексных векторов в каком-то базисе. Этот спинорный базис обычно жестко связывается с координатным базисом в 4-мерном пространстве-времени Минковского и при преобразованиях последнего следует за ним. Однако, если мы от преобразований Лоренца перейдем к произвольным преобразованиям координат (например, в плоском пространстве-времени начнем вводить косоугольные системы координат), мы обнаружим, что никакого закона преобразования спиноров мы найти не сможем. Это связано с тем, что произвольные преобразования координат, в принципе, не имеют двухзначных представлений [43]. Эта трудность была преодолена естественным образом: была вообще разорвана связь между координатным и спинорным базисами [44], спиноры стали рассматриваться как объекты, индифферентные к преобразованиям обычных пространственно-временных координат [45]. Однако теперь возникает важная возможность: в каждой точке пространства-времени произвольным образом вводить свои спинорные базисы, причем естественно требовать, чтобы этот произвол ни на чем не сказывался, т.е., чтобы теория была инвариантна относительно калибровочных преобразований вида

$$\psi'(x) = \Lambda(x)\psi(x), \tag{48}$$

где матрица $\Lambda(x)$ осуществляет переход к другому спинорному базису. Тогда, чтобы уравнения (46) и (47) были инвариантны относительно преобразований (48), а также относительно общековариантных преобразований координат, мы должны видоизменить эти уравнения следующим образом:

$$[\gamma^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - B_\mu) + m]\psi(x) = 0, \tag{49}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}(x), \tag{50}$$

где B_μ — матричная спинорная аффинная связность, $g^{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор, матрицы Дирака теперь зависят от координат. Чтобы уравнение (49) было инвариантным относительно калибровочных преобразований (48), мы должны потребовать, чтобы величины B_μ преобразовывались при этом следующим образом,

$$B'_\mu = \Lambda B_\mu \Lambda^{-1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}\Lambda^{-1}. \tag{51}$$

Введем тензор калибровочного поля $C'_{\mu\nu} = \Lambda C_{\mu\nu}\Lambda^{-1}$,

$$C_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + B_\nu B_\mu - B_\mu B_\nu. \tag{52}$$

Т.к. матрица $\Lambda(x)$ может быть просто фазовым множителем

$$\Lambda(x) = e^{i\varphi(x)}, \tag{53}$$

а таким калибровочным преобразованиям соответствует калибровочное электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ с потенциалом A_μ, то мы можем разбить спинорную аффинную связность B_μ и калибровочное поле $C_{\mu\nu}$ на две части, электромагнитную и гравитационную,

$$\begin{aligned} B_\mu &= ieA_\mu + \Gamma_\mu, \\ C_{\mu\nu} &= ieF_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\rho\gamma^\sigma, \end{aligned} \tag{54}$$

где $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ — тензор кривизны Римана-Кристоффеля. Теперь мы можем написать общековариантный лагранжиан эйнштейновской теории гравитации, явно инвариантный также и относительно калибровочных преобразований, названный в работе [46] лагранжианом Эйнштейна-Вейля,

$$L_{Einstein-Weyl} = \frac{1}{32\pi G} Sp(C_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})\sqrt{-g} = \frac{1}{16\pi G} R\sqrt{-g}, \tag{55}$$

где g — определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, Sp — след от произведения матриц Дирака, R — скалярная кривизна, G — ньютоновская гравитационная постоянная.

7. Индуцированные электромагнетизм и гравитация.

Работа на заводе имела мало общего с теоретической физикой... начальство не знало, что ему делать с физиком–теоретиком, и уже без всякой надежды поинтересовалось темой моей дипломной работы. Ответ: "Поляризация вакуума" — вызвал радостный возглас: "Прекрасно! Это как раз то, что нам нужно." После чего мне вручили мыльницу и кисточку для бритья и послали искать течь в вакуумной установке."

Д.А.Киржниц, [47].

В 1974 г. вышла статья известного шведского физика О.Клейна [48], в которой устанавливалась тесная связь между свойствами квантовомеханического вакуума и гравитацией. Что же волновало 80-летнего О.Клейна и что же ему удалось сделать? О.Клейн писал:"Принцип эквивалентности, основывающийся на знаменитых мысленных экспериментах Эйнштейна, утверждает, что в любой точке пространства-времени поле тяготения может быть устранено с помощью преобразований, и, наоборот, что достаточное знание законов, описывающих явление в отсутствие тяготения — математически говоря, в инерциальной системе отсчета — позволяет установить соответствующий закон в случае, когда тяготение отсутствует. Однако, невозможно вывести подобным образом уравнения поля Эйнштейна. Эти уравнения указывают на ограничение принципа эквивалентности — невозможность перехода от законов, справедливых в отсутствие гравитации, к законам, выполняющимся, когда поле тяготения есть — потому что, по определению, в инерциальной системе отсчета нет гравитационного поля, поэтому *нечего преобразовывать*. Я попытаюсь показать, что упомянутая трудность, т.е. сомнение в общей справедливости принципа эквивалентности, может быть преодолена, если заменить *классическое понятие* вакуума, предполагающее полное отсутствие материи, соответствующим понятием квантовой теории поля, *основным состоянием*, по отношению к которому *материя* более или менее возбуждена в самом широком смысле этого слова."

В статье О.Клейна было небольшое примечание: "Мои коллеги рассказали мне, что выдающийся русский физик А.Сахаров проделал вычисления, подобные тем, что содержатся в настоящей статье, что я рад подтвердить." Статья О.Клейна была опубликована в разгар травли "порвавшего с наукой" "отщепенца" Сахарова, начавшейся с "письма 40 академиков" и продолжавшейся в гневных письмах украинских и казахстанских ученых, врачей и рабочих, механизаторов и хлеборобов.

Действительно, А.Д.Сахаров пришел к тем же идеям, что и О.Клейн, и в своей статье 1967 г. [49] высказал идею "нулевого лагранжиана", позволяющую получить с помощью принципа эквивалентности не только уравнения Эйнштейна, но и квантовые поправки к ним. В 1975 г. Сахаров опубликовал большую и подробную статью, в которой связал свою идею, называемую теперь идеей "индуцированной гравитации", с более ранними работами Швингера, Померанчука и Ландау, Фрадкина и Зельдовича [50]. В идейном отношении возникновение индуцированных электромагнетизма и гравитации крайне просто. Рассматривается уравнение Дирака (49) с аффинной связностью B_{μ}, включающей в себя электромагнитные и гравитационные потенциалы. Предполагается, что уравнения электромагнитного и гравитационного полей неизвестны. Задача заключается в том, чтобы найти эти уравнения (вместе с квантовыми поправками к ним). Для электромагнитного поля эта задача была решена в 1951 г. Ю.Швингером [51], для гравитационного путь к решению этой задачи был указан А.Д.Сахаровым в 1967 г. и О.Клейном в 1974 г. Соответствующие лагранжианы электромагнитного и гравитационного полей появляются как следствие воздействия поля B_{μ} на квантовомеханический вакуум. Как писал Я.Б.Зельдович в 1967 г., популяризируя работу А.Д.Сахарова: "При наличии "поля" как воздействия на частицы и при отсутствии свободных частиц в вакууме происходит рождение виртуальных электрон-позитронных пар, появляется отличная от нуля энергия вакуума, которую мы называем энергией поля, появляется вклад в действие"[52]. (В 1985 г. в "Избранных трудах" [53] Я.Б.Зельдовича была напечатана только вводная часть указанной статьи, "в связи ограниченностью объема книги" (книги большого формата в 464 стр.!). При этом, хотя статья [52] посвящена работе Сахарова, Сахаров не упоминается и ссылки на него выброшены!)

Согласно Сахарову и Клейну [47,48], влияние гравитации на вакуум дираковских частиц индуцирует лагранжиан Эйнштейна-Вейля (55), однако с квадратично расходящимся интегралом вместо величины $\frac{1}{32\pi G}$, откуда возникает связь между импульсом обрезания P_o и ньютоновской постоянной тяготения G,

$$\frac{P_0}{c} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,995 * 10^{22} m, \tag{56}$$

где m — масса электрона. Влияние электромагнитного поля на вакуум индуцирует лагранжиан электромагнитного поля с логарифмически расходящимся интегралом перед этим лагранжианом. Учет поляризации вакуума всех лептонов и кварков приводит к лагранжиану

$$\left(\frac{2}{3\pi}\ \frac{e^2}{\hbar c} \sum_i q_i^2\ \frac{P_0}{m_i c}\right) \frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{8\pi}, \tag{57}$$

где сумма берется по всем лептонам и кваркам, q_i и m_i — заряды и массы лептонов и кварков. Вычисление коэффициента перед $\frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{8\pi}$ в (57) дает

$$\frac{1}{646}(8 \ln \frac{P_0}{mc} - 49) = \frac{414 - 49}{646}, \tag{58}$$

где $8 = \sum_i q_i^2$ — сумма зарядов 3-ех лептонов и 18-и кварков, $49 = \sum_i q_i^2 \ln \frac{m_i}{m}$, m — масса электрона. Т.к. вычисленный коэффициент должен равняться единице, то видно, что учет вакуума всех известных в настоящее время лептонов и кварков не приводит к окончательной теории.

Теория индуцированных электромагнетизма и гравитации учитывает важные черты реальных электромагнитных и гравитационных взаимодействий и тесно связана с эффектом Казимира, который мы рассмотрим в последнем разделе настоящей статьи: перестройкой вакуума, вызываемой макроскопическими изменениями физической системы и влияющей на свойства этой системы [54].

8. Уравнения Максвелла в форме Майорана. Спиральность безмассовых частиц.

Существуют разные категории ученых... Есть люди первого класса, которые делают большие открытия, фундаментальные для развития науки. Но существуют и гении, подобные Галилею и Ньютону. Этторе Майорана был одним из них.
Э.Ферми, [55].

– Замечательно! Напишите об этом Этторе, и напечатайте!
– Да нет, что вы! — Этторе весь съеживается от одного упоминания о печати, ему страшно и подумать, что кто-то будет копаться в его мыслях. — Нет, нет! Это я так, просто забавлялся...
Л.Ферми, [56].

В неопубликованно й рукописи Э.Майорана, написанной между 1928 и 1932 гг. и хранящейся в доме Галилея в Пизе [57], уравнения Максвелла (14) представлены в виде, который проясняет их родство с уравнениями Вейля (30). Э.Майорана исходил из того, что векторы $\vec{\psi}_R$ и $\vec{\psi}_L$ преобразуются при поворотах системы координат на бесконечно малый угол $\vec{\varphi}$ с помощью формулы

$$\vec{\psi}'_{R,L} = \vec{\psi}_{R,L} - [\vec{\varphi}\vec{\psi}_{R,L}], \tag{59}$$

или в компонентах, опуская символы R и L,

$$\psi'_k = \psi_k - \varepsilon_{kil}\varphi_i\psi_l. \tag{60}$$

Введем обозначение

$$(S_i)_{kl} = -i\varepsilon_{ikl}. \tag{61}$$

Тогда (60) можно переписать в виде:

$$\psi'_k = \psi_k + i(S_i)_{kl}\varphi_i\psi_l. \tag{62}$$

Т.к. любая многокомпонентная величина преобразуется при поворотах аналогичным образом,

$$\psi'_a = \psi_a + i(S_i)_{ab}\varphi_i\psi_b. \tag{63}$$

причем оператор $(S_i)_{ab}$ представляет собой оператор спинового момента, мы видим, что уравнения Максвелла (14), так же как и уравнения Вейля (30), записываются с помощью операторов спинового момента,

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\partial}{\partial t} + \vec{S}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_R = 0, \qquad && \mathrm{div}\vec{\psi}_R = 0, \\ &(\tfrac{\partial}{\partial t} - \vec{S}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_L = 0, \qquad && \mathrm{div}\vec{\psi}_L = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

В случае плоских волн,

$$\vec{\psi}_{R,L} = \vec{u}_{R,L}e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}, \tag{65}$$

уравнения Максвелла (64) приобретают вид, аналогичный (42),

$$\begin{aligned} &\vec{p}\vec{S}u_R = \ \varepsilon u_R, \qquad && \vec{p}\vec{u}_R = 0, \\ &\vec{p}\vec{S}u_L = -\varepsilon u_L, \qquad && \vec{p}\vec{u}_L = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Физический смысл этих уравнений ясен: проекция спина фотона на импульс (спиральность) равна $+1$ (правые фотоны) или -1 (левые фотоны). Уравнения Вейля (42) говорят о том, что спиральности правых и левых частиц равны $+1/2$ и -1/2. Обратим внимание на то, что волновые функции фотонов $\vec{u}_R$ и $\vec{u}_L$ преобразуются по разному при преобразованиях Лоренца, причем их закон преобразования определяется формулами, аналогичными (44), в которых операторы $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ нужно заменить на операторы $\vec{S}$, определяемые формулой (61). Таким образом,

$$\begin{aligned} &u'_{R,L} = (1 + i\vec{S}\vec{\varphi} \mp \vec{S}\vec{v})u_{R,L}, \\ &\vec{u}'_{R,L} = \vec{u}_{R,L} - [\vec{\varphi}\vec{u}_{R,L}] \pm i[\vec{v}\vec{u}_{R,L}]. \end{aligned} \tag{67}$$

9. Уравнения слабых гравитационных волн в форме Бронштейна.

... люди, подобные М.П.Бронштейну, рождаются, чтобы украсить род человеческий...

Г.Я.Горелик, В.Я. Френкель, [58].

Республика не нуждается в ученых!

