

Локализация Тепла и Становление Структуры Теплового Пробоя Полупроводниковых Материалов

Ю.П.Вирченко, А.А.Водяницкий
Институт теоретической физики
ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт" НАН Украины

Содержание

1. Введение	239
2. Качественная картина эффекта теплового пробоя	241
3. Конструирование математической модели явления теплового пробоя	242
4. Инертность теплового фона	245
5. Тепловая неустойчивость	246
6. Нелинейная флуктуационная модель	248
7. Метод эталонных функций	248
8. Анализ одномерной модели	250
9. Заключение	252

Аннотация

Предложен механизм локализации тепла в процессе нелинейной эволюции температурного поля в полупроводниковом материале, используемого в элементе электронной цепи с фиксированной ЭДС и активной нагрузкой. В работе строится нелинейная математическая модель формирования теплового пробоя плёнки материала, использующая этот механизм. Модель конструируется на основе уравнения теплопроводности с источником. Нелинейность уравнения связана с температурными зависимостями электропроводности и теплопроводности материала. Показано, что при возрастающей зависимости электропроводности от температуры имеется неустойчивость пространственно однородного решения уравнения, которая при нелинейности этой зависимости проявляется в том, что решения обладают обострением режима (зависимость от времени содержит малый знаменатель) в локализованных пространственных областях с характерным размером - фундаментальной длиной. Это свойство решений описывает спонтанное возникновение из флуктуаций температурного поля тепловой структуры, характеризуемой сильной локализацией тепла в областях с размером порядка фундаментальной длины. При этом обострение режима трактуется как тепловой пробой, время формирования которого связывается со временем обострения. Физически тепловой пробой проявляется в появлении проплавленных каналов с последующей металлизацией или поликристаллизацией материала плёнки при приложении к ней импульса субмикросекундной длительности. Время пробоя t^* и размер области локализации r^* оцениваются на основе принципа максимума для параболических уравнений сравнением с эталонными обостряющимися решениями в рамках одномерной модели.

1. Введение

В этой работе мы строим теоретическую модель явления теплового пробоя тонкой плёнки типичного полупроводникового материала, которая является

с функциональным элементом электронной цепи. Важность теоретического исследования этого явления связана с тем, что оно буквально потрясает вот уже в течение нескольких десятилетий полупроводниковую индустрию и микроэлектронику. Несмотря

ря на накопленный обширный экспериментальный материал относительно явления теплового пробоя в полупроводниковых легированных и полуизолирующих материалах, а также опыт борьбы с этим эффектом, вызывающим выход из строя электронных приборов, на наш взгляд к настоящему времени не имеется удовлетворительной теории, в рамках которой находили бы своё объяснение многие загадочные черты его протекания. Тепловой пробой был обнаружен в 1948 г. на полупроводниковых диодах, как отказ в работе с выходом их из строя, и описан впервые в работе [1]. Спустя десять лет аналогичное явление было обнаружено также при работе транзисторов [2]. В связи со сходным явлением резкого падения напряжения при обратном смещении его, превышающем рабочий диапазон (вторичного смещения), явление выхода из строя полупроводниковых приборов получило в литературе несколько неудачное название "вторичного пробоя" (secondary breakdown), которое принято Международной электротехнической комиссией [3]. Далее в работе мы будем называть исследуемый нами эффект именно этим термином. Несмотря на использование такого термина, было установлено [4], что, на самом деле, вторичный пробой характеризуется интенсивным разогревом и проплавлением каналов внутри полупроводникового материала. Тогда же было предложено считать возникновение теплового пробоя результатом тепловой неустойчивости, характеризующейся ростом электропроводности при увеличении температуры и филаментацией тока (в русском переводе употребляется неудачный термин - шнурование тока, который обычно связывается с пинч-эффектом в проводящей среде). Впоследствии тепловые явления, сопровождающиеся филаментацией тока были обнаружены в полуизолирующих материалах - германии, кремнии, арсениде галлия и т.д. [5-8] безотносительно к их использованию в электронных приборах. Наряду с концепцией о тепловой неустойчивости появились теоретические модели явления. Из наиболее ранних работ мы упомянем теорию монополярного режима инжекции [9], а также анализ режима с двойной инжекцией носителей [10, 11]. В последней работе фактором, с которым связывается зарождение шнура тока, являются флуктуации уровня легирования, проявляющиеся в наличии градиента концентрации компенсирующей примеси.

Несмотря на обширную информацию о детальном строении полупроводникового материала и тонкие измерения вольтамперных характеристик в предпробойной и послепробойной стадиях [9-16], остаются не исследованными ни природа неоднородностей, которые являются затравочным возмущением для тепловой неустойчивости, ни нелинейная стадия эволюции тепловых возмущений, а главное - неизвестны причины, вызывающие локализацию тепла. Впрочем, здесь следует упомянуть

о популярной одномерной модели [17, 18], в которой локализация тепла связывается с границей p - n перехода. Однако, как было указано, тепловой пробой имеет место и в полуизолирующих материалах, и, поэтому, такое объяснение локализации следует признать недостаточным. Не вдаваясь здесь глубоко в критику имеющихся в настоящее время иных теоретических построений [6,9,10,17,18,19,20], на основе которых делаются попытки объяснения эффекта вторичного пробоя и обработки имеющихся экспериментальных данных, укажем, что они также, по нашему мнению, являются недостаточными, прежде всего, вследствие качественного несоответствия - невозможности теоретического выявления причин, вызывающих локализацию тепла. В настоящей работе предложена физическая картина локализации тепла и формирования нелинейной структуры теплового пробоя. Используемая здесь идея впервые была высказана в [21, 22] в связи с описанием вторичного и радиационного тепловых пробоев в полупроводниках. Она оказывается пригодной для описания нелинейной стадии эволюции температурного поля вплоть до температуры плавления материала при любом типе теплового пробоя. На основе используемой физической картины мы строим математическую модель, которая описывает такой тип эволюции, который получил название режима с обострением [23]. Режимы с обострением являются типичными для эволюции, описываемой нелинейными параболическими уравнениями с источником, и решающей идеей нашей теории является толкование этапа становления структуры теплового пробоя именно как режима такого типа. Для исследования этого режима нами найден в работе более широкий класс эталонных решений по сравнению с обычно используемым [24]. Впервые этот класс эталонных решений был использован нами при исследовании "теплового пробоя" полупроводникового материала вследствие облучения его мощной электромагнитной волной, мощность которой недостаточна для расплавления плёнки материала, однако уже достаточна для того чтобы образовать в ней металлизированные вкрапления, которые приводят к непригодности того функционального элемента электронной цепи, в состав которого она входит, из-за существенного изменения электропроводящих свойств. Металлизация возникает вследствие стремительного локального разогрева материала вплоть до точки эвтектики или до точки плавления этого материала, сопровождающегося локальным ростом электропроводности и локализацией вихревых токов с последующим расплавлением в плёнке ячеек с размером $\sim 50\mu$. Хотя описанная ситуация является менее стандартной при проявлении эффекта теплового пробоя, однако она оказывается более простой с точки зрения физического объяснения эффекта и построения соответ-

ствующей модели. Это связано с тем, что в ней, в отличие от ситуации, рассматриваемой в настоящей работе, не возникает необходимости объяснения отставания нагрева окружающего теплового фона от нагрева тех спонтанно возникших ячеек, в которых происходит пробой плёнки материала. Такое отставание с необходимостью реализуется в ситуации, рассматриваемой в статье, так как пробой энергетически вызывается только наличием фиксированной ЭДС работающей электронной цепи и, следовательно, имеется ограничение по поглощаемой плёнкой мощности. Таким образом, в настоящей работе мы развиваем использованную нами ранее идею объяснения возникновения локализованной тепловой структуры на основе существенно нелинейного характера эволюции температурного поля в плёнке. Конструируемая в работе модель является простейшей из возможных нелинейных моделей. При её построении учитываются только самые общие черты, присущие полупроводниковым материалам некоторой достаточно широкой группы. Мы сознательно поступаем таким образом в связи с большим разнообразием полупроводников с весьма различными свойствами. Поэтому мы будем в дальнейшем иметь в виду некоторый модельный полупроводниковый материал, которому мы приписываем физические свойства, типичные для некоторой группы материалов. В связи с этим наша модель не приспособлена для обработки всего имеющегося экспериментального материала относительно теплового пробоя, в частности, данных относительно его основных количественных характеристик - размера проплавленных каналов и времени пробоя. В этой работе мы претендуем только на качественное объяснение особенностей явления, базирующееся на простых и естественных положениях. В частности, мы даём естественное объяснение главной качественной особенности - явления локализации тепла, которое невозможно осуществить в рамках линейных моделей.