(ответ судьи на просьбу А.Л.Лавуазье отсрочить казнь на несколько дней для окончания химического эксперимента, [59].)

Вина выдающегося советского физика Матвея Петровича Бронштейна перед народом была велика: его фамилия совпадала с настоящей фамилией Л.Д.Троцкого. "Если Троцкий придет к власти, я назову его своим племянником", — шутил М.П.Бронштейн [60]. Но опасно шутить в России. [1] 18 февраля 1938 г. в возрасте 32 лет М.П.Бронштейн был расстрелян как "враг народа". В 1991 г. в Италии, в небольшом сицилийском городе Эриче, в Центре научной культуры им. Э.Майорана, Л.Б.Окунь рассказал итальянским физикам о работах и трагической судьбе М.П.Бронштейна. После его рассказа Центром им. Э.Майорана была учреждена стипендия им. М.П.Бронштейна [63]. Так посмертно объединились имена двух замечательных физиков, годы рождения и гибели которых совпадают: 1906–1938.

В своей работе 1936 г. "Квантование гравитационных волн" [64] М.П.Бронштейн представил уравнения слабых гравитационных волн в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial t}H_{ij} = -\varepsilon_{ikl}\tfrac{\partial}{\partial x_k}E_{lj}, \qquad && \tfrac{\partial}{\partial x_i}H_{ij} = 0, \\ &\tfrac{\partial}{\partial t}E_{ij} = \ \ \ \varepsilon_{ikl}\tfrac{\partial}{\partial x_k}H_{lj}, \qquad && \tfrac{\partial}{\partial x_i}E_{ij} = 0, \end{aligned} \tag{68}$$

[1] Когда Л.Эйлер в 1741 г. переехал из Санкт–Петербурга в Берлин, вдовствующую королеву — мать Фридриха Великого — очень удивила молчаливость Эйлера. "Мадам," — объяснил Эйлер, — "я приехал из страны, где, если Вы разговариваете, Вас вешают." Ответ Эйлера известен в передаче маркиза де Кондорсе ("Éloge de M.Euler", 1786 [61]): "Madame, parce que je viens d'un pays, où quand on parle on est pendu..." В 1794 г. в революционной Франции на процессе Лавуазье судья провозгласил (см. эпиграф): "La Republique n'a pas besoin de savants!". Лавуазье был отправлен на гильотину. Лагранж, присутствовавший на казни Лавуазье, сказал: "В один момент мы лишились головы, и пройдет, быть может, еще сто лет, пока появится еще такая..."[59]. "Лагранж и Лаплас избежали гильотины только потому, что они понадобились для расчетов траекторий артиллерийских снарядов и для налаживания производства селитры, необходимой для пороха. Они не были вынуждены есть траву, как другие, менее нужные ученые, и не были беспомощны до такой степени, чтобы выдать себя, как это сделал их несчастный друг Кондорсе, заказавший аристократический омлет. Не зная, сколько яиц идет на омлет, Кондорсе заказал омлет из дюжины. Добряк–повар поинтересовался профессией Кондорсе. "Я — плотник." — "Покажи руки. Ты — не плотник!" Это был конец близкого друга Лапласа Кондорсе. Он был отравлен в тюрьме, или, может быть, ему позволили покончить с собой" [62].

где E_{ij} и H_{ij} — симметричные и бесследные тензоры, связанные с тензором кривизны $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= R_{4j4i} = \tfrac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}R_{klmn}, \\ H_{ij} &= \tfrac{i}{2}\varepsilon_{imn}R_{4jmn} = \tfrac{i}{2}\varepsilon_{imn}R_{mn4j}, \end{aligned} \tag{69}$$

Эти уравнения не случайно очень похожи на уравнения Максвелла (2). Если мы введем комплексные поля

$$\begin{aligned} \psi_{Rij} &= E_{ij} + iH_{ij}, \\ \psi_{Lij} &= E_{ij} - iH_{ij}, \end{aligned} \tag{70}$$

и воспользуемся тем, что операторы поворота для полей ψ_{ij} имеют вид

$$(S_k)_{ijlm} = -i\varepsilon_{kil}\delta_{jm} - i\varepsilon_{kjm}\delta_{il}, \tag{71}$$

то мы сможем записать уравнения (68) в виде [65]

$$\begin{aligned} &(2\tfrac{\partial}{\partial t} + \vec{S}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_R = 0, \qquad \partial_i\psi_{Rij} = 0, \\ &(2\tfrac{\partial}{\partial t} - \vec{S}\tfrac{\partial}{\partial \vec{x}})\psi_L = 0, \qquad \partial_i\psi_{Lij} = 0, \end{aligned} \tag{72}$$

или для плоских волн

$$\psi_{R,L} = u_{R,L}e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}, \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}\vec{S}u_R &= \ 2\varepsilon u_R, \qquad p_i\psi_{Rij} = 0, \\ \vec{p}\vec{S}u_L &= -2\varepsilon u_L, \qquad p_i\psi_{Lij} = 0. \end{aligned} \tag{74}$$

Уравнения (74) описывают гравитоны и говорят о том, что спиральность гравитонов принимает значения $+2$ и -2.

10. Релятивистская инвариантность спиральности и теорема Вейнберга.

Если частица движется со скоростью света, то утверждение "спин и скорость частицы параллельны" справедливо в любой системе координат.
Е.Вигнер, [66].

Утверждение Е.Вигнера о релятивистской инвариантности спиральности безмассовой частицы безусловно правильно , однако Е.Вигнер считал, что "параллельность спина и скорости" безмассовой частицы определяются исключительно свойствами преобразований Лоренца. На самом же деле, как мы сейчас увидим, релятивистская инвариантность спиральности есть либо следствие релятивистских волновых уравнений, либо требование, налагаемое на теорию, эквивалентное релятивистским волновым уравнениям. Действительно, условие того, что фотоны, или гравитоны, обладают определенной спиральностью — это только часть полной системы релятивистских волновых уравнений (еще необходимы уравнения, утверждающие, что дивергенции полей равны нулю, без обращения в нуль дивергенций нельзя получить волновые уравнения $\Box\psi = 0$). Однако, если потребовать, чтобы спиральность была релятивистским инвариантом, уравнения с дивергенциями, в случае фотонов и гравитонов, возникают как следствие этого требования. При этом возникает еще одно важное следствие, известное как теорема Вейнберга, устанавливающая связь между законом преобразования волновых функций и численным значением спиральности [67].

Общая теория представлений собственной ортохронной (т.е. без – и – отражений) группы Лоренца обобщает закон преобразования вейлевских спиноров (44) следующим образом [68]: произвольная многокомпонентная волновая функция $u(\vec{p},\varepsilon)$ при бесконечно мало отличающемся от единичного преобразовании Лоренца

$$\begin{aligned} \vec{p'} &= \vec{p} - [\vec{\varphi}\vec{p}] - \varepsilon\vec{v}, \\ \varepsilon' &= \varepsilon - (\vec{p}\vec{v}) \end{aligned} \tag{75}$$

преобразуется следующим образом

$$u'(\vec{p'},\varepsilon') = (1 + i\vec{S}\vec{\varphi} - \vec{T}\vec{v})u(\vec{p},\varepsilon), \tag{76}$$

где $\vec{S}$ — оператор спинового момента, а $\vec{T}$ — оператор чисто лоренцовского преобразования ("буста"). Согласно общей теории [68], $\vec{S}$ и $\vec{T}$ представимы в виде

$$\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}, \qquad \vec{T} = \vec{S}^{(1)} - \vec{S}^{(2)}, \tag{77}$$

где, в случае конечномерных волновых функций, $\vec{S}^{(1)}$ и $\vec{S}^{(2)}$ — коммутирующие друг с другом спиновые операторы для спинов s_1 и s_2, т.е.

$$\begin{aligned} &S_i^{(1,2)} S_k^{(1,2)} - S_k^{(1,2)} S_i^{(1,2)} = i\varepsilon_{ikl} S_l^{(1,2)}, \\ &S_i^{(1)} S_k^{(2)} - S_k^{(2)} S_i^{(1)} = 0, \\ &(\vec{S}^1)^2 = s_1(s_1+1), \qquad (\vec{S}^2)^2 = s_2(s_2+1). \end{aligned} \tag{78}$$

Рассмотрим уравнение

$$\vec{p}\vec{S}u(\vec{p},\varepsilon) = \lambda\varepsilon u(\vec{p},\varepsilon), \tag{79}$$

утверждающее, что спиральность нашей частицы равна λ. Релятивистская инвариантность спиральности означает, что

$$\vec{p'}\vec{S}u'(\vec{p'},\varepsilon') = \lambda\varepsilon' u'(\vec{p'},\varepsilon'). \tag{80}$$

Используя формулы (75) и (76) (полагая в них $\vec{\varphi} = 0$, т.к. вращательная инвариантность уравнения (79) выполняется автоматически), получим

$$(\vec{p}\vec{S} - \varepsilon\vec{v}\vec{S})(1 - \vec{v}\vec{T})u(\vec{p},\varepsilon) = \lambda(\varepsilon - \vec{v}\vec{p})(1 - \vec{v}\vec{T})u(\vec{p},\varepsilon), \tag{81}$$

или учитывая (79) и то, что $|\vec{v}| \ll 1$,

$$\vec{v}(\varepsilon\vec{S} + (\vec{p}\vec{S})\vec{T})u(\vec{p},\varepsilon) = \lambda\vec{v}(\vec{p} + \varepsilon\vec{T})u(\vec{p},\varepsilon). \tag{82}$$

Т.к. направление $\vec{v}$ произвольно, получаем, учитывая (77) и (78), в дополнение к (79), еще три уравнения

$$(\varepsilon\vec{S} + i[\vec{p}\vec{T}])u(\vec{p},\varepsilon) = \lambda\vec{p}u(\vec{p},\varepsilon). \tag{83}$$

Уравнения (79) и (83) представляют собой полную релятивистски инвариантную систему волновых уравнений для безмассовой частицы со спиральностью λ. Умножая (83) скалярно на $\vec{p}$ и учитывая (79), получим, что $\varepsilon^2 = \vec{p}^2$. Выбирая систему координат, в которой импульс $\vec{p}$ направлен по оси z, получим из (83):

$$\begin{aligned} &(S_x^{(1)} + iS_y^{(1)})u = 0, \\ &(S_x^{(2)} - iS_y^{(2)})u = 0, \\ &(S_z^{(1)} + S_z^{(2)})u = \lambda u, \end{aligned} \tag{84}$$

откуда следует теорема Вейнберга [67]:

$$\lambda = s_1 - s_2. \tag{85}$$

Т.о., если волновая функция преобразуется по представлению, характеризующемуся числами s_1 и s_2 ((s_1,s_2) – представлению), то релятивистской инвариантностью допускается только спиральность, согласующаяся с теоремой Вейнберга (85).

11. Фотон и нотоф.

Кони, топот, инок...
Колесо. Жалко поклаж. Оселок.
В.Хлебников, [69].

В 1955 г. Л.Басс и Э.Шредингер опубликовали статью, которая называлась "Должна ли масса фотона равняться нулю?" [70]. В то время экспериментальные ограничения на массу фотона были: $m_\gamma < 10^{-9} \approx 10^{-47}$ (в настоящее время: $m_\gamma < 3 * 10^{-27} \approx 5 * 10^{-65}$, [37]). Если бы у фотона была масса, то для описания фотона понадобился бы еще 4-вектор $\mathcal{A}_\mu$ и фотон описывался бы не уравнениями (34), а уравнениями Прока [71]:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} &= m\mathcal{A}_\mu, \\ \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu &= m\mathcal{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{86}$$

Из уравнений (86) следует, что

$$(\Box - m^2)\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0, \qquad (\Box - m^2)\mathcal{A}_\mu = 0, \tag{87}$$

$$\partial_\mu \mathcal{F}_{\rho\sigma} + \partial_\rho \mathcal{F}_{\sigma\mu} + \partial_\sigma \mathcal{F}_{\mu\rho} = 0, \tag{88}$$

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0. \tag{89}$$

В пределе $m \to 0$ получим

$$\partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0, \tag{90}$$

$$\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = 0. \tag{91}$$

Уравнения (88) и (90) описывают обычные фотоны (T-фотоны, по терминологии работы [70]), а уравнения (89) и (91) описывают L-фотоны, которые известны также под названием "нотофы" [72]. Из (89) и (91) следует:

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \qquad \Box\varphi = 0, \tag{92}$$

т.е. L-фотон, или нотоф, — это безмассовая скалярная частица. У массивного фотона, сколь ни была бы мала его масса, имеются три состояния поляризации, проекции его спина на импульс могут быть равны $+1$, -1 и 0. При предельном переходе $m \to 0$ выживают все три состояния поляризации, два превращаются в фотоны, а третье в нотофы. Л.Басс и Э.Шредингер пытались в своей работе разрешить имеющиеся тогда расхождения между возрастом Вселенной (обратным значением постоянной Хаббла), равным $3 * 10^9$ лет, и возрастом Солнца, определявшимся по энерговыделению Солнца и равным $5,7 * 10^9$ лет. Если бы Солнце излучало и третье состояние поляризации массивных фотонов, из-за чрезвычайно слабого его взаимодействия с веществом ненаблюдаемого, то это означало бы, что возраст Солнца завышен в 1,5 раза и позволило бы уменьшить возраст Солнца до $3,8 * 10^9$ лет.(Современное значение возраста Вселенной $10 * 10^9$ лет, а возраста Солнца $5 * 10^9$ лет и проблема несоответствия возраста Вселенной и возраста Солнца давно отпала.) Л.Басс и Э.Шредингер пытались с помощью своих L-фотонов решить еще одну проблему [73,74], проблему теплового баланса Земли. В то время приходилось считать [75], да и сейчас в этом отношении мало что изменилось, что радиоактивные элементы находятся только в поверхностном слое Земли, порядка 20 км. Если бы вся толща Земли была бы равномерно радиоактивна, то тепловыделение было бы намного более наблюдаемого. L-фотоны не устраняли, а лишь немного смягчали эти трудности. Сейчас к этим проблемам добавились еще и новые: оказалось, что совпадают тепловые потоки на континентах (где радиоактивные источники сосредоточены, в основном, в наружных гранитных и базальтовых слоях) и на океанах (где эти источники рассредоточены на глубину в несколько сотен километров) [76].

12. Бесконечнокомпонентные уравнения Дирака без отрицательных энергий.

Эти уравнения прекрасны с математической точки зрения...
П.А.М.Дирак, [77].

В 1933 г. П.А.М.Дирак участвовал в 1-ой Всесоюзной конференции по атомному ядру, проходившей в Ленинградском Физико-техническом институте. После доклада Дирака "Теория позитрона" с критическими замечаниями выступил В.А.Фок, который, в частности, сказал: "В основе теории позитронов лежит предположение о существовании неопределенного и бесконечного числа электронов с отрицательной кинетической энергией, причем ни бесконечно-большой заряд, ни бесконечно-большая масса этих электронов ничем себя не проявляют... Я должен признаться, что мною овладевает необычайное смущение, когда я пытаюсь осмыслить это основное положение теории, и я думаю, что я не одинок в этом чувстве" [78]. Хотя сам Дирак был "особенным мастером по тихой издевке" [9], но сносить чужие издевки, к тому же вполне заслуженные, было не очень приятно. Не удивительно, что Дирак пытался найти релятивистские волновые уравнения, которые не имели бы решений с отрицательными энергиями. Такие уравнения Дирак нашел только в 1971 г., когда отсутствие отрицательных энергий (т.е. отсутствие античастиц) могло рассматриваться скорее как недостаток, а не как достоинство уравнений.

Бесконечнокомпонентные релятивистские волновые уравнения, найденные Дираком [79], описывают частицу со спином нуль и могут быть записаны в виде, напоминающем (29),

$$[(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\sigma}\frac{\partial}{\partial\vec{x}})R+imL]|\psi\rangle=0,$$
$$[(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{\sigma}\frac{\partial}{\partial\vec{x}})L+imR]|\psi\rangle=0. \tag{93}$$

где R и L — следующие пары операторов,

$$R_1=(\tfrac{d}{d\xi}+\zeta)/\sqrt{2},\qquad R_2=(\tfrac{d}{d\zeta}-\xi)/\sqrt{2},$$
$$L_1=(\tfrac{d}{d\zeta}+\xi)/\sqrt{2},\qquad L_1=(-\tfrac{d}{d\xi}+\zeta)/\sqrt{2}. \tag{94}$$

Т.к. (93) — это четыре операторных уравнения вида $Q_\alpha|\psi\rangle=0$, действующих на одну функцию, то должны выполняться условия совместности $[Q_\alpha,Q_\beta]|\psi\rangle=0$, которые приводят к уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box-m^2)|\psi\rangle=0, \tag{95}$$

и, следовательно, к связи между энергией и импульсом для плоской волны

$$|\psi\rangle=|u\rangle e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t} \tag{96}$$

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}. \tag{97}$$

Для покоящейся частицы с положительной энергией $\varepsilon=m$ получим из (93)

$$(\frac{d}{d\xi}+\xi)|u\rangle=0,\qquad(\frac{d}{d\zeta}+\zeta)|u\rangle=0. \tag{98}$$

У уравнений (98) есть нормируемое решение

$$|u\rangle=Ce^{-\frac{\xi^2+\zeta^2}{2}}. \tag{99}$$

Для покоящейся частицы с отрицательной энергией $\varepsilon=-m$ получим из (93)

$$(\frac{d}{d\xi}-\xi)|u\rangle=0,\qquad(\frac{d}{d\zeta}-\zeta)|u\rangle=0. \tag{100}$$

В этом случае решение уравнений (100)

$$|u\rangle=Ce^{-\frac{\xi^2+\zeta^2}{2}}. \tag{101}$$

ненормируемо и должно быть отброшено. Т.о., уравнения Дирака (93) описывают частицу, энергия которой может принимать только положительные значения.

Из четырех уравнений (93) только два независимы. Так, действуя на первое уравнение оператором $(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{\sigma}\frac{\partial}{\partial\vec{x}})$ и используя уравнение (95), получим второе уравнение. Аналогичным образом можно первое уравнение получить из второго.

К сожалению, бесконечнокомпонентные уравнения Дирака становятся несовместными при введении в них взаимодействия с внешним полем (электромагнитного, например). Это затрудняет выяснение их физического смысла. Мы убедились в том, что из четырех уравнений Дирака независимы только два, это сводит десять условий совместности к одному, но несовместность остается. Продолжим слова П.А.М.Дирака, вынесенные в эпиграф: "Эти уравнения прекрасны с математической точки зрения, но они до сих пор не привели к чему-либо, имеющему физическое значение. Я полагаю, что нужно продолжать попытки в этом направлении, пытаясь догадаться до некоторого подходящего математического аппарата, который в дальнейшем привел бы к хорошей теории.[77]"

Уравнения Дирака (93) интересны тем, что в них используется бесконечнокомпонентное приводимое представление группы Лоренца. Это представление Э.Майорана [80] исследовал в 1932 г. с той же целью, что и Дирак — избавиться от отрицательных энергий. Представление Майорана-Дирака реализуется с помощью спиновых операторов $\vec{S}^{(1)}$ и $\vec{S}^{(2)}$, определяемых (76) и (77) и удовлетворящих соотношениям

$$(\vec{S}^{(1)})^2 = (\vec{S}^{(2)})^2 = -\frac{3}{16}. \tag{102}$$

Представление Майорана-Дирака распадается на следующие неприводимые представления (-1/4,-1/4), (-1/4,-3/4), (-3/4,-1/4), (-3/4,-3/4). Уравнения Дирака используют представление (-1/4,-1/4) и описывают при $m = 0$ частицу с нулевой спиральностью. В статье [81] исследовались бесконечнокомпонентные уравнения, в которых использовались представления (-1/4,-3/4), (-3/4,-1/4), описывающие в безмассовом пределе частицы со спиральностью +1/2 и -1/2.

13. Расширенная малая группа Лоренца и волновые уравнения безмассовых полей.

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов.Это чудесный дар, которого мы не понимаем и которого не заслуживаем.

Е.Вигнер, [66].

Одна из самых фундаментальных работ в теоретической физике — это работа Е.Вигнера 1939 г. [82]. Она была напечатана Дж. фон Нейманом в редактируемом им журнале Annals of Mathematics после того, как была отвергнута редакцией одного престижного математического журнала [17]. В этой классической работе Е.Вигнер ввел понятие малой группы Лоренца. Малая группа Лоренца — это преобразование Лоренца, не изменяющее 4-импульса частицы. В 1987 г. в работе Й.Кима и Е.Вигнера [83] было введено понятие расширенной малой группы Лоренца, преобразований Лоренца, не изменяющих 4-импульс безмассовой частицы или подвергающих его масштабному преобразованию. Расширенная малая группа Лоренца была введена также в работе [84].

Рассмотрим произвольное преобразование Лоренца, бесконечно мало отличающееся от единичного,

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \Delta\omega_{\mu\nu})x_\mu, \qquad \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}. \tag{103}$$

При этом произвольная волновая функция преобразуется следующим образом:

$$\psi'(x') = (1 + \frac{i}{2}S_{\mu\nu}\Delta\omega_{\mu\nu})\psi(x(x')), \tag{104}$$

где $S_{\mu\nu}$ — инфинитезимальные операторы группы Лоренца,

$$S_{ik} = \varepsilon_{ikl}S_l, \qquad S_{i4} = -S_{4i} = T_i, \tag{105}$$

где S_i и T_i — те же, что и в (76). Рассмотрим плоскую волну

$$\psi(x) = u(p)e^{ipx} \tag{106}$$

и потребуем, чтобы величина $u(p)$ однозначно (с точностью до численного множителя) определялась 4-импульсом p. Поскольку мы рассматриваем безмассовую частицу, то масштабные преобразования 4-импульса также сопровождаются умножением $u(p)$ на численный множитель. Мы убедимся сейчас, что наше требование, которое можно символически изобразить так:

$$p \to u(p) \tag{107}$$

эквивалентно волновым уравнениям безмассовых полей.

Рассмотрим преобразование Лоренца

$$L_{\mu\nu}(\Delta, p) = \delta_{\mu\nu} + \Delta_\mu p_\nu - \Delta_\nu p_\mu, \tag{108}$$

где Δ — произвольный бесконечно малый 4-вектор. Очевидно, это преобразование принадлежит расширенной малой группе Лоренца, т.к.

$$p'_\mu = L_{\mu\nu}(\Delta, p)p_\nu = (1 - (\Delta p))p_\mu. \tag{109}$$

Преобразующаяся при таком преобразовании Лоренца волновая функция $u(p)$ должна остаться сама собой, т.е. может приобрести какой-то численный множитель. Т.о., мы получаем, согласно (104),

$$u(p) \to u'(p') = (1 + iS_{\mu\nu}\Delta_\mu p_\nu)u(p). \tag{110}$$

Из нашего требования следует, что

$$u(p) \to u'(p') = (1 - \eta(\Delta p))u(p), \tag{111}$$

где η — численный коэффициент (мы разложили наш численный множитель в ряд по Δ и учли, что, кроме Δ и p, никаких других 4-векторов в нашем распоряжении нет). Сравнение (110) и (111) дает

$$(iS_{\mu\nu} + \eta\delta_{\mu\nu})p_\nu u(p) = 0. \tag{112}$$

Полагая 4-импульс частицы $p = (0, 0, p, ip)$ и используя (105) и (77), получим из (112):

$$\begin{aligned} &(S_x^{(1)} + iS_y^{(1)})u = 0, \\ &(S_x^{(2)} - iS_y^{(2)})u = 0, \\ &(S_z^{(1)} - S_z^{(2)})u = \eta u, \end{aligned} \tag{113}$$

откуда $\eta = s_1 + s_2$. Т.о., мы получили следующие уравнения безмассового поля:

$$(iS_{\mu\nu} + (s_1 + s_2)\delta_{\mu\nu})p_\nu u(p) = 0. \tag{114}$$

Переходя к координатному представлению

$$\psi(x) = \int u(p)e^{ipx}\delta(p^2)d^4p, \tag{115}$$

получим уравнения безмассового поля в виде

$$(iS_{\mu\nu} + (s_1 + s_2)\delta_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x) = 0. \tag{116}$$

Приведем также ковариантную запись уравнений (79) и (83) в координатном представлении,

$$(i\widetilde{S}_{\mu\nu} + (s_1 - s_2)\delta_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x) = 0, \tag{117}$$

где $\widetilde{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}S_{\rho\sigma}$. Если $s_1 \neq s_2$ и $s_1 + s_2 + 1 \neq 0$, то уравнения (116) и (117) эквивалентны [84].

Перечислим те значения (s_1, s_2), для которых уравнения (116) эквивалентны известным уравнениям.

(1,0) и (0,1)	Максвелл, 1864 (фотоны) [85]
(1/2,0) и (0,1/2)	Вейль, 1929 (нейтрино) [34]
(2,0) и (0,2)	Бронштейн, 1936 (гравитоны) [64]
(1/2,1/2)	Огиевецкий, Полубаринов, 1966 (нотофы) [72]
(-1/4,-1/4)	Дирак, 1971 [79]
(-1/4,-3/4) и (-3/4,-1/4)	Стаунтон, 1974 [81]

14. Теорема Пенроуза о спинорах и теорема Вейнберга-Виттена о безмассовых полях.

Теорема Стокса обладает тремя важными характерными признаками многих больших теорем.
1.Она тривиальна.
2.Тривиальна она потому, что все входящие в нее выражения определены надлежащим образом.
3.Она имеет важные следствия.
М.Спивак, [86].

Теоремы Пенроуза и Вейнберга-Виттена столь же тривиальны, как и теорема Стокса, и поэтому не менее интересны.

Летом 1995 г. известный английский математик Роджер Пенроуз прочел в Центре научной культуры им. Э.Майорана несколько лекций, в которых он рассказывал о твисторах, квантовой гравитации и о многом другом. В частности, он рассказал о том, что представляет собой произвольное состояние нерелятивистской частицы со спином S. Согласно Р.Пенроузу, состояние частицы со спином S можно представлять себе как набор $2S$ штук нерелятивистских частиц со спином $1/2$:

$$\psi_S = A\Big\{\psi^{(1)} \times \psi^{(2)} \times \psi^{(3)} \times \cdots \times \psi^{(2S)}\Big\}, \tag{118}$$

где $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(2S)}$ — нерелятивистские спиноры, описывающие частицы со спином $1/2$, ψ_S — волновая функция частицы со спином S, фигурные скобки означают симметризацию относительно индексов $(1), (2), \ldots, (2S)$, A — некоторая константа. Представление (118) основано на теореме, доказанной Р.Пенроузом еще в 1960 г.:

Полностью симметричный спинтензор ранга $2S$ (т.е. комплексный полностью симметричный тензор в комплексном пространстве двух измерений с $2S$ индексами) всегда представим в виде симметризованного произведения $2S$ штук спиноров.