Следует подчеркнуть, что описание теплового пробоя на основе эволюции температурного поля возможно только, если рост числа носителей либо задаётся постоянными условиями их генерации или инъекции, либо этот рост контролируется температурой и учитывается зависимостью электропроводности и температуропроводности от температуры. В последнем случае пробой происходит при малом превышении числа носителей над их термодинамически равновесной концентрацией. Может, конечно же, реализоваться и объединённый случай. В этой работе мы связываем тепловой пробой с нелинейными зависимостями электро- и теплопроводности, которые определяются технологией изготовления полупроводникового материала. Несмотря на то, что конструкторы полупроводниковой электроники небезуспешно борются схмотехническими методами с повреждениями приборов, защищая их от

перенапряжений [16], однако, такое же разрушающее влияние, как и перенапряжения, даёт локальное повышение температуры, приводя, в результате, к тепловому пробую и выходу из строя прибора. В этом смысле рассматриваемая нами в работе ситуация является крайне важной.

2. Качественная картина эффекта теплового пробоя

Феноменологически картина явления теплового пробоя выглядит следующим образом. При приложении к плоскостям плёнки полупроводникового материала источника ЭДС при определённых условиях наблюдается сильное локальное повышение температуры в пространственных областях с размерами порядка $10 \div 100 \mu$, вызванное протеканием через плёнку электрического тока и, соответственно, выделением джоулева тепла. Это локальное повышение температуры является тепловой неустойчивостью, проявляющейся в неравномерном её нагревании по плоскости плёнки. Такой характер нагрева плёнки есть следствие нескольких причин.

Во-первых, он обеспечивается специфической для широкого класса полупроводниковых материалов зависимостью проводимости $\sigma(T)$ от температуры T . А именно, для этого класса полупроводников величина $\sigma(T)$, начиная с некоторой характерной температуры T^* , достаточно быстро возрастает (не медленнее $T^n, n > 1$) при изменении T вплоть до температуры плавления T_m . Вследствие такой зависимости $\sigma(T)$, при нагреве материала проявляется положительная обратная связь. Тепло, выделяясь локально, приводит к локальному повышению проводимости. Увеличение проводимости приводит к локальному увеличению плотности тока и, следовательно, к локальному увеличению выделения тепла.

Во-вторых, для рассматриваемых полупроводниковых материалов наряду с резко возрастающей зависимостью $\sigma(T)$, реализуется существенно более медленная зависимость температуропроводности $\kappa(T)$, которая в ряде случаев может быть даже убывающей. Ввиду такой зависимости $\kappa(T)$, температурное поле в плёнке не успевает, из-за недостаточной теплопроводности, выравняться, если эволюция разогрева стартовала с некоторого пространственно неравномерно нагретого состояния.

В-третьих, и в этом состоит отличие рассматриваемой в работе ситуации от той, которая исследовалась в [24], имеется ограничение по полной мощности, преобразуемой плёнкой в тепло, вследствие фиксации величины ЭДС. Благодаря этому ограничению, между различными физически малыми областями в плёнке имеется конкуренция при отборе мощности. Эта конкуренция приводит к пространственно неоднородной скорости нагрева плён-

ки.

Указанные три причины в сочетании с четвёртой - наличием пространственных флуктуаций температуры (например, из-за наличия скопления примесей) приводят к появлению неустойчивости температурного поля в плёнке, которая проявляется в том, что спонтанно возникает диссипативная пространственная тепловая структура, характеризующаяся сильной концентрацией тепла в малых пространственных областях и стремительно повышающейся температурой внутри этих областей, вплоть до достижения температуры плавления T_m . Вследствие этого, в плёнке полупроводникового материала появляются проплавленные каналы в направлении протекания тока, что, собственно, и представляет собой тепловой пробой слоя этого материала.

Отметим некоторые характерные качественные черты теплового пробоя, которые наблюдаются экспериментально и которые находят своё объяснение в предлагаемой нами теории. Такими существенными чертами SB, с нашей точки зрения, являются:

- 1) сильное локальное повышение температуры на 1-3 порядка, по сравнению с температурой окружающего, почти не нагревающегося фона;
- 2) универсальность, т.е. слабая зависимость размера проплавленных каналов r^* от плотности микро-неоднородностей полупроводникового материала;
- 3) слабая зависимость времени действия импульса t^* , достаточного для осуществления SB (время пробоя), от однородности приготовления плёнки (кроме экспериментов с двойной инжекцией носителей);
- 4) наличие в плёнке малого числа проплавленных каналов;
- 5) широкий диапазон температурных рабочих точек (температур окружающего фона, при которых осуществляется SB в различных полупроводниковых материалах (от $\sim 4^\circ\text{K}$ для In Sb до $\sim 600^\circ\text{K}$ для Ga As).

3. Конструирование математической модели явления теплового пробоя

Нашей целью является построение адекватного математического описания динамики нагрева плёнки полупроводникового материала, в рамках которого положения 1)-5) находили бы своё естественное объяснение. В этом разделе мы выводим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, которое, по нашему мнению, может быть применено при исследовании теплового пробоя в самой общей ситуации, т.е. при описании всех стадий развития пробоя и для любых возможных зависимостей

$\sigma(T), \kappa(T)$.

Пространственно-временные масштабы эффекта SB, который развивается за времена порядка $10^{-9} - 10^{-7}\text{s}$, что существенно больше кинетических времён релаксации, в областях с линейными размерами порядка $10-100 \mu$, что существенно больше межатомных расстояний, позволяет объяснить его в рамках описания эволюции температурного поля в полупроводниковом материале на основе макроскопического уравнения, учитывающего баланс энергии в физически малом объёме, содержащем большое количество атомов материала. Уравнение баланса энергии запишем в виде

$$c \dot{T}(\vec{r}, t) = \text{div} \vec{Q}\{T\} + W(T, \vec{r}, t), \quad (1)$$

где $T(\vec{r}, t)$ - температура, $\vec{Q}\{T\}$ - тепловой поток и $W(T, \vec{r}, t)$ - часть поглощённой полупроводниковым материалом мощности, которая преобразуется в тепло, отнесённые к точке \vec{r} плёнки и к моменту t , c - удельная объёмная теплоёмкость материала. Заметим, что при описании эволюции материала даже в макроскопическом приближении часто приходится различать температуру фононной подсистемы и температуру носителей (т.н. двухкомпонентное приближение). Однако, в рассматриваемом нами случае можно пренебречь различием между этими температурами и оперировать единой "макроскопической" температурой T , так как характерное время выравнивания температур между подсистемами имеет порядок 10^{-11}s , что существенно меньше характерного времени развития SB. В связи с этим, мы определим поток тепла в однокомпонентном виде

$$\vec{Q}\{\vec{r}, t\} = \kappa(T) \nabla T, \quad (2)$$

где $\kappa(T)$ - полная теплопроводность, в которую вносят вклад решёточная теплопроводность и теплопроводность носителей.

Характерное время изменения электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в точке \vec{r} плёнки определяется характерным временем изменения импульса напряжения, прикладываемого к плёнке, которое мы далее считаем намного превосходящим время пробоя. Поэтому, приняв, что поглощаемая мощность определяется выделением джоулева тепла в материале, положим $W(T, \vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{j}(\vec{r}, t)$, где $\vec{j}(\vec{r}, t)$ - плотность электрон-дырочного тока. Так как линейный размер r^* области, в которой происходит пробой, намного меньше глубины проникновения ($\sim 1\text{mm}$ при $\sigma \sim 10^{12}\text{s}^{-1}$) электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в материал, то в этой формуле можно считать электрическое поле однородным. По причине медленности пространственного (и временного) изменения электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ на длине (времени) свободного пробега носителей, мы принимаем закон Ома в простейшем

виде $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{E}(t)\sigma(T)$, т.е. не учитываем пространственную (и временную) дисперсию. Следовательно, поглощённую полупроводниковым материалом мощность можно представить в простейшей форме

$$W(\vec{r}, t) = E^2(\vec{r}, t)\sigma(\vec{r}, t), \quad (3)$$

где $\sigma(\vec{r}, t)$ - проводимость материала в точке \vec{r} , в момент t . Проводимость $\sigma(\vec{r}, t)$ положим равной статической проводимости $\sigma(T)$ при T равным значению температурного поля в той же самой пространственно-временной точке (\vec{r}, t) ,

$$\sigma(\vec{r}, t) = \sigma(T(\vec{r}, t)). \quad (4)$$

Это приближение обосновано тем, что дополнительные члены в выражении для тока в полупроводнике связаны с наличием магнитного поля [25] и, следовательно, пропорциональны градиенту электрического поля (либо временной производной). В то же время, на данном этапе построения теории мы не пренебрегаем полностью зависимостью от времени электрического поля, так как эта зависимость, как мы увидим, определяется функционально через зависимость от времени температурного поля. Поэтому отбрасывание медленно изменяющихся по времени функций необходимо производить после выявления этой зависимости. При пренебрежении зависимостью $E(t)$ мы потеряем эффект переброски падения напряжения в результате пробоя на активную нагрузку, имеющуюся в цепи. В результате учёта этого эффекта происходит отставание нагрева теплового фона от раскачки тепловых неоднородностей. В частности, по этой причине линейные теории теплового пробоя являются неадекватными (см. разд.3). Ввиду малости изменения электрического поля, мы здесь полностью игнорируем вопрос о типе нелинейности в зависимости плотности тока от E , т.е. вопрос об N- или S- типе вольт-амперной характеристики рассматриваемого полупроводникового материала, и считаем эту зависимость линейной. Это возможно, если характерные напряжения и токи таковы, что они соответствуют точкам характеристики, лежащим вне аномальной (N- или S-) области их изменения. Противоположный случай нуждается в дополнительном исследовании.