Теорема Пенроуза эквивалентна основной теореме алгебры и ее доказательство можно найти в статье [87] и в книгах [88,89] Пенроуза. В статьях [90–92] рассматриваются различные приложения теоремы Пенроуза в электромагнетизме и в квантовой теории. Анализ уравнений (116) и (117) приводит к следующему представлению волновой функции безмассовой частицы (в случае положительно частотной плоской волны с определенным 4-импульсом)

$$\psi_{(s_1,s_2)}(\vec{p}) = f(\vec{p})\underbrace{u_R \times u_R \times \cdots \times u_R}_{2s_1} \times \underbrace{u_L \times u_L \times \cdots \times u_L}_{2s_2} e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}. \tag{119}$$

где u_R и u_L — вейлевские спиноры, нормированные условиями (41), описывающие правые и левые частицы, $f(\vec{p})$ — скалярная функция. Для другой плоской волны с тем же 4-импульсом получим аналогичное представление:

$$\varphi_{(s_1,s_2)}(\vec{p}) = g(\vec{p})\underbrace{u_R \times u_R \times \cdots \times u_R}_{2s_1} \times \underbrace{u_L \times u_L \times \cdots \times u_L}_{2s_2} e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}. \tag{120}$$

Используя (41), получим, что

$$(\psi^*_{(s_1,s_2)}(\vec{p}), \varphi_{(s_1,s_2)}(\vec{p})) = f^*(\vec{p})g(\vec{p})\varepsilon^{2(s_1+s_2)}. \tag{121}$$

Т.о., если мы хотим определить лоренцковариантное скалярное произведение двух положительно частотных волновых функций, преобразующихся по представлению (s_1, s_2),

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}d^3p \tag{122}$$

и

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t}d^3p, \tag{123}$$

то мы можем сделать это следующим образом:

$$(\psi, \varphi) = \int (\psi^*(\vec{p}), \varphi(\vec{p})) \frac{d^3p}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)+1}} = \int f^*(\vec{p}) g(\vec{p}) \frac{d^3p}{\varepsilon}. \tag{124}$$

Вернувшись к координатному представлению, мы найдем, что

$$(\psi, \varphi) = \int \psi^*(\vec{x}, t) G_1(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(\vec{y}, t) d^3x d^3y, \tag{125}$$

где

$$G_1(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)-1}} d^3p. \tag{126}$$

Мы видим, что только в двух случаях, $s_1+s_2 = 0$ и $s_1+s_2 = \frac{1}{2}$ существует локальная плотность вероятности, т.е.

$$(\psi, \varphi) = \int \rho d^3x, \tag{127}$$

где

$$\rho = \frac{1}{2i}(\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}), \tag{128}$$

если $s_1 = s_2 = 0$, и

$$\rho = (\psi^* \psi), \tag{129}$$

если $s_1+s_2 = \frac{1}{2}$. Во всех остальных случаях плотность вероятности билокальна. По такой же простой причине (а именно, из-за появления энергии в степени, зависящей от спина, в знаменателе) не существуют в случае высших спинов локальные плотности энергии, импульса и других величин, а возникают соответствующие билокальные плотности.

В 1980 г. С.Вейнберг и Э.Виттен [93] доказали теорему о связи спиральности безмассового поля и существованием сохраняющихся тензорных плотностей:

сохраняющийся тензор $T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ может быть построен только для безмассового поля со спиральностью, не большей чем $\frac{n}{2}$ ($\lambda \le \frac{n}{2}$).

Так, сохраняющийся 4-вектор тока существует только, если $\lambda \le \frac{1}{2}$, а сохраняющийся тензор энергии-импульса существует только, если $\lambda \le 1$. Доказывается эта теорема очень просто. Рассмотрим матричный элемент

$$\langle \vec{p}\,', \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle. \tag{130}$$

Выберем систему отсчета так, чтобы $\vec{p}\,' = -\vec{p}$ и $\vec{p} = (0, 0, p)$. Повернем систему координат на угол θ вокруг оси z. Тогда

$$\begin{aligned} &\langle -\vec{p}\,', \lambda | e^{-iJ_z\theta} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} e^{iJ_z\theta} | \vec{p}, \lambda \rangle = e^{2i\lambda\theta} \langle -\vec{p}, \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{2\lambda} \langle -\vec{p}, \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle. \end{aligned} \tag{131}$$

Величина $T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ преобразуется, как тензор. Поэтому для любой отличной от нуля компоненты тензора, $T_{\underbrace{xxx}_{k}\ldots\underbrace{yyy}_{l}\ldots000}$ где $k + l \le n$, мы получим

$$e^{-iJ_z\theta} T_{\underbrace{xxx}_{k}\ldots\underbrace{yyy}_{l}\ldots000} e^{iJ_z\theta} = (\cos\theta)^{k+l} T_{\underbrace{xxx}_{k}\ldots\underbrace{yyy}_{l}\ldots000} + \ldots \tag{132}$$

(Все компоненты $T_{\ldots zzz\ldots} = 0$, поскольку мы рассматриваем сохраняющийся тензор, т.е. такой, для которого $T_{\ldots\mu\ldots}(p\,' - p)_\mu = 0$). Сравнение (132) и (131) приводит к соотношению

$$2\lambda = k + l \le n, \tag{133}$$

Т.о., теорема доказана.

15. Об энергии фотонов и других безмассовых частиц.

Целых пятьдесят лет сознательного поиска ничуть не приблизили меня к ответу на вопрос: что такое кванты света? Сегодня же любой проходимец считает, что ему это известно, но они заблуждаются.

Из письма А.Эйнштейна М.Бессо, [94].

Что мы знаем о квантах света, фотонах? Примерно то же самое, что мы можем сказать и о квантах других безмассовых полей. Мы знаем, что фотон — это частица, обладающая энергией $\varepsilon = \omega$ и импульсом $\vec{p} = \vec{k}$, где ω и $\vec{k}$ — частота и волновой вектор соответствующей волны де Бройля. Что фотон может быть правым (R), или левым (L), или в общем случае находиться в состоянии с эллиптической поляризацией. Волновые функции фотона удовлетворяют релятивистским волновым уравнениям, которые могут быть записаны в различных формах: (14), (15), (23), (34), (64), (116), (117).

Рассмотрим положительно частотную волновую функцию $\psi(\vec{x}, t)$ фотона, нотофа, гравитона, или любую другую, преобразующуюся по представлению (s_1, s_2), с фурье-образом $\psi(\vec{p})$, определенным, согласно (114), и нормированным на единицу с помощью скалярного произведения

$$(\psi, \psi) = \int (\psi^*(\vec{p}), \psi(\vec{p})) \frac{d^3p}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)+1}} = 1. \tag{134}$$

(Необязательно, чтобы частица была квантом классического поля. Это может быть, например, нейтрино, которому никакое классическое поле не соответствует.) Поскольку подынтегральное выражение в (134) представляет собой вероятность того, что частица находится в состоянии с импульсом $\vec{p}$ и энергией $\varepsilon = |\vec{p}|$, то ясно, что средняя энергия соответствующей частицы равна

$$\bar{\varepsilon} = \int (\psi^*(\vec{p}), \psi(\vec{p})) \frac{d^3p}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)}} = \int \psi^*(\vec{x}, t) G_2(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(\vec{y}, t) d^3x d^3y, \tag{135}$$

где

$$G_2(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)-2}} d^3p. \tag{136}$$

Мы видим, что локальная плотность средней энергии существует только в трех случаях: $s_1 + s_2 = 0$, $s_1 + s_2 = \frac{1}{2}$ и $s_1 + s_2 = 1$. В первых двух случаях плотность средней энергии содержит производные по времени и координатам, в третьем случае

$$\bar{\varepsilon} = \int \psi^* \psi d^3x = \begin{cases} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) d^3x & (), \\ \int (\vec{A}^2 + A_0^2) d^3x & (). \end{cases} \tag{137}$$

Видно, что выражение для плотности средней энергии фотона, с точностью до множителя, совпадает с выражением для плотности энергии классического электромагнитного поля. Гравитонам соответствует $s_1 + s_2 = 2$. В этом случае

$$G_2(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{138}$$

и для средней энергии гравитонов (и других частиц с $s_1 + s_2 = 2$) получим выражение для средней энергии через билокальную плотность,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3x d^3y. \tag{139}$$

Формулы (135), (137) и (139), разумеется, относятся только к частицам с определенной спиральностью $\lambda = s_1 - s_2$. Для того, чтобы увидеть, как эти формулы обобщаются на классические электромагнитные и гравитационные волны, нужно разобраться в том, как и какие состояния квантованных полей соответствуют классическим полям.

16. Квантовая структура и энергия классических полей.

Люди полагают, что простейшее выражение, повидимому, и должно быть истинным, но надо сознаться, что мы так и не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле.

Р.Фейнман, [95].

Гравитационную энергию, вообще говоря, нельзя локализовать.

П.А.М.Дирак, [96].

Обычно фотоны (или гравитоны) получаются при квантовании классических полей, но естественнее поступить наоборот и, исходя из представлений о фотонах (или гравитонах), разобраться в том, что же такое классическое поле с точки зрения квантовой теории. Классическое электромагнитное поле создается классическими токами. Допустим, в вакууме, в котором не было свободных фотонов, возникли на некоторое время и затем исчезли классические токи. При этом вакуум заполнится фотонами, которые мы и будем воспринимать как классическое поле. Квантовомеханический вектор состояния, соответствующий классическому электромагнитному полю, обладает специфическими статистическими свойствами. Важную роль при описании этих свойств играет распределение Пуассона [97]. Распределение Пуассона появляется тогда, когда случайные события удовлетворяют следующим условиям (классический пример распределения Пуассона — это статистическое описание гибели прусских офицеров от удара копытом лошади [98]):

1. Статистическая независимость событий (испустит, или нет, классический ток фотон, не связано с тем, испустит,или нет, в данный момент другой классический ток другой фотон; ударит, или нет, лошадь копытом прусского офицера, не связано с тем, ударит, или нет, в данный момент другая лошадь другого прусского офицера).
2. Вероятность того, что событие произойдет за бесконечно малый промежуток времени, пропорциональна этому проме–жутку времени.
3. Вероятность того, что за бесконечно малый промежуток времени произойдет два события, равна нулю.

Тогда вероятность того, что за какое-то время T произойдет n событий,

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}, \tag{140}$$

где $\bar{n}$ — среднее число событий за время T. Оказывается, что вероятность того, что классические токи породят n фотонов, описывается распределением Пуассона (это доказывается в квантовой электродинамике), т.е. соответствующий квантовомеханический вектор состояния имеет вид

$$|\psi\rangle = A_0|0\rangle + A_1|1\rangle + A_2|2\rangle + \dots \tag{141}$$

где

$$|A_n|^2 = P_n, \tag{142}$$

$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ — векторы вакуумного состояния, 1-фотонного, 2-фотонного и т.д. состояний (мы рассматриваем фотоны с определенными импульсами и поляризацией). Введем комплексное число α, такое, что

$$|\alpha|^2 = \bar{n}. \tag{143}$$

Тогда (141) можно записать следующим образом

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}(|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}}|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle + \dots). \tag{144}$$

Определим операторы рождения и уничтожения a^+ и a,

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle, \tag{145}$$

$$aa^+ - a^+a = 1. \tag{146}$$

(Мы не доказали, что в (144) относительные фазы векторов $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots$ таковы, что выполняются соотношения (145), это доказывается в квантовой электродинамике.) Вектор состояния $|\psi\rangle$ обладает замечательным свойством, он является собственным вектором оператора уничтожения с собственным значением α,

$$a|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle. \tag{147}$$

Состояние $|\psi\rangle$ называется когерентным состоянием и соответствует классическому электромагнитному полю [97]. Среднее число фотонов в этом состоянии, согласно (143) и (147),

$$\bar{n} = \langle\psi|a^+a|\psi\rangle. \tag{148}$$

Рассмотрим теперь квантованное поле, соответствующее произвольному безмассовому полю со спиральностью λ [67,99],

$$\Phi(x) = \int v_\lambda(\vec{p})(a_\lambda(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t} + a^+_{-\lambda}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\vec{x}+i\varepsilon t})d^3p, \tag{149}$$

$$a_\lambda(\vec{p})a^+_{\lambda'}(\vec{p}\,') - a^+_{\lambda'}(\vec{p}\,')a_\lambda(\vec{p}) = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{150}$$

Будем считать, что квантовомеханический вектор состояния рассматриваемого безмассового поля представляет собой когерентное состояние каждого оператора уничтожения,

$$a_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle = \alpha_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle. \tag{151}$$

Число частиц в интервале d^3p определяется теперь формулой

$$dn = |\alpha_\lambda(\vec{p})|^2 d^3p = \langle\Psi|a^+_\lambda(\vec{p})a_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle d^3p. \tag{152}$$

Под классическим полем будем понимать среднее значение

$$\psi(x) = \langle\Psi|\Phi(x)|\Psi\rangle. \tag{153}$$

Ясно, что классическое поле $\psi(x)$ удовлетворяет такому же уравнению (116), какому удовлетворяет волновая функция классического безмассового поля. Кроме того, видно, что классическое поле разлагается не только по положительным, но и по отрицательным частотам. Согласно (149), (151) и (153),

$$\psi(\vec{x},t) = \int v_\lambda(\vec{p})(\alpha_\lambda(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t} + \alpha^+_{-\lambda}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\vec{x}+i\varepsilon t})d^3p, \tag{154}$$

Вычисляя интеграл

$$I_N = \int \psi^+(\vec{x},t)G_N(\vec{x}-\vec{y})\psi(\vec{y},t)d^3x d^3y, \tag{155}$$

где

$$G_N(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)-N}}d^3p, \tag{156}$$

найдем, что

$$I_N = \int \varepsilon^{n-1}(|\alpha_\lambda(\vec{p})|^2 + |\alpha_{-\lambda}(\vec{p})|^2)d^3p. \tag{157}$$

Т.о., интеграл I_N представляет собой при $N=1$ — полное число квантов, образующих поле, при $N=2$ — среднюю энергию квантов, при $N=3$ — среднее значение квадрата энергии и т.д.. Формально выражение для энергии любого классического поля (т.е. когерентного состояния квантованного поля) $\varepsilon = I_2$, где I_2 определяется формулой (155), совпадает со средней энергией кванта соответствующего поля (135). Различаются эти случаи интерпретацией компонент у волновой функции ψ. В первом случае — это компоненты соответствующих классических полей, содержащие как положительные, так и отрицательные частоты, а также положительные и отрицательные спиральности, во втором же случае это компоненты положительно частотных волновых функций соответствующих квантов с определенной (положительной или отрицательной) спиральностью.

Согласно (156), функция G_2 обращается в дельта-функцию, а плотность энергии становится локальной, если $s_1 + s_2 = 1$. Это случай электромагнитного поля и поля нотофов. Во всех остальных случаях классических полей со спином отличным от нуля, плотность энергии билокальна.

17. Об энергии гравитационных волн.

Я вместе с одним молодым сотрудником получил интересный результат относительно того, что не существует волн гравитации...
Из письма А.Эйнштейна М.Борну, [100].

Этим молодым сотрудником А.Эйнштейна был Натан Розен. Известно, что Эйнштейн и Розен нашли ошибку в своей работе, гравитационные волны вновь обрели существование [101], и мы можем рассматривать вопрос об их энергии.

Эйнштейн не раз подвергался довольно резкой критике за введенный им псевдо-тензор энергии-импульса. Так, например, в 1918 г. Э.Шредингер показал [102], что определенным выбором системы координат можно обратить в нуль в конечной области пространства плотность энергии гравитационного поля, введенную А.Эйнштейном. "Результат,"— писал Шредингер, — представляется мне настолько странным, что я считаю необходимым вынести его на всеобщее обсуждение." Не зря Н.В.Тимофеев-Ресовский писал, "что Шредингер тоже мог запустить очень злую издевку"[9]. Однако в настоящее время странным представляется не результат Шредингера, а то, что до сих пор не прекращаются попытки ввести в теорию тяготения локальную плотность энергии [103]. Как мы видели, невозможно ввести локальную плотность энергии гравитационного поля даже в случае очень слабого поля, и проблема связана не с тем, что тяготение связывается с искривлением пространства-времени, а с тем, что спин гравитонов равен 2. Псевдотензор энергии-импульса в теории тяготения в пределе слабого поля остается неоднозначно определенным и изменяется при калибровочных преобразованиях, не изменяющих тензор кривизны. Однако полная энергия гравитационного поля — это инвариант этих калибровочных преобразований. Простейший пример, когда плотность не калибровочно инвариантна, а интеграл калибровочно инвариантен, — это интеграл вида

$$I = \int \vec{A}\vec{H} d^3x, \tag{158}$$

где $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Очевидно, что при $\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\chi$ подынтегральное выражение изменяется на $\mathrm{div}(\chi\vec{H})$ и интеграл не изменяется. Физический смысл этого интеграла (он связан с разностью чисел правых и левых квантов, составляющих поле) и другие вопросы, касающиеся локальных и билокальных плотностей, рассмотрены в работе [104].

Любая теория, например "релятивистская теория гравитации", основывающаяся на некоторой локальной плотности энергии-импульса гравитационного поля, в действительности, использует некоторое не калибровочно инвариантное описание гравитационного поля, фиксируя при этом каким-то, тем, или иным, образом калибровку. Попытки ввести в теорию тяготения имеющую физический смысл локальную плотность энергии гравитационного поля несостоятельны, "теория Эйнштейна является наиболее естественным и красивым вариантом теории тяготения" [105].

В заключение этого раздела выпишем выражение для энергии гравитационного поля через компоненты тензора кривизны (69). Это выражение эквивалентно I_2, определяемому (155), однако сейчас мы используем стандартное определение тензора кривизны [106].

$$\varepsilon = \frac{c^4}{64\pi^2 G} \int \frac{E_{ij}(\vec{x})E_{ij}(\vec{y}) + H_{ij}(\vec{x})H_{ij}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3x d^3y. \tag{159}$$

Приведем также формулу для полного числа квантов, составляющих электромагнитное поле (I_1, определяемое (155)) [107,108].

$$N = \frac{1}{16\pi^3\hbar c} \int \frac{\vec{E}(\vec{x})\vec{E}(\vec{y}) + \vec{H}(\vec{x})\vec{H}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^2} d^3x d^3y. \tag{160}$$

18. О нелокализуемости фотонов и других релятивистских частиц.

Фотон нелокализуем! Не будет преувеличением сказать, что почти каждый физик знает об этом, но это никого не беспокоит. Оператор координаты не считается важной вещью... Оператор координаты интересует только студентов, а более точно, только начинающих изучать квантовую механику... и еще людей, интересующихся полом ангелов, таких людей вы найдете среди математических физиков, даже среди наиболее ярких из них, таких, как Шредингер или Вигнер...
А.Бакри, [11].

Трудно сказать, действительно ли почти каждый физик знает о том, что фотон не локализуем, но то, что это мало кого беспокоит, определенно не преувеличение. В 1974 г. появилась работа [109], о которой мы еще будем говорить, в этой работе была продемонстрирована эффективность применения понятия целой функции комплексного переменного к исследованию вопроса о локализации частиц в релятивистской квантовой механике. Сравнительно недавно было показано, что невозможно локализовать в конечном пространственном объеме скалярную частицу, описываемую уравнением Клейна–Гордона [13]. Основываясь на работах [109,13], можно чрезвычайно просто доказать, что фотон (а также электрон, гравитон и т.д.) не может быть локализован в конечном объеме.

Как мы видели (уравнения (14)), правые, или левые, фотоны могут быть описаны уравнениями

$$i\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi} = \pm \mathrm{rot}\vec{\psi}, \qquad \mathrm{div}\vec{\psi} = 0. \tag{161}$$

Если фотон локализован в момент времени $t = 0$ в конечном пространственном объеме, то фурье-образ волновой функции фотона $\vec{\psi}(\vec{x}, t)$

$$\vec{\psi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \vec{\psi}(\vec{x}, 0)e^{-i\vec{k}\vec{x}}d^3x \tag{162}$$

представляет собой целую функцию $\vec{k}$, т.е. функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости, за исключением,быть может, бесконечно удаленных точек. Положительно частотное решение уравнений [161] с начальным значением $\vec{\psi}(\vec{x}, t)$ имеет вид

$$\vec{\psi}(\vec{x}, t) = \int \vec{\psi}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}d^3k \tag{163}$$

Из волновых уравнений [161] следует, что

$$\pm\omega\vec{\psi}(\vec{k}) = i[\vec{k}\vec{\psi}(\vec{k})], \qquad \omega^2 = \vec{k}^2. \tag{164}$$

Из (164) следует, что

$$\pm\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\psi_1(\vec{k}) = ik_2\psi_3(\vec{k}) - ik_3\psi_2(\vec{k}). \tag{165}$$

Ясно, что последнее соотношение не может выполняться, если $\psi_1(\vec{k})$, $\psi_2(\vec{k})$ и $\psi_3(\vec{k})$ представляют собой целые функции k_1, k_2 и k_3.

Поскольку уравнения [161] представляют собой обычные уравнения Максвелла (если в них положить $\vec{\psi} = \vec{E} \pm i\vec{H}$), а их положительно частотные решения описывают электромагнитные волны с правой, или левой, круговыми поляризациями, то мы доказали также, что

электромагнитное поле с определенной круговой поляризацией не может быть локализовано в конечном пространственном объеме.

Ясно, что приведенные рассуждения применимы к любым частицам, описываемым линейными релятивистскими уравнениями, приводящими к обычной связи между энергией и импульсом $\varepsilon^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

19. Об операторе координаты в релятивистской квантовой механике.

Я прочитал Вашу старую статью... и обнаружил там следующие слова: "...поскольку всегда неприятно говорить о пространственной координате светового кванта". Эти слова меня очень обрадовали...

Из письма В.А.Фока П.А.М.Дираку, [110].

Продолжим письмо В.А.Фока, написанное в сентябре 1930 г.:

''Эти слова меня очень обрадовали, потому что они точно соответствуют идеям, к которым меня привело развитие моей попытки теории фотонов.

Позвольте мне в двух словах изложить эти идеи.

Если описывать фотон двумя комплексными векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющими уравнениям Максвелла, то эти векторы должны также удовлетворять условиям

$$\mathtt{div}\vec{E} = 0, \quad \mathtt{div}\vec{H} = 0. \tag{1}$$

Таким образом, компоненты волновой функции не независимы, но связаны дифференциальными условиями (1). Если обозначить E и H одной буквой F, то собственная функция F любого оператора $\mathcal{L}$ должна удовлетворять одновременным уравнениям

$$\mathcal{L}F = \lambda F, \quad \mathtt{div} F = 0. \tag{2}$$

Следовательно, допустимы только такие операторы $\mathcal{L}$, для которых

$$\mathtt{div}\mathcal{L}F = 0, \qquad \mathtt{div}F = 0. \tag{3}$$

Операторы импульса, поляризации и энергии удовлетворяют (3), но для оператора положения фотона (умножения на x, y, z) необходимые условия не выполняются. *Таким образом, не существует состояния с определенным положением фотона."*

То, что $\vec{x}$ не оператор координаты — это не какая-то специфика теории фотона, а общее утверждение, справедливое для любой частицы, описываемой релятивистским волновым уравнением (уравнением Клейна-Гордона, Дирака, Прока и др.). Связано это с тем, что в релятивистской теории скалярные произведения определяются *только* на решениях релятивистского волнового уравнения, поэтому любой оператор, в том числе и

оператор координаты, действуя на волновую функцию, должен оставлять ее решением релятивистского волнового уравнения.

Можно было бы определить оператор координаты в импульсном пространстве, как в нерелятивистской квантовой механике, т.е. как $i\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$, но этот оператор оказывается в релятивистском случае не эрмитовым, так как скалярные произведения в импульсном пространстве имеют вид (134)

$$(\psi, \psi) = \int (\psi^*(\vec{p}), \psi(\vec{p}))\frac{d^3p}{\varepsilon^{N+1}}. \tag{166}$$

где $N \geq 1$. Перенося $i\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ с $\psi(\vec{p})$ на $\psi^*(\vec{p})$, мы должны при интегрировании по частям дифференцировать и $\frac{1}{\varepsilon^{N+1}}$. Однако

оператор координаты должен быть эрмитовым.

Оба эти требования к оператору координаты могут быть удовлетворены одновременно. Так, например, в случае $N = 0$ (скалярное поле, уравнение Клейна-Гордона) оператор координаты в импульсном пространстве имеет вид

$$\vec{x}^{op} = i(\frac{\partial}{\partial\vec{p}} - \frac{\vec{p}}{2\varepsilon}). \tag{167}$$

В координатном представлении оператор (167) переходит в некоторый интегро–дифференциальный оператор сравнительно простого вида. Не намного более сложные выражения для оператора координаты получаются и в случае произвольного спина.

Все эти вопросы были подробно разобраны в статье Ньютона и Вигнера [111]. Ньютон и Вигнер в поисках выражения для оператора координаты исходили из нескольких простых и естественных условий, из которых основными были следующие:

1) Оператор импульса $\vec{p}^{op}$ — попрежнему инфинитезимальный оператор пространственного сдвига, т.е. оператор

$$T(\vec{a}) = e^{i\vec{p}^{op}\vec{a}} \tag{168}$$

соответствует сдвигу $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$.
2) Если состояние принадлежит к числу состояний, локализованных в определенный момент времени t в определенной точке $\vec{x}$, то состояние, получаемое в результате пространственного сдвига, ортогонально всем первоначальным состояниям.

Локализованная в точке, в смысле Ньютона и Вигнера, частица представляет собой расплывающийся волновой пакет, составленный из *положительно частотных решений* релятивистского волнового уравнения.

В начальный момент времени (момент локализации в точке, в качестве которой выберем начало координат) волновая функция частицы обращается в бесконечность в нуле как $\frac{1}{r^{\frac{5}{2}+s_1+s_2}}$ и экспоненциально убывает на расстояниях порядка комптоновской длины волны частицы $R \approx \frac{\hbar}{mc}$.

20. О связи локализации и релятивистской причинности.

Истина все же скорее возникает из заблуждения, чем из неясности.
Ф.Бэкон, [112].

Неясностей в вопросе о локализации довольно много, но можно надеяться, что здесь не меньше и заблуждений, а поэтому есть надежда найти истину, которая поможет нам улучшить наши представления о пространстве и времени.