Так как мы рассматриваем эволюцию температурного поля в плёнке полупроводникового материала с толщиной, намного меньшей остальных её размеров, то температурное поле можно считать двумерным и влиянием краевых эффектов на эволюцию можно пренебречь. Электрическое поле в этом случае имеет только одну ненулевую компоненту, перпендикулярную плоскости плёнки. Уравнение (1), с учётом сделанных предположений и соотношений (2-4), принимает вид

$$c\dot{T} = \nabla(\kappa(T)\nabla T) + E^2(\vec{r}, t)\sigma(T). \quad (5)$$

Здесь векторный дифференциальный оператор ∇ является двумерным, действующим в плоскости, параллельной плёнке.

Установим зависимость $E(t)$ в уравнении (5). Пусть $I(t) = \int j(\vec{r}, t)ds$ - полный ток, протекающий через любую плоскость, параллельную плоскости плёнки. Интегрирование здесь производится по поверхности основания плёнки, имеющему площадь S . Линейные размеры основания плёнки здесь полагаются конечными, намного большими по сравнению с толщиной плёнки d . Плёнка включена состав электрической цепи, из характеристик которой мы учтём только наличие у неё активного сопротивления R (реактивное сопротивление может быть также просто учтено). На основании закона Кирхгофа

$$\mathcal{E} = I(t)R + E(t)d,$$

и закона Ома $I(t) = E(t) \int \sigma(T(\vec{r}, t))ds$, находим

$$E(t) = E(1 + (\bar{\sigma}S)^{-1} \int \sigma(T)ds)^{-1},$$

где \mathcal{E} - электродвижущая сила, которую полагаем постоянной за время развития пробоя, $E(t)d$ - падение напряжения на плёнке, $E = \mathcal{E}/d$, $\bar{\sigma} = d/RS$. Учитывая в (5) полученную зависимость для $E(t)$, получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$c\dot{T} = \nabla(\kappa(T)\nabla T) + \frac{E^2\sigma(T)}{(1 + (\bar{\sigma}S)^{-1} \int \sigma(T)ds)^2}, \quad (6)$$

описывающее эволюцию температурного поля в плёнке. Уравнение (6) - нелинейно, во-первых, в связи с зависимостью σ и κ от T и, во-вторых, в связи с имеющейся интегральной нелинейностью.

Мы покажем далее, что нелинейные зависимости $\sigma(T)$ и $\kappa(T)$ являются существенными при описании стадии развития SB, т.е. стадии стремительного повышения температуры в малых областях плёнки с повышенной температурой, и что именно эти нелинейности, в основном, и определяют время пробоя и размер проплавленных каналов. Интегральная нелинейность обеспечивает стабильность теплового фона и переброску падения напряжения в результате пробоя. Эта нелинейность играет также существенную роль на стадии зарождения пробойных мест в плёнке.

Характер зависимостей $\kappa(T)$ и $\sigma(T)$ для полупроводниковых материалов отличается большим разнообразием, в частности, эти зависимости приводят к различным отношениям σ/κ (в отличие от металлов, для которых отношение σ/κ подчиняется закону Видемана - Франца). Вместе с тем, для них, с одной стороны, характерным является наличие участка резкого возрастания $\sigma(T)$ от некоторой температуры минимума T^* , которая является характеристикой материала и имеет порядок $100^\circ \div 600^\circ\text{K}$, вплоть до температуры T_m . С

другой стороны, для полупроводников отсутствует жёсткая связь между $\kappa(T)$ и $\sigma(T)$. Зависимость $\kappa(T)$ в температурной области, в которой возникает SB, может быть возрастающей $\sim T^n$ [26], как это имеет место для полупроводниковых материалов с радиационно-стимулированной инжекцией носителей, почти постоянной и даже убывающей, как это имеет место для Si.

Для полной определённости математической задачи описания температурного поля в плёнке на основе уравнения (6) необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия. Что касается граничных условий, то их можно варьировать в очень широких пределах. Возможность возникновения локализованной тепловой структуры слабо зависит от условий на границах плёнки. Это связано с тем, что времена развития пробоя намного меньше характерного времени переноса тепла от границ в глубину плёнки. Например, характерное время переноса тепла от граней плёнки в её середину имеет порядок $(4\kappa(T^*)/d^2) \sim 10^{-5} s$, и именно поэтому мы ограничились в уравнении (6) двумя пространственными переменными. В дальнейшем будем считать, что на границе отсутствует поток тепла внутрь плёнки, т.е. $(\vec{n}(\vec{r}), \nabla T(\vec{r}, t))|_{\Gamma} \leq 0$, где $\vec{n}(\vec{r})$ - вектор внешней нормали к поверхности Γ в точке \vec{r} . Это соответствует экспериментальному условию - наличию теплоотвода от плёнки наружу через её границу.

Как уже было указано, задача о возникновении SB является задачей о спонтанном возникновении структуры. Поэтому начально-краевая задача, решение которой моделирует возникновение этой структуры, является задачей со случайными начальными условиями $T_0(\vec{r})$. В общем случае, эти условия являются реализациями некоторого случайного температурного поля, учитывающего флуктуации, связанные с наличием дефектов. На основе экспериментальных данных можно прогнозировать только самые грубые статистические характеристики температурного поля - средние амплитуду Δ и пространственный размер r флуктуаций, а также их среднюю плотность ρ , совпадающую, по-видимому, со средней плотностью дефектов. Указанные статистические характеристики зависят от технологии приготовления плёнки полупроводникового материала. Так как доля объёма, в котором сосредоточены существенные неоднородности температурного поля мала, т.е. $\rho r^3 \ll 1$ для объёмных дефектов и $\rho r^2 \ll 1$ для линейных (для последних $\rho \sim 10^4 \text{ cm}^{-2}$, $r \sim 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$), то в дальнейшем можно считать, что температурные флуктуации статистически независимы с большой точностью. (Обмен теплом между ними осуществляется за времена порядка $10^{-5} s$). Поэтому случайное поле следующего типа можно установить в каче-

стве начальных условий для уравнения (6),

$$T_0(\vec{r}) = T_0 + \sum_l U_l(\vec{r} - \vec{r}_l),$$

где центры температурных флуктуаций - точки \vec{r}_l - образуют пуассоновское случайное поле с плотностью ρ , а $U_l(\vec{r})$ - случайные статистически независимые функции довольно произвольного вида, сосредоточенные около нуля в области со средним размером $\sim r$ и имеющие максимум $\sim \Delta$. Однако, ввиду малости плотности ρ , в дальнейшем для нас будет достаточно исследовать эволюцию во времени единственной обособленной флуктуации температурного поля, т.е. начальные условия для нашей задачи выбираются в виде

$$T_0(\vec{r}) = T_0 + U(\vec{r}),$$

где T_0 - постоянная температура фона, $U(\vec{r}) \geq 0$ - есть случайный профиль локализованной температурной флуктуации. При математическом анализе удобно считать, что область, где эта флуктуация отлична от нуля ограничена.

Прежде чем перейти к анализу поставленной начально краевой задачи для уравнения (6), укажем на ожидаемые качественные особенности его типичных решений, с которыми мы связываем свойства SB, указанные в 1)-5). По-нашему мнению, решающим обстоятельством для возникновения SB, помимо существования положительной обратной связи, благодаря возрастающей зависимости $\sigma(T)$ [26,27], является убывание с ростом T отношения $\kappa(T)/\sigma(T)$. Последнее приводит к тому, что неравномерное нагревание плёнки, связанное с положительной обратной связью, не успевает компенсироваться посредством перенесения тепла от более нагретых областей к менее нагретым.

Таким образом, стартовой причиной появления SB является наличие тепловых флуктуаций в плёнке достаточно большой амплитуды, и конкуренция в отборе мощности между различными физически малыми ячейками плёнки, вызванная ограничением суммарной поглощаемой плёнкой мощности, величиной электродвижущей силы. Появление же SB является следствием согласованного действия двух факторов: роста проводимости и намного более медленного изменения теплопроводности. Первый фактор усиливает неравномерность нагревания различных участков материала, причём эта неравномерность тем более резкая, чем выше температура участка. Второй фактор препятствует теплообмену между различными областями в материале, что обеспечивает локализацию тепла в некоторых областях при слабом изменении средней температуры.

Для описания эффекта SB на основе уравнения (6), по-видимому, необходимо, чтобы его решения с описанными выше начальными условия-

ми являлись локализованными в области с некоторым характерным размером r^* - эффективной длиной локализации (п. 2) разд. 1). Эти решения, вследствие положительной обратной связи, должны быть быстро возрастающими в области локализации, причём время достижения t^* фиксированной, большей по сравнению с Δ температуры T_m , должно слабо зависеть от $\max U(\vec{r})$ (п. 1)) и от плотности ρ флуктуаций (п. 3)). Наконец, должна существовать такая стартовая величина амплитуды функции $U(\vec{r})$, начиная с которой развивается процесс быстрого роста решения, т.е. этот сценарий эволюции имеет пороговый характер (п. 4)).

В самом деле, если существует стартовая температура T^* (или пороговое падение напряжения), при переходе решения $T(\vec{r}, t)$ через которую в какой-либо точке развивается процесс быстрого роста его, то при медленном нагреве плёнки джоулевым теплом и при подходе снизу температуры фона T_0 к T^* только лишь в небольшом числе мест на плёнке могут возникнуть настолько большие флуктуации температуры, что во всех этих малых объёмах одновременно температура превысит температуру T^* .

Именно в местах расположения этих тепловых неоднородностей и развивается SB, так как после проплавления плёнки в каком-либо месте, ток, протекающий через неё, резко фокусируется, устремляясь в образованные каналы, и новые проплавленные каналы не образуются. Мы связываем пороговую температуру T^* с температурой, в которой $\sigma(T)$ достигает минимума перед тем, как перейти на участок (T^*, T_m) . Температура T^* является характеристикой полупроводникового материала (для Si $T^* \sim 500^\circ\text{K}$) и изменяется в широких пределах (п. 5)).

В следующих разделах мы покажем, что наличие знаменателя в члене, описывающем источник тепла имеет важное значение для учёта существенно различных скоростей нагревания фона и тепловых флуктуаций (разд.3).

Затем мы покажем, что решения поставленной начально-краевой задачи неустойчивы вследствие положительной обратной связи (разд.4). На этой неустойчивости основана линейная модель развития SB. Однако мы покажем, что линейная теория совершенно не в состоянии описывать быстро растущие решения, т.е. нелинейность зависимостей $\sigma(T)$, $\varkappa(T)$ важна для адекватного описания эффекта SB.

В разд. 5 мы сформулируем с квадратичной точностью эволюционное уравнение для флуктуаций температуры на этапе развития SB.

Далее в разд. 6 мы опишем метод анализа его решений на основе эталонных функций.

В разд. 7 мы обсудим анализ решений одномерного аналога уравнения для эволюции флуктуаций, который выполнен нами в [24]. Будет показано, что

решения этого уравнения действительно подтверждают высказанные выше гипотезы о свойствах решений поставленной нами начально-краевой задачи для описания эффекта SB.

4. Инертность теплового фона

В этом разделе мы обсудим один из управляющих развитием эффекта SB механизмов, а именно инертность нагрева теплового фона, приводящую к конкуренции в отборе мощности между различными областями плёнки. Рассмотрим однородное решение $T(\vec{r}, t) \equiv T(t)$ уравнения (6), которое определяется из уравнения

$$c\dot{T} = \frac{E^2\sigma(T)}{(1 + \sigma(T)/\bar{\sigma})^2}. \quad (7)$$

При любой зависимости $\sigma(T)$, из (7) следует, что, ввиду $\sigma(T)(1 + \sigma(T)/\bar{\sigma})^{-2} \leq \bar{\sigma}/2$, выполняется точное неравенство

$$T(t) \leq T_0 + \bar{\sigma}E^2t/2c, \quad (8)$$

которое указывает на медленный характер нагревания теплового фона. Более того, при учёте условия теплоотвода этот нагрев отсутствует. Подчеркнём, что полученный вывод справедлив при любой сколь угодно быстро возрастающей зависимости $\sigma(T) > 0$, и это связано с наличием знаменателя в правой части уравнения (7). По этой же причине и в случае произвольного начального распределения температуры $T_0(\vec{r})$ средняя температура $\langle T \rangle_t \equiv \langle T(\vec{r}, t) \rangle = S^{-1} \int T(\vec{r}, t) ds$ плёнки также подчиняется неравенству (8). В самом деле, интегрируя уравнение (6) по плоскости плёнки

$$c\langle \dot{T} \rangle_t = \int (\nabla, \varkappa(T)\nabla T)(\vec{r}, t) ds + E^2\langle \sigma \rangle_t (1 + \langle \sigma \rangle_t / \bar{\sigma})^{-2},$$

где $\langle \sigma \rangle_t = S^{-1} \int \sigma(T(\vec{r}, t)) ds$, и, преобразуя интеграл в первом слагаемом с помощью формулы Грина к интегралу по замкнутому контуру, ограничивающему плёнку, а затем, воспользовавшись граничным условием отсутствия потока тепла внутрь плёнки (т.е. неположительностью этого интеграла) при $\varkappa(T) > 0$, получим для средней температуры $c\langle \dot{T} \rangle_t \leq E^2\bar{\sigma}/2$ и, следовательно, неравенство (8).

Таким образом, в среднем плёнка может нагреваться не быстрее, чем происходит разогрев теплового фона.

Для того, чтобы понять роль знаменателя в определении зависимости $E(t)$, рассмотрим динамику теплового фона и сравним её, используя простейшие, самые грубые оценки с динамикой тепловых флуктуаций при условии быстро растущей зависимости $\sigma(T)$. Положив $E(t) = E = const$, получим для пространственно-однородного решения

$T(t)$ уравнение

$$c\dot{T}(t) = E^2\sigma(T(t)).$$

Положим $\sigma(T) \sim T^n$, $n > 1$. Тогда при неограниченном экстраполировании этой зависимости получаем, что $T(t)$ возрастает столь быстро, что функция $T(t)$ достигает неограниченно больших значений за конечное время t_∞ , где

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{dT}{\sigma(T)} \sim E^2 t_\infty / c.$$

Такой тип динамики называется *обострением резонанса* [23].

Кроме такого аномально быстрого нагревания теплового фона, пренебрежение зависимостью $E(t)$ влечёт за собой отсутствие отставания нагрева фона от темпа возбуждения тепловых флуктуаций.

Доказательство этого факта состоит в следующем. В самом деле, пусть $\max U(\vec{r}) = \Delta \ll T_0$, т.е. $T_0 \leq T_0(\vec{r}) \leq T_0 + \Delta$. Тогда решение уравнения

$$c\dot{T} = \nabla(\varkappa(T)\nabla T) + E^2\sigma(T) \quad (9)$$

с начальным условием $T_0(\vec{r})$ удовлетворяет неравенствам

$$T_1(t) \leq T(\vec{r}, t) \leq T_2(t), \quad (10)$$

где $T_1(t)$, $T_2(t)$ - пространственно однородные решения уравнения (9) с начальными условиями, соответственно, равными $T_1(0) = T_0$, $T_2(0) = T_0 + \Delta$. В самом деле, если минимум (максимум) функции $T(\vec{r}, t)$ по пространственной переменной достигает уровня $T_1(t)$ сверху в точке \vec{r}_1 (уровня $T_2(t)$ снизу в точке \vec{r}_2) в какой-либо момент времени t_1 (t_2), то в эти моменты времени в этих точках выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\nabla T(\vec{r}, t_i))|_{\vec{r}=\vec{r}_i} &= 0, \\ \sigma(T(\vec{r}_i, t_i)) &= \sigma(T_i(t_i)), \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

$(\Delta T(\vec{r}, t_1))|_{\vec{r}=\vec{r}_1} > 0$, $(\Delta T(\vec{r}, t_2))|_{\vec{r}=\vec{r}_2} < 0$. и, следовательно, на основании уравнения (9), имеют

$$\dot{T}_1(t_1) \leq \dot{T}(\vec{r}_1, t_1), \quad \dot{T}_2(t_2) \geq \dot{T}(\vec{r}_2, t_2).$$

По этой причине поверхность $T(\vec{r}, t)$ никогда не может пересечь сверху уровень $T_1(t)$ (снизу уровень $T_2(t)$), если в начальный момент времени она удовлетворяла неравенствам $T_1(0) \leq T(\vec{r}, 0) \leq T_2(0)$.