В 1974 г. в работе [109] было доказано, что локализация релятивистсткой частицы, в смысле Ньютона-Вигнера, несовместима с релятивистской причинностью. Доказывается это довольно просто. Пусть $\psi(\vec{x},t)$ описывает частицу с произвольным спином, локализованную в конечном пространственном объеме в момент времени $t=0$. В момент времени t частица попрежнему должна быть локализована в конечном объеме (релятивистская причинность). Поэтому скалярное произведение $\psi(\vec{x},t)$ и $\psi(\vec{x},0)$, подвергнутой сдвигу на $\vec{a}$, т.е. $e^{i\vec{p}\vec{a}}\psi(\vec{x},0)$, должно обращаться в нуль, начиная с некоторых $\vec{a}$,

$$(\psi(\vec{x},t), e^{i\vec{p}\vec{a}}\psi(\vec{x},0)) = f(\vec{a},t) = 0 \qquad \text{при достаточно больших } \vec{a}. \tag{169}$$

В импульсном пространстве, согласно (124),

$$f(\vec{a},t) = \int e^{i\vec{p}\vec{a}}(\psi^*(\vec{p}),\psi(\vec{p}))\frac{e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\ t}}{(\sqrt{\vec{p}^2+m^2})^{2(s_1+s_2)+1}}d^3p. \tag{170}$$

Из (170) следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int f(\vec{a},t)e^{-i\vec{p}\vec{a}}d^3a = (\psi^*(\vec{p}),\psi(\vec{p}))\frac{e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\ t}}{(\sqrt{\vec{p}^2+m^2})^{2(s_1+s_2)+1}}. \tag{171}$$

Но фурье-образ функции $f(\vec{a},t)$, обращающейся в нуль, начиная с некоторых $\vec{a}$, должен быть целой функцией $\vec{p}$ и не может иметь вид (171).

Мы доказали несовместимость локализуемости в конечном объеме и релятивистской причинности. Однако вопрос о нарушении причинности в релятивистской квантовой механике решается не так просто. Изложенное выше говорит скорее о несовершенстве принятого нами понятия локализации, чем о серьезных проблемах с причинностью.

Рассмотренная нами несовместимость локализации и причинности относится, в частности, и к спину $1/2$. Однако, как мы сейчас увидим, другой подход к вопросу показывает, что в случае спина $1/2$ причинность не нарушается. При этом становится ясным, почему может нарушаться причинность в случае более высоких спинов.

Общая идея может быть проиллюстрирована на простом частном случае движения нейтральной частицы со спином $1/2$, обладающей аномальным магнитным моментом, в постоянном электромагнитном поле [113,114]. В этом случае существует решение уравнения Дирака (считаем, что аномальный магнитный момент $\mu = 1$)

$$(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + m)\psi(x) = 0 \tag{172}$$

в виде плоской волны

$$\psi(x) = e^{iPx}u(P) = e^{i\vec{P}\vec{x}-i\varepsilon(\vec{P})}u(\vec{P}), \tag{173}$$

и уравнение Дирака принимает вид:

$$(iP_\mu\gamma_\mu - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + m)u(P) = 0. \tag{174}$$

Из (174) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}&|iP_\mu\gamma_\mu - \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + mI| = \\ &= (\varepsilon^2 - \vec{E}^2 - \vec{H}^2 - m^2)^2 - 4([\vec{E}\vec{P}]^2 + [\vec{H}\vec{P}]^2 + [\vec{E}\vec{H}]^2 + m^2\vec{H}^2 - 2\varepsilon\vec{P}[\vec{E}\vec{H}]) = 0.\end{aligned} \tag{175}$$

Уравнение (175) определяет энергию как функцию импульса $\varepsilon = \varepsilon(\vec{P})$ и дает возможность вычислить групповую скорость

$$\vec{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{P}}. \tag{176}$$

Получающееся выражение (176) довольно громоздко, но поддается анализу. Можно убедиться в том, что скорость всегда остается досветовой (причинность не нарушается), но обладает интересной особенностью: если магнитное поле равно нулю, а импульс $\vec{P}$ направлен вдоль электрического поля, то в формуле (176) возникает особенность типа $\frac{0}{0}$, приводящая к явлению, аналогичному конической рефракции в оптике [114].

Докажем, что причинность в случае спина 1/2 не нарушается при довольно общих предположениях о взаимодействии. Рассмотрим уравнение Дирака вида

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + Q)\psi(x) = 0, \tag{177}$$

где Q — не зависящая от координат 4x4 матрица с единственным ограничением: требуется, чтобы волновая функция $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$ удовлетворяла уравнению

$$\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + Q) = 0, \tag{178}$$

где производная $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ действует налево. Из (177) и (178) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} i(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi) = \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{179}$$

т.е. выполняется уравнение непрерывности для 4–вектора тока вероятности J_μ.

Для плоской волны вида (173) получаем уравнения

$$\begin{aligned} (-\varepsilon\gamma_4 + i\vec{P}\vec{\gamma} + Q)u(\vec{P}) = 0, \\ \bar{u}(\vec{P})(-\varepsilon\gamma_4 + i\vec{P}\vec{\gamma} + Q) = 0. \end{aligned} \tag{180}$$

Продифференцируем первое из уравнений по $\vec{P}$. Получим

$$(-\vec{v}\gamma_4 + i\vec{\gamma})u - (-\varepsilon\gamma_4 + i\vec{P}\vec{\gamma} + Q)\frac{\partial u}{\partial \vec{P}} = 0. \tag{181}$$

Умножая (181) на $\bar{u}$, найдем, что

$$-\vec{v}(\bar{u}\gamma_4 u) + i(\bar{u}\vec{\gamma}u) = 0, \tag{182}$$

или

$$\vec{v} = \frac{i(\bar{u}\vec{\gamma}u)}{(u^* u)} = \frac{\vec{j}}{\rho}. \tag{183}$$

Т.к. ρ — *положительно определенная величина*, то скорость $\vec{v}$ ни в какой системе отсчета не обращается в бесконечность, а, следовательно, всегда меньше скорости света.

В случае спинов $S \geq 1$ плотность вероятности ρ *не положительно определенная величина* и известно случаев, когда скорость $\vec{v}$ может быть сверхсветовой, а плотность ρ обращаться в нуль [115,116,113].

Мы убедились в том, что, если плотность вероятности — положительно определенная величина, то скорость частицы, понимаемая *как групповая скорость* соответствующей волны де Бройля, не превосходит скорости света. Другая связь между релятивистской причинностью и положительной определенностью плотности вероятности обсуждалась Вигнером в 1962 г. [117]. Воспользовавшись подходом Вигнера, окружим область, в которой локализована частица в момент времени $t = 0$ двумя сферами. Пусть меньшая из этих сфер (радиуса R_1) расширяется со скоростью света до радиуса $R_1' = R_1 + t$, а вторая (радиуса R_2) сжимается до радиуса $R_2' = R_2 - t$,такого, что $R_2' \geq R_1'$. Выражение

$$\int\limits_{R_1}^{R_1'} (\rho - j_r)|_{t=r-R_1} dV + \int\limits_{R_1'}^{R_2'} \rho(r,t) dV + \int\limits_{R_2'}^{R_2} (\rho + j_r)|_{t=R_2-r} dV - \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho(r,0) dV \tag{184}$$

представляет собой поток 4–вектора J_μ по некоторой замкнутой гиперповерхности, а, следовательно, равно нулю, в силу теоремы Гаусса

$$\int J_\mu d\sigma_\mu = \int \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} d^4x = 0. \tag{185}$$

Но интеграл $\int\limits_{R_1}^{R_2} \rho(r,0)dV = 0$, т.к. берется в момент времени $t = 0$ и берется по области, где $\rho = 0$. Это означает, что сумма остальных трех интегралов также равна нулю. Но подынтегральное выражение в каждом из этих интегралов положительно определенно, а, следовательно,

$$\rho(t) = 0 \qquad\qquad r > R_1 + t, \tag{186}$$

т.е. причинность не нарушается ($\rho \geq |\vec{j}|$, т.к. 4–вектор J_μ — времени или светоподобный, что связано с положительной определенностью ρ). Т.о., *причинность не нарушается*, если существует *сохраняющийся* 4–вектор тока с *положительно определенной* временной компонентой, из равенства которой нулю следует обращение в нуль волновой функции частицы. (Предполагается, что обращение в нуль волновой функции в какой–то пространственной области означает, что вероятность нахождения частицы в этой области равна нулю. Это предположение справедливо не всегда. Например, оно не выполняется в случае скалярных частиц.)

Приведенный нами вывод о связи между существованием некоторой положительно определенной плотности и причинностью относится также к скалярному и электромагнитному полям, для которых существуют положительно определенная плотность энергии

$$\rho = \frac{1}{2}(|\frac{\partial\psi}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial\psi}{\partial\vec{x}}|^2 + m^2|\psi|^2), \qquad \rho = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}, \tag{187}$$

и плотность потока энергии

$$\vec{j} = -\frac{1}{2}(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{x}} + \frac{\partial\psi^*}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\psi}{\partial t}), \qquad \vec{j} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{4\pi}, \tag{188}$$

выполняются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \tag{189}$$

и условие

$$\rho \geq |\vec{j}|. \tag{190}$$

Т.о., если скалярное и электромагнитное поля локализованы в конечном объеме, то с причинностью все в порядке. Но, как мы видели, существуют определенные трудности именно с локализацией поля в конечном объеме.

21. Фаза Берри в геометрической оптике безмассовых частиц.

Если фундаментальная цель физики — поиск путей, ведущих к пониманию, казалось бы, не связанных друг с другом явлений в терминах нескольких объединяющих понятий, если это так, то работа Берри поистине фундаментальна.

И.Й.Р.Айтчисон, [118].

Большую роль при переходе от элементарных квантовых представлений к современной квантовой теории сыграла адиабатическая гипотеза Эренфеста (1913 г.): всякое определенное с точки зрения квантовой теории состояние переходит при адиабатическом изменении параметров системы снова в то же состояние, характеризующееся теми же квантовыми числами. В 1928 г. адиабатическая гипотеза Эренфеста была доказана М.Борном и В.А.Фоком [119] для невырожденных и невырождающихся в процессе эволюции систем и стала адиабатической теоремой. Борн и Фок исходили из волновой механики Шредингера, и их не интересовало, как изменится фаза волновой функции эволюционирующей системы, когда она вернется к исходному состоянию. Только в 1984 г. М.Берри [120] обратил внимание на то, что при медленной циклической эволюции волновая функция системы приобретает фазовый множитель, содержащий кроме тривиальной динамической фазы дополнительную фазу, называемую геометрической, топологической или фазой Берри. Фаза Берри обладает замечательными геометрическими свойствами: она не зависит от продолжительности эволюции (которая предполагается достаточно длительной, чтобы быть достаточно медленной), а определяется геометрическими (топологическими) свойствами пространства изменяющихся параметров системы.

Условие, определяющее фазу Берри, было в очень простой форме сформулировано Б.Саймоном [121], ознакомившимся с работой Берри до ее публикации, в 1983 г. Это условие содержалось еще в упомянутой выше работе Борна и Фока, рассматривавшими решение уравнения Шредингера с гамильтонианом, медленно изменяющимся со временем,

$$i\dot{\psi} = H(t)\psi. \tag{191}$$

Введем "мгновенные" собственные функции "мгновенного" гамильтониана

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi(t). \tag{192}$$

Выделяя динамический фазовый множитель, введем новую функцию $\varphi(t)$ с помощью соотношения

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t)e^{-i\int\limits_0^t E_n(t')dt'}. \tag{193}$$

Фазовый множитель, который приобретет волновая функция $\varphi(t)$ за период T медленного циклического изменения системы, выражается через фазу Берри Θ_B и равен $e^{i\Theta_B}$. Условие Борна–Фока–Саймона [119,121], определяющее фазу Берри, имеет вид (см. также [122-124])

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_n) = 0. \tag{194}$$

Рассмотрим простой пример, показывающий как работает условие "параллельного переноса" (194). Пусть ультрарелятивистская частица со спином $1/2$ движется по криволинейной траектории. Для определенности будем считать, что частица обладает правой спиральностью, т.е. описывается первым из уравнений (42)

$$(\vec{\sigma}\vec{n}(t) - 1)u(t) = 0. \tag{195}$$

где $u(t)$ — спинор, описывающий частицу, $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{\varepsilon}$ — единичный вектор, направленный вдоль направления импульса частицы. Продифференцируем уравнение (195):

$$(\vec{\sigma}\vec{n}(t) - 1)\dot{u}(t) + \vec{\sigma}\dot{\vec{n}}(t)u(t) = 0. \tag{196}$$

Соотношение (194) говорит о том, что спинор $\dot{u}(t)$ ортогонален спинору $u(t)$, т.е. является левым спинором и удовлетворяет второму из уравнений (42)

$$(\vec{\sigma}\vec{n}(t) + 1)u(t) = 0. \tag{197}$$

Из (196) и (197) получим уравнение, которое показывает, что изменение во времени вектора $\vec{n}(t)$ полностью определяет изменение во времени спинора $u(t)$,

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\dot{\vec{n}}(t)u(t). \tag{198}$$

Поскольку уравнение (195) определяет спинор $u(t)$ с точностью до нормировки и фазового множителя, то ясно, что недостающую информацию о фазе спинора $u(t)$ дает уравнение (198). Рассмотренное нами рассуждение обобщается на случай произвольного спина [125] и приводит к очень простому результату: когда конец вектора $\vec{n}(t)$ движется против часовой стрелки по замкнутому пути C на поверхности единичной сферы, то фаза Берри $\Theta(C) = -\lambda\Omega(C)$, где $\Omega(C)$ — телесный угол, очерчиваемый вектором $\vec{n}(t)$, [120].