Решения $T_1(t)$ и $T_2(t)$ определяются квадратурами

$$\int_{T_0}^{T_1(t)} \frac{dT}{\sigma(T)} = \int_{T_0+\Delta}^{T_2(t)} \frac{dT}{\sigma(T)} = \frac{E^2 t}{c}.$$

Подсчитаем разность $\delta t^* = t_2^* - t_1^*$ между временами t_2^* , t_1^* достижения уровня T_m соответственно решениями $T_2(t)$, $T_1(t)$, т.е.

$$\int_{T_0}^{T_m} \frac{dT}{\sigma(T)} = \frac{E^2 t_1^*}{c}, \quad \int_{T_0+\Delta}^{T_m} \frac{dT}{\sigma(T)} = \frac{E^2 t_2^*}{c}.$$

Она определяется из уравнения

$$\int_{T_0}^{T_0+\Delta} \frac{dT}{\sigma(T)} = \frac{E^2}{c} \delta t^*.$$

Отсюда следует, что, ввиду малости величины Δ , эта разность также мала и равна

$$\delta t^* = \frac{\Delta c}{E^2 \sigma(T_0)}.$$

Сравним теперь эту разность со временем t_2^* . Полагая $\sigma(T) \sim \text{const} T^n$, находим $t_1^* \approx cT_0/E^2(n-1)\sigma(T_0)$. Так как время t^* достижения уровня T_m решением $T(\vec{r}, t)$, ввиду неравенства (10), наверняка меньше t_1^* , то отсюда следует $(t^* - t_2^*)/t_1^* < \delta t^*/t_1^* \approx (n-1)\Delta/T_0 \ll 1$. Следовательно, разность времён между тепловым пробоем и полным расплавлением плёнки пренебрежимо мала, что не соответствует эксперименту.

5. Тепловая неустойчивость

В этом разделе мы обсудим роль второй причины, которая приводит к проявлению эффекта SB, а именно, мы выявим наличие неустойчивости пространственно однородных решений уравнения (6) вследствие наличия положительной обратной связи, которая проявляется в раскачивании имеющихся малых тепловых неоднородностей. Эту неустойчивость будем называть тепловой неустойчивостью. Именно только наличием этой неустойчивости объясняется эффект SB в рамках линейных теорий.

С целью выявления тепловой неустойчивости линейризуем уравнение (6), положив

$$T(\vec{r}, t) = T(t) + U(\vec{r}, t).$$

Для функции $U(\vec{r}, t)$ в линейном приближении получим уравнение

$$c\dot{U}(\vec{r}, t) = \varkappa_t \Delta U(\vec{r}, t) + c\alpha_t [U(\vec{r}, t) - \xi_t \langle U \rangle_t], \quad (11)$$

где

$$\varkappa_t = \varkappa(T(t)), \quad \sigma_t = \sigma(T(t)), \quad \sigma'_t = \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) (T(t)) > 0,$$

$$\alpha_t = E^2 \sigma'_t / c (1 + \sigma_t / \bar{\sigma})^2 > 0, \quad \xi_t = 2\sigma'_t / (\bar{\sigma} + \sigma_t). \quad (12)$$

Преобразуя уравнение (11) посредством интеграла Фурье в эволюционное уравнение в \vec{k} -пространстве, находим, что

$$\dot{\tilde{U}}(\vec{k}, t) = (\alpha_t - (\varkappa_t/c)k^2)\tilde{U}(\vec{k}, t) - \alpha_t \xi_t \tilde{U}(0, t), \quad (13)$$

где

$$\tilde{U}(\vec{k}, t) = (2\pi)^{-2} \int \exp(-i(\vec{k}, \vec{r})) U(\vec{r}, t) ds,$$

$$\langle U \rangle \rightarrow \tilde{U}(0, t), \quad S \rightarrow \infty.$$

Из уравнения (13) следует, что волны с волновыми векторами \vec{k} в круге с радиусом $(\alpha_t c / \varkappa_t)^{1/2}$, имеющим выколотый центр, неустойчивы, причём наиболее неустойчивыми являются длинные волны (малые k). Радиус круга стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Характер этой неустойчивости можно выяснить на основе явного решения уравнения (11) в предположении, что $(\vec{n}, \nabla U(\vec{r}, t)) \rightarrow 0$ при $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. Усредняя уравнение (11), получаем

$$\langle \dot{U} \rangle = \alpha_t (1 - \xi_t) \langle U \rangle_t. \quad (14)$$

с начальным условием $\langle U \rangle_0 = \langle U(\vec{r}, 0) \rangle$. Функция $\langle U \rangle_t$ перенормирует тепловой фон, и поэтому, введя эффективное отклонение от теплового фона

$$V(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) - \langle U \rangle_t, \quad (15)$$

получим для него уравнение

$$c \dot{V}(\vec{r}, t) = \varkappa_t \Delta V(\vec{r}, t) + c \alpha_t V(\vec{r}, t), \quad (16)$$

которое, учитывая начальное условие

$V(\vec{r}, 0) = U(\vec{r}, 0) - \langle U(\vec{r}, 0) \rangle = 0$ и нулевые граничные условия на бесконечности, имеет следующее решение

$$V(\vec{r}, t) = c \left\{ 4\pi \int_0^t \varkappa_{t'} dt' \right\}^{-1} \exp \left\{ \int_0^t \alpha_{t'} dt' \right\} \times \\ \times \int V(\vec{r}', 0) \exp \left\{ -c(\vec{r} - \vec{r}')^2 / 4 \int_0^t \varkappa_{t'} dt' \right\} ds. \quad (17)$$

Из формул (14,15,17) следует, что неустойчивость однородного решения приводит к раскачке малых неоднородностей $U(\vec{r}, 0)$ множителем

$$\exp \left\{ \int_0^t \alpha_{t'} dt' \right\}$$

на фоне диффузионного расплывания. Функция $\langle U \rangle_t$ при этом затухает к нулю, так как σ_t возрастает неограниченно вместе с возрастанием $T(t)$ и, следовательно, $\xi_t \rightarrow 2$, т.е. при достаточно больших t коэффициент при $\langle U \rangle_t$ в уравнении (14) становится отрицательным.

Наличие неустойчивости однородного решения уравнения (6) является основой для линейной теории развития SB, которая исходит из предположений, что

$$\sigma(T) = \sigma + \sigma'(T - T_0), \quad \sigma' > 0, \quad \varkappa(T) = \varkappa = const,$$

В этом случае из уравнения (6) получим

$$c \dot{T} = \varkappa \Delta T + E^2 \frac{\sigma + \sigma'(T - T_0)}{(1 + (\sigma + \sigma'(\langle T \rangle_t - T_0)) / \bar{\sigma})^2}.$$

Здесь удобно сразу вместо $T(t)$ ввести отклонение $V(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) - \langle T \rangle_t$ от усреднённой температуры $\langle T \rangle_t = T(t) + \langle U \rangle_t$, которая удовлетворяет уравнению

$$c \langle \dot{T} \rangle_t = E^2 \frac{\sigma + \sigma'(\langle T \rangle_t - T_0)}{(1 + (\sigma + \sigma'(\langle T \rangle_t - T_0)) / \bar{\sigma})^2}$$

с начальным условием $\langle T \rangle_0 = T_0$. Уравнение интегрируется в квадратурах, однако для нас важно только, что, как и следовало ожидать, средняя температура возрастает очень медленно, $\langle T \rangle_t \sim t^{1/2} const$, где $const = (2E^2 \bar{\sigma}^2 / c \sigma')^{1/2}$. Так как $\langle V \rangle_t = 0$, то функция $V(\vec{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (16), в котором $\varkappa_t = \varkappa$, $\sigma'_t = \sigma'$, а α_t определяется через зависимость $\sigma_t = \sigma(\langle T \rangle_t)$. Поэтому из (17) следует общая формула, описывающая эволюцию некоторой случайной тепловой флуктуации в рамках линейной теории

$$V(\vec{r}, t) = (c/4\pi \varkappa t) \times \\ \times \exp \left\{ (E^2 \sigma' / c) \int_0^t (1 + \sigma'_t / \bar{\sigma})^{-2} dt' \right\} \times \\ \times \int V(\vec{r}', 0) \exp \left\{ -c(\vec{r} - \vec{r}')^2 / 4 \varkappa \right\} ds. \quad (18)$$

Так как $\langle T \rangle_t \sim t^{1/2} const$ при $t \rightarrow \infty$, то, вычисляя интеграл в показателе экспоненциального множителя в формуле (18) с использованием этой асимптотики, получим, что этот множитель $\sim (t/2E^2)^{1/2}$ и диффузионное расплывание с коэффициентом диффузии \varkappa/c полностью компенсирует такую "раскачку" (её характерное время, например, для GaAs - $2E^2/c \sim 4 \cdot 10^{-4}$ с). Таким образом, учёт инертности теплового фона ведёт к слишком медленной раскачке тепловых неоднородностей в рамках линейной теории, сравнимой с нагревом теплового фона. Последнее обстоятельство нельзя признать удовлетворительным с точки зрения объяснения явления SB, так как в этом случае особенности SB, перечисленные в пп. 1)-5), несовместимы со свойствами решений вида (18). (Обычно (см., например, [17]) инертность теплового фона не учитывается, что приводит к выводу об экспоненциальности раскачки тепловых флуктуаций. Однако, даже в этом случае размеры проплавленных каналов r^* сильно зависит от времени пробоя t^* , так как начальный размер r увеличивается диффузионным образом за это время на величину $\sim 4(\varkappa t^*/c)^{1/2}$. В свою очередь, t^* зависит от Δ .)