Фаза Берри и ее обобщения находят применения в самых различных областях физики. Подробное изложение того, как проявляется фаза Берри в геометрической и нейтронной оптике можно найти в обзорах [123,124]. Об универсальности метода геометрических фаз можно судить по простому перечислению вопросов, исследованных этим методом (соответствующие ссылки см. в [118,123]): поведение спинов частиц в медленно вращающемся магнитном поле, эксперименты по спиновому резонансу в слабо модулированном магнитном поле, резонансные ядерные квадрупольные спектры медленно вращающихся образцов, прохождение фотонов через спирально изогнутые оптические волокна, классификация спектров молекул, эффект Яна–Теллера, квантовый эффект Холла и др.

22. Сонолюминесценция как возбуждение физического вакуума.

Некоторые печатают свои произведения, для того, чтобы показать всем, как это делается, а Юлиан Швингер публикует свои работы, чтобы показать, что только он один и может это сделать.

[126].

Последние семь статей одного из замечательных физиков нашего времени Ю.Швингера (умершего в 1994 г.) были посвящены удивительному явлению — сонолюминесценции [21].

Сонолюминесценция — это превращение звука в свет [127,128]. Жидкость (это может быть дистиллированная вода) подвергается воздействию акустических колебаний, и при этом испускаются фотоны. Так при 22 ^{0}C под воздействием звуковых колебаний с частотой 27 кГц вода испускает голубое свечение, но спектральный пик испускаемых фотонов лежит в ультрафиолетовой области (и равен 6 Эв). Понижение температуры от 22 ^{0}C до 3 ^{0}C увеличивает выход фотонов почти в 10 раз. Порция излучения испускается за время, меньшее $5 * 10^{-11}$ сек. Излучаемая световая энергия сравнима с поступающей звуковой. Плотность звуковой энергии порядка 10^{-11} эВ/атом, а так как энергия излучаемых фотонов порядка 10 эВ, то говорят, что плотность энергии увеличивается в 10^{12} раз.

"Сонолюминесценция — это явление, в котором энергия, поступающая в непрерывную среду на макроскопическом уровне, спонтанно фокусируется на молекулярно-атом-
но-электронных степенях свободы так, чтобы генерировать свет" [127]. "Замечательное явление когерентной сонолюминесценции поднимает следующие вопросы: как может макроскопическая классическая гидродинамическая система под воздействием макроскопической акустической силы за удивительно короткое время генерировать высокую атомную частоту, относящуюся к атомному уровню?" [21].

Сонолюминесценция известна и исследуется уже в течение 60 лет [129], однако в последние годы интерес к ней возрос в связи с новыми экспериментальными исследованиями [127,128]. Но почему мы уверены в том, что при сонолюминесценции акустическая энергия "спонтанно фокусируется на молекулярно-атомно-электронных степенях свободы", только ли благодаря возбуждению этих степеней свободы может возникать свет? Ю.Швингер предложил неожиданное решение проблемы: он предположил, что при сонолюминесценции происходит возбуждение вакуума, сопровождающееся испусканием фотонов. Швингер привлек для объяснения сонолюминесценции свойство вакуума, проявляющееся в "эффекте Казимира" [54], заключающемся в том, что вакуум изменяет свои свойства под влиянием различных внешних воздействий. В 1948 г. Казимир [130] предсказал, что между двумя незаряженными проводящими пластинами, расположенными в вакууме на расстоянии r друг от друга, возникает сила притяжения (на единицу площади)

$$F = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{r^4} \tag{199}$$

Эта сила не зависит ни от масс, ни от зарядов, причиной возникновения этой силы, обнаруженной впоследствии экспериментально [131], является изменение спектра нулевых колебаний вакуума электромагнитного поля из-за обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на пластинах.

В работах Швингера сонолюминесценция рассматривается как проявление нестационарного эффекта Казимира. В экспериментах по сонолюминесценции пузырьки воздуха в воде (с радиусами порядка $4 * 10^{-3}$ см) подвергаются сжатиям и растяжениям в ответ на положительные и отрицательные изменения давления под действием акустического поля. Швингер показывает, что внезапная остановка сжатия (коллапса) пузырька (полости в диэлектрике) сопровождается возбуждением электромагнитного вакуума и излучением фотонов. Но за счет чего останавливается сжатие? Швингер формулирует гипотезу: "*Коллапс полости внезапно замедляется под действием давления света, который рождается из-за внезапного замедления коллапса*". Швингер вычисляет вероятность рождения фотонов, делает численные оценки, которые говорят о том, что эффект Казимира может быть причиной сонолюминесценции.

Швингер использует в работах [21] сложный метод его любимой "теории источников". Мы же убедимся в справедливости идеи Швингера с помощью совсем элементарного рассмотрения. Будем считать, для простоты, что фотоны описываются скалярным полем, удовлетворяющим уравнению

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon}\Delta)\Phi(t) = 0, \tag{200}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды. Следуя Швингеру, предположим, что в какой-то момент времени величина $\varepsilon \neq 0$ скачком становится равной $\varepsilon = 1$. Убедимся в том, что при этом излучатся фотоны со спектральным распределением по энергиям, напоминающим распределение, наблюдаемое при сонолюминесценции.

Рассмотрим решение уравнения (200) представляющее собой плоскую волну

$$\Phi(t) = e^{i\vec{k}\vec{x}}\psi(t) \tag{201}$$

Для функции $\psi(t)$ получим уравнение

$$\ddot{\psi} + \omega^2(t)\psi = 0, \tag{202}$$

где

$$\omega^2(t) = \frac{c^2\vec{k}^2}{\varepsilon(t)}. \tag{203}$$

Скачкообразное изменение диэлектрической проницаемости приводит к тому, что положительно частотное решение уравнения (202) переходит в суперпозицию положительно частотного и отрицательно частотного решений

$$e^{-i\omega_1 t} \to \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{2}e^{-i\omega_2 t} + \frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{2}e^{i\omega_2 t}. \tag{204}$$

Формула (204) аналогична хорошо известной формуле в оптике

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{2}e^{ik_1 t} + \frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{2}e^{-ik_1 t} \to e^{-ik_2 t}, \tag{205}$$

которая описывает отражение света при нормальном падении на прозрачный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. При этом коэффициент отражения света [132]

$$R = (\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1})^2 = (\frac{n-1}{n+1})^2, \tag{206}$$

где n — показатель преломления диэлектрика.

Любой переход положительно частотного решения

$$e^{-i\omega_1 t} \to \alpha e^{-i\omega_2 t} + \beta e^{i\omega_2 t}. \tag{207}$$

означает рождение частиц. За счет перепутывания положительных и отрицательных частот рождаются электроны и позитроны электрическим полем, испаряются черные дыры, наблюдатель, движущийся в вакууме Минковского с ускорением g, обнаружит, что вакуум заполнился черным излучением с температурой

$$T = \frac{g\hbar}{2\pi ck} \tag{208}$$

(k — постоянная Больцмана), [133].

Рассмотрим вторично квантованное поле

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}(a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_1^+ e^{i\omega_1 t}). \tag{209}$$

В силу линейности уравнений

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\sqrt{\omega_1}}(a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_1^+ e^{i\omega_1 t}) \to \\ &\to \tfrac{1}{\sqrt{\omega_2}}(\sqrt{\tfrac{\omega_2}{\omega_1}}(\alpha a_1 + \beta^* a_1^+)e^{-i\omega_2 t} + \sqrt{\tfrac{\omega_2}{\omega_1}}(\alpha^* a_1^+ + \beta a_1)e^{i\omega_2 t}) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\omega_2}}(a_2 e^{-i\omega_2 t} + a_2^+ e^{i\omega_2 t}), \end{aligned} \tag{210}$$

где a_2^+ и a_2 — новые операторы рождения и уничтожения, так как, по определению, операторы рождения и уничтожения — это коэффициенты при соответствующих экспонентах.

Переопределение операторов рождения и уничтожения означает, что вакуум с нулевым количеством фотонов n_1 перестал быть вакуумом, что в нем родились фотоны в количестве n_2,

$$n_1 = \langle 0|a_1^+ a_1|0\rangle = 0, \tag{211}$$

$$n_2 = \langle 0|a_2^+ a_2|0\rangle = \frac{\omega_2}{\omega_1}|\beta|^2 = \frac{(\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{4\sqrt{\varepsilon}}. \tag{212}$$

До сих пор мы говорили о фотонах с определенным волновым вектором $\vec{k}$. Для того, чтобы найти полное число фотонов, рождающихся в объеме V, нужно умножить n_2 на соответствующий статистический вес и произвести необходимое интегрирование. При этом мы получим формулу, найденную Швингером [21],

$$N = \int \frac{(\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{4\sqrt{\varepsilon}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}V. \tag{213}$$

Интегрирование в формуле (213) нужно производить до некоторого k_{max}. Пренебрегая дисперсией, получим для энергии, излучаемой на единицу объема

$$\frac{\varepsilon}{V} = \frac{(\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{4\sqrt{\varepsilon}} \int^{k_{max}} \hbar\omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 2\pi^2 \frac{(\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{4\sqrt{\varepsilon}} \frac{\hbar c}{\lambda_{min}^4} \qquad (214)$$

Для того, чтобы получить согласие с экспериментом при 3 ^{0}C, в формуле (214) нужно положить $\lambda_{min} = 2 * 10^{-5}$ см. Эта длина волны, как отмечает Швингер [21], странным образом близка к длине волны, при которой вода становится непрозрачной.

При очень медленном изменении $\omega^2(t)$ коэффициент β в формуле (207) стремится к нулю и определяет степень несохранения адиабатического инварианта осциллятора с переменной частотой. Т.о., вопросы о точности сохранения адиабатического инварианта и о вероятности того, что вакуум перестает быть вакуумом, тесно связаны друг с другом [122].

23. Заключение.

Не без оснований смеются над попыткой того человека, который хотел отучить свою лошадь от корма. Она, к сожалению, околела именно в тот день, когда он уже твердо надеялся, что она, наконец, овладеет этим искусством.
Г.К.Лихтенберг, [134].

Быть, или не быть: вот в чем вопрос.
В.Шекспир, [135].

Распрощавшись с прошлым, полные демократических иллюзий, мы с воодушевлением стали строить новую жизнь. Первым делом, следуя человеку из эпиграфа, над которым немцы посмеялись еще несколько веков назад, мы стали отучать от корма науку, культуру, образование. И с нетерпением ждем результатов, хотя последствия этого очевидны. В стране без науки и культуры, как писал один из классиков еще в середине прошлого века [136],

Не пойдет наш поезд,
Как идет немецкий:
То соскочит с рельсов
С силой молодецкой;

То обвалит насыпь,
То мосток продавит,
То на встречный поезд
Ухарски направит...

Но у жизни свои законы. "Разумные соображения, любая критика или встречные доводы, говорящие против действий, диктуемых воодушевлением, заглушаются за счет того, что замечательная переоценка всех ценностей заставляет их казаться не только неосновательными, но и просто ничтожными и позорными. Короче,как это прекрасно выражено в украинской пословице: "Коли прапор в'ється, про розум не йдеться"[10].(Приведенная пословица дана в обратном переводе с немецкого, немного видоизмененном по сравнению с [10]. К.Лоренц имел возможность изучать русские и украинские пословицы, находясь в русском плену с 1942 по 1948 год [137].)

Никто не сомневается в том, что наука, культура, образование необходимы обществу не только для того, чтобы общество могло называться цивилизованным. "Когда Фарадей проводил эксперименты с электрическими токами и магнитными полями и какой-то министр, посетив его, спросил: "Какая от всего этого польза?" Фарадей ответил: "Я не знаю, но уверен, что когда-нибудь правительство установит плату за это". Мы знаем, что он был прав, и я думаю, он имел все основания быть правым. Электричество является теперь неотъемлемой частью нашего быта, и сфера его практических применений становится поистине необъятной", [138].

Но значение науки не исчерпывается ее техническими применениями. Сущность науки была прекрасно выражена О.Контом: "Знать — чтобы предвидеть, предвидеть — чтобы предотвратить." ("Savoir pour prévoir, prévoir pour prévenir",[139].) Мы живем в критический момент эволюции человека как биологического вида. В течение тысячелетий количество людей на Земле хорошо описывалось формулой [140]

$$N = \frac{200 * 10^9}{2025 - T}, \qquad (215)$$

где T — время (в годах), отсчитываемое от начала нашего летоисчисления. Для того, чтобы выжить, человечество должно найти цивилизованные пути преодолеть демографический взрыв, описывающийся все еще действующей формулой (). Времени осталось мало, а трудностей много. ”Решающая трудность, стоящая перед нами, — это значительное отставание развития человеческих эмоций от умственного развития человека. Человеческий мозг живет в двадцатом веке; сердце большинства людей — все еще в каменном. Человек в большинстве случаев еще не достаточно созрел, чтобы быть независимым, разумным, объективным... Как же человечество может спастись от самоуничтожения в этом конфликте между преждевременной интеллектуально-технической зрелостью и эмоциональной отсталостью?” [141].

”Насколько я могу судить, — продолжает Э.Фромм, — есть только один ответ: необходимо все бо̀льшее понимание важнейших фактов социального бытия; необходимо осознание, которое сможет предохранить нас от непоправимых безумств, несколько повысив нашу способность к объективности и разумному суждению... в этот решающий момент — несколько лучшее понимание, несколько бо̀льшая объективность могут решить для человечества спор между жизнью и смертью”, [141].

Э.Фромм указал на важную причину человеческих несчастий на Земле, но сказанное им не означает, что мы должны вернуться к интеллектуально-технической отсталости, чтобы смягчить конфликт ума и сердца. Напротив, в принципиально необходимой для человечества задаче — осознать себя, осознать свое место в мире, новейшие достижения в области естественных наук занимают не последнее место.