Причиной неэкспоненциальности раскачки, несмотря на положительную обратную связь, навязываемую источником тепла, является то, что при линейаризации предполагалась малость $\langle \sigma \rangle_t / \bar{\sigma} \ll 1$. Однако в областях разогрева выполняется $\sigma(T) \gg \bar{\sigma}$, и по прошествии достаточно большого времени реализуется обратное неравенство. Следовательно, линейное приближение

становится неадекватным. В связи с этим, в следующем разделе нами строится нелинейная модель эволюции температурного поля.

6. Нелинейная флуктуационная модель

В этом разделе мы получим нелинейное уравнение, описывающее динамику тепловых флуктуаций, которое учитывает существенное увеличение проводимости плёнки как целого в результате развития пробоя.

Для формулировки требуемого уравнения разложим правую часть уравнения (6), используя функцию $U(\vec{r}, t)$ и введённые согласно (12) функции $\varkappa_t, \sigma_t, \sigma'_t$, с точностью до членов, квадратичных по $U(\vec{r}, t)$, представив

$$\begin{aligned} \varkappa(T) &= \varkappa_t + \varkappa'_t U(\vec{r}, t), \\ \sigma(T(\vec{r}, t)) &= \sigma_t + \sigma'_t U(\vec{r}, t) + \frac{\sigma''_t}{2} U^2(\vec{r}, t), \\ \sigma''_t &= \frac{d^2}{dT^2} \sigma(T)|_{T(t)}. \end{aligned}$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(\vec{r}, t) &= \\ &= [(\varkappa_t/c)\Delta U + \nu_t(\nabla, U\nabla U) + \\ &+ \alpha_t U + \beta_t U^2](\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (19)$$

где эволюция теплового фона $T(t)$ и связанные с ней функции $\varkappa_t, \nu_t, \alpha_t, \xi_t, \beta_t$, в отличие от определения аналогичных величин при исследовании линейной модели, вводятся для удобства дальнейшего анализа с сохранением функциональной зависимости от $U(\vec{r}, t)$,

$$\begin{aligned} c\dot{T}(t) &= E^2 \sigma_t \xi_t, \quad \xi_t = (1 + \langle \sigma(T(\vec{r}, t)) \rangle / \bar{\sigma})^{-2}, \\ \nu_t &= \varkappa'_t / c, \quad \alpha_t = E^2 \sigma'_t \xi_t / c, \quad \beta_t = E^2 \sigma''_t \xi_t / 2c. \end{aligned} \quad (20)$$

Ограничение квадратичными по $U(\vec{r}, t)$ членами в уравнении (19) имеет смысл только в случае, если $\sigma''(T) > 0$ в температурной области (T^*, T_m) . В противном случае, член $\beta_t U^2$ в уравнении (19) не мог бы рассматриваться как основной, отражающий главную особенность зависимости $\sigma(T)$ на этом интервале, её возрастание. Кроме того, при дальнейшем анализе подразумевается, что $\varkappa'(T) > 0$, хотя возможны материалы, для которых это условие не выполняется (например, Si). Функция α_t не имеет определённого знака. Можно только утверждать, что для описания минимума в зависимости $\sigma(T)$ в точке T^* необходимо, чтобы при $T_0 < T^*$ выполнялось $\sigma'(T_0) < 0$.

Покажем теперь, что, в отличие от представленного в предыдущем разделе анализа линейной модели, в уравнении (19) можно пренебречь зависимостями $T(t), \langle \sigma \rangle_t$ и заменить $T(t) \Rightarrow T_0, \langle \sigma \rangle_t \Rightarrow$

$\langle \sigma \rangle_0$ в формулах (20). Можно считать, что член $\beta_t U^2$ является главным в уравнении (19) в том смысле, что он определяет скорость возрастания решения $U(\vec{r}, t)$. Снижение темпа роста решения и, более того, невыполнение этого утверждения может быть достигнуто только посредством убывающей со временем к нулю зависимости β_t . Однако, при любой скорости убывания, если только эта функция не обращается точно в ноль при конечных значениях времени порядка времени пробоя, т.е. $\beta_t \geq \beta_{t^*} > 0$, член $\beta_t U^2$ всё же является главным, и функция $U(\vec{r}, t)$ возрастает с обострением режима (см. разд.3), т.е. качественно она ведёт себя таким же образом, как и в случае, если в уравнении (19) заменить β_t на β_0 . Если же β_t обращается точно в ноль на временах порядка времени пробоя, то для этого, на основании определения её (20), необходимо для этих значений времени $\langle \sigma \rangle_t \rightarrow \infty$. Так как, на основании общего утверждения (8) $T(t) < const t$ и, следовательно, при $\sigma(T) \sim T^n$ имеем $\sigma(T(t)) \sim t^n, \sigma'_t \sim t^{n-1}, \sigma''_t \sim t^{n-2}$, то из разложения $\sigma(T(\vec{r}, t))$ следует, что для обращения $\langle \sigma \rangle_t$ в бесконечность на конечных временах необходимо, чтобы на этих же временах обращалась в бесконечность функция $U(\vec{r}, t)$, т.е. и в этом случае она возрастает с обострением режима, как и при значении β_t , равном β_0 . Итак, мы доказали, что при построении модели, качественно адекватно описывающей тепловой пробой, можно в первом приближении пренебречь изменением величин $T(t), \langle \sigma \rangle_t$ в определении коэффициентов уравнения (19) по формулам (20) и вычислить их при определении эволюции $U(\vec{r}, t)$, осуществляющейся с обострением режима, в начальный момент времени. В результате, получим следующее уравнение с постоянными коэффициентами, которое, как мы считаем, является адекватной математической моделью, описывающей явление SB,

$$\begin{aligned} \dot{U}(\vec{r}, t) &= [(\varkappa/c)\Delta U + \\ &+ \nu(\nabla, U\nabla U) + \alpha U + \beta U^2](\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (21)$$

7. Метод эталонных функций

В этом разделе мы пойдём по пути дальнейшего упрощения уравнения, описывающего эффект SB. Это позволит применять явным образом для упрощённого уравнения метод эталонных функций. Этот метод основан на принципе максимума, справедливом для квазилинейных параболических уравнений второго порядка [23, 28], каковым является уравнение (21). Частный случай его мы уже использовали в разд.3 при оценке разности времён достижения температуры T_m тепловой флуктуацией и фоном. Ниже мы дадим общую формулировку этого принципа.

Упрощение уравнения (21) состоит в пренебрежении линейным диффузионным членом, так как

κ_0^{-1} - характерные диффузионные времена, за которые действие этого члена сказывается на распределении температуры, имеет порядок 10^{-4} см $c/\kappa \sim 10^{-6}$ с., что существенно превосходит время развития SB. Таким образом, мы далее используем следующее уравнение для описания SB

$$\begin{aligned} \dot{U}(\vec{r}, t) &= \nu(\nabla, U \nabla U)(\vec{r}, t) + \\ &+ (\alpha + \beta U(\vec{r}, t))U(\vec{r}, t) \equiv \\ &\equiv (L U)(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (22)$$

с начальным условием $U(\vec{r}, 0) \geq 0$, равным нулю вне некоторых малых областей внутри плёнки с размером $r \sim 10^{-7}$ см. Последнее чисто математическое условие физически означает, что мы пренебрегаем возможным малым шлейфом тепловой неоднородности, связанным с отсутствием для неё резкой границы, как не оказывающим влияния на формирование тепловой структуры SB. Условие точного равенства нулю функции $U(\vec{r}, 0)$ оказывается полезным в исследовании в связи с тем, что его выполнение сохраняется с течением времени для функции $U(\vec{r}, t)$ в процессе её эволюции, описываемой уравнением типа (22) [23, 30]. При этом область, где $U(\vec{r}, t) \neq 0$, изменяется с течением времени как по форме, так и по размерам. Однако такого рода решения, как правило, имеют разрывные производные по координатам, и поэтому их необходимо понимать в обобщённом смысле, так как они формально не допускают подстановки их в уравнение. Такие обобщённые решения называются слабо разрывными, и в строгом математическом смысле они являются решениями интегродифференциального уравнения, которое следует из (22), и которое описывает баланс величины $U(\vec{r}, t)$ в любой области \mathcal{D} на плоскости плёнки, ограничиваемой замкнутой контуром C ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} U(\vec{r}, t) ds &= \\ = \nu \oint_C U(\vec{r}, t) (\nabla U(\vec{r}, t), d\vec{l}) &+ \\ + \int_{\mathcal{D}} [\alpha U + \beta U^2](\vec{r}, t) ds. \end{aligned}$$

Если функция, удовлетворяющая этому уравнению при любом выборе контура, является непрерывно дифференцируемой по координатам, то она автоматически, ввиду произвольности контура, является решением уравнения (22). Таким образом, набор решений сформулированного интегродифференциального уравнения (слабо разрывных решений) является более широким по сравнению с набором решений уравнения (22). Точки негладкости слабо разрывного решения лежат на некотором деформирующемся со временем контуре $C(t)$. Этот контур определяется из условия непрерывности функции $U(\vec{r}, t)$. Ввиду условия непрерывности, получаем, окружив контуром C произвольную

точку \vec{r} контура $C(t)$ и затем стягивая контур C к этой точке, что выполняется следующее условие отсутствия потока величины $U(\vec{r}, t)$ через контур $C(t)$, $(U \nabla U)(\vec{r}, t) = 0$, $\vec{r} \in C(t)$.