Наука об электромагнитных явлениях продолжает развиваться, преподнося нам новые сюрпризы, такие как необходимость объединения электромагнитных явлений со слабыми, сонолюминесценция и испарение черных дыр. В конце 1995 г., в истории электромагнетизма произошло еще одно событие: в Лондоне, в Вестминстерском аббатстве состоялась торжественная процедура открытия памятной доски П.А.М.Дираку, которая была помещена за могилой И.Ньютона, между памятными досками М.Фарадея и Дж.К.Максвелла. Так объединились основатели классической теории электромагнетизма и один из создателей квантовой электродинамики, лежащей в основе многих областей современной физики: оптики, атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, физики плазмы и других. Успехи квантовой электродинамики — науки, которой, в основном, посвящена эта статья — вносят свой посильный вклад в жизненно важное для людей дело — дальнейшее развитие представлений о мире, в котором мы живем.

Список литературы

[1] *Corson E.M.* Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations. — London and Glasgow: Blackie & Son Limited, 1953.

[2] *Половин Р.В.* Радиационные поправки к рассеянию электрона на электро- не и позитроне//ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 449.

[3] *Feynman R.P.*//Suppl. al Nuovo cim. 1966. V. 4. P. 492.

[4] *Gardner M.*//Scientific American. 1974. October.

[5] *Гарднер М.* Путешествие во времени.— М.: Мир, 1990.

[6] *Fitzgerald F.S.* Tender is the Night.— M.: Raduga, 1983.

[7] *Коул К.К.*//Импакт. 1986. N 1. С. 51.

[8] *Демуцкий В.П., Половин Р.В.* Концептуальные вопросы квантовой меха- ники//УФН. 1992. Т. 162. N 10. С. 95.

[9] *Тимофеев-Ресовский Н.В.* Воспоминания. — М.: Изд. группа "Прогресс", "Пангея", 1995.

[10] *Лоренц К.* Агрессия (так называемое "зло"). — М.: Изд. группа "Про- гресс", "Универс", 1994.

[11] *Bacri H.* Localizability and Space in Quantum Physics (Lecture Notes in Physics, Vol. 108). — Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1988.

[12] *Bacri H.*//Helv. Phys. Acta. 1994. V. 67. P. 633.

[13] *Mosley S.N., Farina J.E.G.*//J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 3991.

[14] *Kim Y.S., Wigner E.P.*//J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1175.

[15] *Kim Y.S., Wigner E.P.*//J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 55.

[16] *Han D., Kim J.S., Noz M.E.*//Phys. Lett. 1995. V. A206. P. 299.

[17] *Kim Y.S.* Wigner's Last Papers on Space-time Symmetries. — Univ. of Maryland: PP No. 96-37, 1996.

[18] *Bialynicki-Birula I.*//Acta Physica Polonica. 1994. V. 86. P. 97.

[19] *Caloyerou P.N.*//Phys. Rep. 1994. V. 244. No. 6. P. 299.

[20] *Sipe J.E.*//Phys. Rev. 1995. V. A52. P. 1875.

[21] *Schwinger J.*//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1992 — V.89. — PP. 4091, 11118. — 1993 — V.90. — PP. 958, 2105, 4505, 7285. — 1994 — V.91. — P. 6473.

[22] *Крылов А.Н.* Мои воспомининия. —- М.–Л.: Изд. АН СССР, 1945.

[23] *Крылов А.Н.* Мысли и материалы о преподавании механики. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1943.

[24] *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. — М.: Физматлит, 1958.

[25] *Cayley A.*//Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1858. V. 148. P. 17.

[26] *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism, V. 2. — Oxford, 1873.

[27] *Pauli W.*//Z. Phys. 1927. B. 43. S. 601.

[28] *Bell E.T.* Mathematics: Queen and Servant of Science. — Washington: Mathematical Association of America, 1989.

[29] Воспоминания об академике М.А.Леонтовиче. — М.: Наука, 1990.

[30] *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Мир, 1971.

[31] *Шредингер Э.* Пространственно–временная структура Вселенной. — М.: Наука, 1986.

[32] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

[33] *Вейль Г.* Математическое мышление. — М.: Наука, 1979.

[34] *Weyl H.*//Z. Phys. 1929. B. 56. S. 330.

[35] *Dirac P.A.M.*//Proc.Roy. Soc. 1928. V. A117. P. 610.

[36] *Weyl H.* Gruppentheorie und Quantummechanik. — Leipzig: Verlag von S.Hirzel, 1929.

[37] Particles and Fields. — Phys. Rev. 1994. V. D50. N 3–I.

[38] *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.

[39] *Литцман В.* Теорема Пифагора. — М.: Физматлит, 1960.

[40] *Черников Н.А., Шавохина Н.С.*//История и методология естеств. наук, вып. 34, Физика, изд. МГУ. 1988. С. 62.

[41] *Kamran M.* Dirac — the taciturn Genius. — Trieste: IC/889/265.

[42] *Weyl H.*//Sitzber. Kgl. preuss. Akad. Wiss. 1918. S. 465.

[43] *Картан Э.* Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947.

[44] *Bargman V.*//Sitzber. preuss. Akad. Wiss. 1932. S. 346.

[45] *Infeld L., van der Waerden B.L.*//Sitzber. preuss. Akad. Wiss. 1933. S. 380.

[46] *Isham C.J., Salam A., Strathdee J.*//Lett. al Nuovo Cim. 1972. V. 5. S. 969.

[47] Воспоминания о И.Е.Тамме. — М.: Наука, 1986.

[48] *Klein O.*//Physica Scripta. 1974. V. 9. P. 69.

[49] *Сахаров А.Д.*//ДАН СССР. 1967. Т. 177. С. 70.

[50] *Сахаров А.Д.*//ТМФ. 1975. Т. 23. С. 178.

[51] *Schwinger J.*//Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.

[52] *Зельдович Я.Б.*//Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 1233.

[53] *Зельдович Я.Б.* Частицы, ядра, Вселенная. — М.: Наука, 1985.

[54] *Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н.* Эффект Казимира. — М.: Энергоатомиздат, 1990.

[55] *Ахиезер А.И., Степановский Ю.П.* От квантов света до цветных кварков. — Киев: Наукова думка, 1993.

[56] *Ферми Л.* Атомы у нас дома.— М.: ИЛ, 1958.

[57] *Mignani R., Recami E., Baldo M.*//Lett. al Nuovo Cim. 1974. V. 11. P. 568.

[58] *Горелик Г.Е., Френкель В.Я.* Матвей Петрович Бронштейн. — М.: Наука, 1990.

[59] Жизнь науки. — М.: Наука, 1973.

[60] *Josephson Paul R.* Physics and Politics in Revolutionary Russia. - Berkeley, Los Angeles, Oxford: University of California Press, 1991.

[61] Леонард Эйлер. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1935.

[62] *Bell E.T.* Men of Mathematics. — New York: Simon and Schuster, 1937.

[63] *Горелик Г.Е.*//Природа. 1992. N 2. С. 126.

[64] *Бронштейн М.П.*//ЖЭТФ. 1936. Т. 6. С. 195.

[65] *Степановский Ю.П.*//УФЖ. 1964. Т. 9. С. 1165.

[66] *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.

[67] *Weinberg S.*//Phys. Rev. 1964. V. 134 B. P. 882.

[68] *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. — М.: Физматлит, 1958.

[69] *Хлебников В.* Творения. — М.: Сов. писатель, 1986.

[70] *Bass L., Schr'odinger E.*//Proc. Roy. Soc. 1955. V. A232. P. 1.

[71] *Proca A. J.*//Phys. Radium. 1936. V. 7. P. 347.

[72] *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В.*//ЯФ. 1966. Т. 4. С. 216.

[73] *Bass L., Schr'odinger E.*//Suppl. al Nuovo cim. 1956. V. 4. P. 825.

[74] *Bass L.*//Nuovo cim. 1956. V. 3. P. 1204.

[75] *Джекобс Дж., Рассел Р., Уилсон Дж.* Физика и геология. — М.: Мир, 1964.

[76] *Жарков В.Н., Трубицын В.П.* Физика планетных недр. — М.: Наука, 1980.

[77] *Дирак П.А.М.*//УФН. 1979. Т. 128. С. 681.

[78] Атомное ядро. Сборник докладов 1-ой Всесоюзной ядерной конференции. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934.

[79] *Dirac P.A.M.*//Proc. Roy. Soc. 1971. V. A322. P. 435.

[80] *Majorana E.*//Nuovo cim. 1932. V. 9. P. 335.

[81] *Staunton L.P.*//Phys. Rev. 1974. V. D10. P. 1760.

[82] *Wigner E.*//Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.

[83] *Kim Y.S., Wigner E.P.*//Phys. Rev. 1987. V. A36. P. 1293.

[84] *Степановский Ю.П.*//ТМФ. 1981. Т. 47. С. 343.

[85] *Maxwell J.C.*//Roy. Soc. Trans. 1864. V. 155. P. 459.

[86] *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. - М.: Мир, 1968.

[87] *Penrose R.*//Ann. Phys. 1960. V. 10. P. 171.

[88] *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. - М.: Мир, 1972.

[89] *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время, Т. 1. - М.: Мир, 1987.

[90] *Степановский Ю.П.*//УФЖ. 1981. Т. 26. С. 1768.

[91] *Степановский Ю.П.*//Геомагнетизм и аэрономия. 1982. Т. 22. С. 652.

[92] *Степановский Ю.П.*//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 336.

[93] *Weinberg S., Witten E.*//Phys. Lett. 1980. V. 96B. P. 59.

[94] Эйнштейновский сборник 1977. — М.: Наука, 1977.

[95] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, . 6, Электродинамика. — М.: Мир, 1966.

[96] *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. — М.: Атомиздат, 1978.

[97] Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М.: Мир, 1966.

[98] *Худсон Д.* Статистика для физиков. — М.: Мир, 1970.

[99] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория групп и квантованные поля. — М.: Наука, 1977.

[100] Эйнштейновский сборник 1972. — М.: Наука, 1974.

[101] *Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. — М.: Наука, 1989.

[102] *Schr'odinger E.*//Phys. Ztschr. 1918. B. 19. S. 4.

[103] *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.*//ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. Вып. 1. С. 1.

[104] *Afanasiev G.N., Stepanovsky Yu.P.* // Nuovo cimento. 1996. V. 109A, p271

[105] *Фаддеев Л.Д.*//УФН. 1982. Т. 136. С. 435.

[106] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М.: Наука, 1973.

[107] *Landau L.D., Peierls R.*//Z. Phys. 1930. B. 62. S. 188.

[108] *Зельдович Я.Б.*//ДАН СССР. 1965. Т. 163. С. 1359.

[109] *Hegerfeldt G.C.*//Phys. Rev. 1974. V. D10. P. 3320.

[110] Исследования по истории физики и механики 1988. — М.: Наука, 1988.

[111] *Newton T.D., Wigner E.P.*//Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400.

[112] *Кон Т.* Структура научных революций. — М.: Прогресс, 1977.

[113] *Хриплович И.Б.*//ЯФ. 1972. Т. 16. С. 823.

[114] *Степановский Ю.П.*//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 336.

[115] *Velo G., Zwanziger D.*//Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1337.

[116] *Velo G.*//Nucl. Phys. 1972. V.B43. P. 389.

[117] Theoretical Physics. — Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1963.

[118] *Aitchison I.J.R.*//Physica Scripta. 1988. V. T23. P. 12.

[119] *Born M., Fock V.*//Zs. Phys. 1928. B. 51. S. 165.

[120] *Berry M.V.*//Proc. Roy. Soc. 1984. V. A392. P. 45.

[121] *Simon B.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2167.

[122] *Бакай А.С., Степановский Ю.П.* Адиабатические инварианты. — Киев: Наукова думка, 1981.

[123] *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.*//УФН. 1990. Т. 160. Вып. 6. С. 1.

[124] *Боднарчук В.И., Давтян Л.С., Корнеев Д.А.*//УФН. 1996. Т. 166. С. 185.

[125] *Зазунов Л.Г., Степановский Ю.П.*//УФЖ. 1990. Т. 35. С. 1551.

[126] *Дайсон Ф.*//УФН. 1967. Т. 91. С. 71.

[127] *Hiller R., Putterman S., Barber B.*//Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1182.

[128] *Crum L.A.*//Phys. Today. 1994. V. 47, N9. P. 22.

[129] *Маргулис М.А.* Основы звукохимии. — М.: Высшая школа, 1984.

[130] *Casimir H.B.G.*//Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. V. 51. P. 793.

[131] *Sparnaay M.J.*//Physica. 1958. V. 24. P. 751.

[132] *Лансберг Г.С.* Оптика. — М.: Гостехтеориздат, 1957.

[133] *Гинзбург В.Л., Фролов В.П.*//УФН. 1987. Т. 153. С. 633.

[134] *Лихтенберг Г.К.* Афоризмы. — М.: Наука, 1965.

[135] *Шекспир В.* Трагедии. Сонеты. — М.: Худ. литература, 1968.

[136] *Добролюбов Н.А.* Стихотворения. — М.–Л.: Сов. писатель, 1962.

[137] Лауреаты нобелевской премии. Книга 1. — М.: Прогресс, 1992.

[138] *Вайскопф В.*//УФН. 1968. Т. 95. С. 313

[139] *Tatarkiewicz W.* Historia filozofii. T. 3. — Warszawa: PWN, 1970.

[140] *Капица С.П.*//УФН. 1996. Т. 166. С. 63.

[141] *Фромм Э.* Бегство от свободы. — М.: Прогресс, 1990.