Как уже было указано выше, ввиду большой величины среднего расстояния между тепловыми неоднородностями при T_0 по сравнению с их размером r , можно с большой вероятностью считать, что границы функций $U_i(\vec{r}, t)$, соответствующие различным начальным неоднородностям $U_i(\vec{r})$, из суммы которых состоит произвольное случайное начальное тепловое возмущение (см. разд.2), не пересекаются в процессе эволюции, и именно в этом проявляется отсутствие взаимного влияния различных тепловых неоднородностей с точки зрения конструкции слаборазрывных решений уравнения (22). Общее решение также будет складываться из суммы функций $U_i(\vec{r}, t)$.

Сформулируем теперь принцип максимума для слаборазрывных решений уравнения (22).

Пусть $U_-(\vec{r}, t)$ и $U_+(\vec{r}, t)$ - пара функций та-ких, что

$$\dot{U}_{\pm}(\vec{r}, t) \gtrless (L U_{\pm})(\vec{r}, t). \quad (23)$$

Тогда, если

$$U_-(\vec{r}, 0) \leq U(\vec{r}, 0) \leq U_+(\vec{r}, 0), \quad (24)$$

то для любого момента $t > 0$ выполняются неравенства

$$U_-(\vec{r}, t) \leq U(\vec{r}, t) \leq U_+(\vec{r}, t). \quad (25)$$

Используя принцип максимума, можно изучать начально-краевую задачу для уравнения (22) на основе достаточно богатого набора явно построенных функций $U_{\pm}(\vec{r}, t)$, удовлетворяющих (23), с помощью которых имеется возможность аппроксимировать посредством (24) начальное возмущение $U(\vec{r}, 0)$. Эти функции мы называем *эталоновными*. В самом деле, так как уравнение (22) содержит квадратичную положительную обратную связь, описываемую членом βU^2 , то его решения обладают обострением режима [23], т.е. решения в течение конечного времени достигают в некоторых точках произвольно больших значений.

Пусть $U_{\pm}(\vec{r}, t)$ - решения с близкими временами обострения t_{\pm} , то, вследствие неравенства (25), решение $U(\vec{r}, t)$ также обладает временем обострения t_{∞} , близким к t_{\pm} , причём

$$t_+ \leq t_{\infty} \leq t_-. \quad (26)$$

Если решения $U_{\pm}(\vec{r}, t)$ обладают также близкими областями локализации, т.е. областями, внутри которых происходит обострение, то, вследствие (25), решение $U(\vec{r}, t)$ обладает областью локализации, близкой к обеим из областей. Таким образом,

найдя подходящие эталонные решения, можно приближённо вычислить время обострения и размер области локализации для произвольного решения уравнения (22).

Свойство обострения режима решений, по нашему мнению, позволяет интерпретировать их как описывающие эффект SB. Как было показано в предыдущем разделе, инертность теплового фона, проявляющаяся в убывании функции β_t , не подавляет обострение режима. Кроме того, для решений с обострением размер локализации начального возмущения количественно оказывает гораздо более слабое влияние на размер локализации решения при достижении его максимума значений, намного превышающих начальный уровень, чем это имеет место для экспоненциально возрастающих с течением времени возмущений. Описанный выше метод эталонных функций позволяет, таким образом, приближённо оценивать время пробоя, которое мы связываем со временем обострения, и размер области пробоя, который мы связываем с размером области локализации решения.

8. Анализ одномерной модели

В этом разделе мы опишем результаты анализа одномерного аналога уравнения (22)

$$\dot{U}(x, t) = [\nu(UU_x)_x + \alpha U + \beta U^2](x, t) \quad (27)$$

на основе метода эталонных функций. Этот анализ выполнен нами в работе [24]. Там же представлено обсуждение свойств решений $U(x, t)$, следующих из свойств эталонных функций. Здесь мы ограничимся кратким перечислением результатов этой работы.

Эталонные функции для уравнения (27) определяются формулой

$$U_{\pm}(x, t) = a(t) + b(t) \cos \Lambda(x + x_{0\pm}), \quad (28)$$

если выражение в правой части неотрицательно и $|x + x_0| \leq \pi/\Lambda$. В противном случае $U_{\pm}(x, t) = 0$. Функции $a(t)$, $b(t)$ в (28) определяются как решения системы уравнений

$$\dot{a} = \alpha a + \beta \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) \quad (29)$$

$$\dot{b} = \alpha b + \frac{3}{2} \beta ab,$$

и ограничены неравенством $b(t) \geq |a(t)|$, а параметр Λ фиксируется в виде

$$\Lambda = \left(\frac{\beta}{2\nu} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

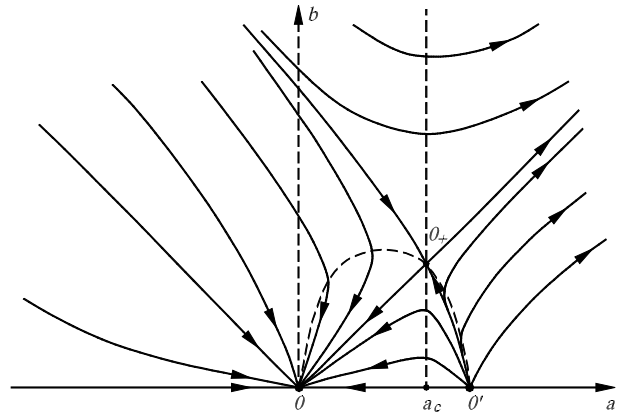


Рис. 1. Фазовая плоскость системы при $\alpha < 0$.

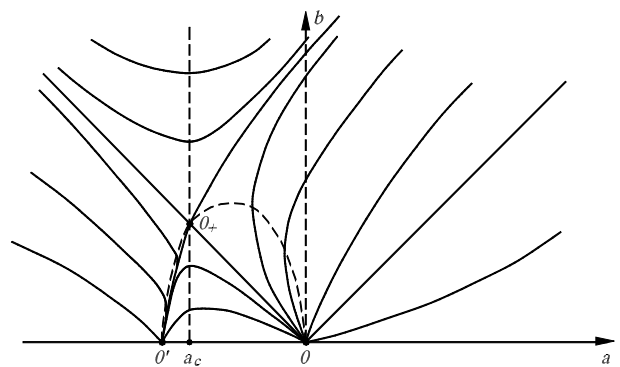


Рис. 2. Фазовая плоскость системы при $\alpha > 0$.

Величину Λ^{-1} мы называем *фундаментальной длиной*. Эталонные функции удовлетворяют неравенствам (23), и посредством изменения начальных значений $(a_{\pm}(0), b_{\pm}(0))$ и точек $x_{0\pm}$ можно аппроксимировать сверху и снизу начальное возмущение $U(x, 0)$, которое локализовано на отрезке с длиной, намного меньшей, чем Λ^{-1} . Поэтому, на основании принципа максимума, выполняется неравенство (24), и имеется возможность оценивать размер области локализации и время обострения точного решения $U(x, t)$ с указанной начальной локализацией. При построении эталонной функции $U_+(x, t)$ необходимо полагать $a_+(0) = b_+(0)$, и в этом случае она является слабо разрывным решением уравнения (27).

Общий вид фазовой плоскости системы (18) в зависимости от знака α представлен на рис.1 и 2. Траектории фазовой плоскости системы (18), проходящие через какую-либо точку (a, b) с $b > |a|$, полностью содержатся в квадранте, ограниченном этим неравенством. Векторное поле системы (18) на плоскости (a, b) имеет вид, изображённый на рис.1 при $\alpha < 0$ и на рис.2 при $\alpha > 0$. При $\alpha > 0$ луч $a = b, a \geq 0$, являющийся траекторией динамической системы (29), содержит особую точку с $a = 0$, которая является неустойчивым узлом. При $\alpha < 0$ этот луч содержит устойчивый узел с $a = 0$

и седловую точку с $a = 2 | \alpha | / 3\beta = a_c$.

Система (29) точно интегрируется. Траектории системы с начальными данными, располагающимися при $\alpha < 0$ выше сепаратрисы седловой точки в квадранте $b \geq | a |$ (а при $\alpha > 0$ с любыми начальными данными в этом квадранте), уходят на $+\infty$, причём это происходит за конечное время, что соответствует обострению режима для эталонных функций $U_{\pm}(x, t)$. Функции $a(t)$, $b(t)$ при $t \rightarrow \infty$ асимптотически эквивалентны, $a(t) \sim b(t)$. Следовательно, из (28) следует, что их обострение происходит в области с размером $2\pi/\Lambda$, и поэтому их области локализации совпадают. Пусть r_{\pm} являются размерами локализаций, соответственно, эталонных функций $U_{\pm}(x, t)$. Они определяются из уравнения $a_{\pm}(0) + b_{\pm}(0) \cos(\Lambda r_{\pm}/2) = 0$. Если r_{\pm} приблизительно равны и $\Lambda r_{\pm} \ll 1$, т.е. $| a_{\pm}(0) | \approx b_{\pm}(0)$, то времена обострения t_{\pm} эталонных функций U_{\pm} также приближённо совпадают и равны $2t_{0,\infty}$, где

$$t_{0,\infty} = \alpha^{-1} \ln(1 + \alpha\pi/2\beta b_0)^{-1}, \quad (31)$$

время обострения, соответствующее начальным данным $(0, b_0)$ (при $\alpha < 0$ необходимо потребовать $b_0 > | \alpha | \pi/2\beta$ для того, чтобы траектории находились выше сепаратрисы седла на рис.1).

Проанализируем теперь решения $U(x, t)$ с точки зрения их применения для описания развития теплового пробоя. Во-первых, на основании неравенства (25) и указанных выше свойств эталонных функций, эти решения действительно обладают обострением режима, т.е. за конечное время функция $U(x, t)$ и, следовательно, температура $T(x, t)$ в окрестности точки $x = 0$ неограниченно повышается по сравнению с окружающим фоном $U = 0$, что объясняет п.1) разд.1.

Так как эталонные решения $U_{+}(x, t)$ при $\alpha > 0$ обостряются при любой сколь угодно малой начальной амплитуде $U_{+}(x, 0)$, то для объяснения свойства пороговости явления SB необходимо считать, что $\alpha < 0$. В самом деле, при $\alpha > 0$ неоднородности со сколь угодно малыми амплитудами всегда порождают обостряющиеся решения, так как эталонная функция $U_{-}(x, t)$ является обостряющейся при любой начальной амплитуде $U_{-}(x, 0)$. Вместе с тем, при $\alpha < 0$ флуктуации с очень малыми амплитудами, которых может быть довольно много в плёнке полупроводникового материала, не приводят к обостряющимся решениям, и, следовательно, не соответствуют теплового пробоя. Действительно, каждую из имеющихся типичных температурных флуктуаций $U(x, 0)$ ограничим сверху амплитудой $U_{+}(x, 0)$. При $\alpha < 0$ эталонные решения $U_{+}(x, t)$ с достаточно малой начальной амплитудой $U_{+}(x, 0)$ не являются обостряющимися. Поэтому начальная малая флуктуация $U(x, 0)$, будучи ограниченной $U_{+}(x, 0)$ с параметрами $a_{+}(0), b_{+}(0)$, также не приводит к обостряющемуся решению ввиду

неравенства (25). В то же время, имеющиеся редкие флуктуации с начальными амплитудами, достаточными для того, чтобы эталонная функция, ограничивающая их снизу при $t = 0$, обладала начальными параметрами выше сепаратрисы седловой точки с $a = b = a_c$ (рис. 1), обязательно обладают обострением режима, так как соответствующие фазовые траектории системы (29) находятся выше сепаратрисы седла и, поэтому, уходят на ∞ . Таким образом, при $\alpha < 0$ анализируемая модель теплового пробоя действительно предсказывает его пороговый характер и, кроме того, объясняет малость числа мест на плёнке, в которых происходит пробой (п.4) разд.1).

Пусть пространственный размер тепловой неоднородности удовлетворяет условию $\Lambda r \ll 1$. Так как эта величина достаточно точно приближается в момент $t = 0$ размерами локализации эталонных функций r_{\pm} так, что $r_{-} < r < r_{+}$, то выполняется условие $\Lambda r_{\pm} \ll 1$. Тогда t_{\pm} близки к $2t_{0,\infty}$, определяемой формулой (31). Следовательно, ввиду неравенства (26), время обострения t_{∞} также приближённо равно $2t_{0,\infty}$. Так как $t_{0,\infty}$ логарифмически зависит от b_0 , то и t_{∞} логарифмически зависит от $b_0 \approx U_{\pm}(0, 0) = a_{\pm} + b_{\pm}$. В свою очередь, величину $U_{\pm}(0, 0)$ можно отождествить со средней амплитудой тепловых флуктуаций Δ . Используя это замечание и подставляя в формулу (31) явные выражения для величин α , β через параметры, определяемые в эксперименте, получаем следующую приближённую формулу для времени пробоя t^* , которое мы при $\beta \gg | \alpha |$ отождествляем со временем достижения флуктуацией уровня $T_m - T_0$, $U(0, t^*) = T_m - T_0$, совпадающим по порядку величины с t_{∞} ,

$$t^* = -2\alpha^{-1} \ln \left(1 + \frac{\pi\sigma'(T_0)}{\sigma''\Delta} \right), \quad (32)$$

$\alpha = E^2\sigma'(T_0)/c(1 + \sigma(T_0)/\bar{\sigma})^2$, $\bar{\sigma} = d/RS$, $E = \mathcal{E}/d$. Здесь d , S - толщина и площадь плёнки, R - внешнее сопротивление цепи, \mathcal{E} - величина ЭДС. Логарифмическая зависимость t^* объясняет п.3) разд.1.

Размер проплавленных каналов, ввиду неравенства (25), заключён между размерами локализации решений $U_{\pm}(x, t)$ при $t = t^*$, которые, ввиду $t^* \approx t_{\infty} \approx t_{\pm}$, можно считать приближённо совпадающими и равными величине $2\pi/\Lambda$. Поэтому, размер проплавленных каналов, появившихся в результате SB, используя (30) и выражения для β , ν , $\beta = E^2\sigma''(T_0)/2c(1 + \sigma(T_0)/\bar{\sigma})^2$, $\nu = \varkappa'(T_0)/c$, определяется формулой

$$r^* \approx \frac{4\pi}{E} \left(1 + \frac{\sigma(T_0)}{\bar{\sigma}} \right) \left[\frac{\varkappa'(T_0)}{\sigma''(T_0)} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

которая влечёт за собой, в частности, универсальную зависимость $r^* \sim E^{-1}$, объясняющую п.2) разд.1.

9. Заключение

В работе предложен нелинейный механизм формирования теплового пробоя плёнки полупроводникового материала, включённой в состав функционирующей электрической цепи. Построена математическая модель, описывающая явление пробоя, которая является простейшей из моделей, учитывающих этот механизм.

Самой существенной особенностью предложенного механизма формирования теплового пробоя является наличие фундаментальной длины, не зависящей от начальных данных и определяемой механизмом локализации тепла. Если в рамках линейных теорий только малое время развития процесса пробоя определяет возможность его описания на их основе, то в предложенной физической картине тепловой поток на границе области с линейным размером порядка фундаментальной длины обращается в нуль, и эта "теплоизоляция" области может приводить к развитию пробоя за времена, значительно большие, чем те, которые получаются из формулы (32), если, например, учитывать иные возможные нелинейные зависимости $\kappa(T), \sigma(T)$. Авторы сознают, что введённая ими модель ещё далека от того уровня, чтобы на её основе можно было обрабатывать конкретные экспериментальные результаты, хотя бы потому, что в её основу положены нелинейные зависимости $\kappa(T), \sigma(T)$ общего положения, которые необязательно реализуются для конкретного полупроводникового материала. От проанализированного варианта модели можно ожидать только совпадения по порядку величины с экспериментальными результатами. В любом случае, исследованный механизм развития неустойчивости температурного поля является важным при описании предпробойных состояний.

В работе проанализирован одномерный аналог предложенной модели, от которого трудно было ожидать какого-либо соответствия с рассматриваемой физической ситуацией. Тем не менее, этот анализ даёт обнадеживающие результаты с качественной точки зрения. Сравнение с экспериментальными результатами осложняется ещё и тем, что в формулы (32), (33) для основных физических характеристик теплового пробоя входят значения производных $\sigma''(T_0)$ и $\kappa'(T_0)$, значения которых, получаемые на основе имеющихся экспериментальных данных, очень неточны. Тем не менее, например, для GaAs при $E \approx 20 \text{ kV/cm}$, $\sigma \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$, $\kappa \sim 10^6 \text{ erg/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K}$, $c \approx 2 \cdot 10^7 \text{ erg/cm}^3 \cdot ^\circ\text{K}$ [31] и при $\bar{\sigma} \sim \sigma$ имеем, на основании (33), $r^* \approx 10 \div 100 \mu$, что соответствует типичному диаметру каналов в этих условиях [4]. При этом используется грубая аппроксимация производных в виде отношения соответствующих приращений с учётом, что $T_0 \approx 600^\circ\text{K}$, $T_m \approx 1250^\circ\text{K}$, $\kappa(T_m) - \kappa(T_0) \sim 10^6$

$\text{erg/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K}$. В этом случае, разумный ответ получается, по-видимому, ввиду того, что производные входят в формулу (33) только в виде их отношения.

Самой существенной качественной чертой полученных формул, по нашему мнению, является то, что величины, характеризующие пробой, сильно зависят от сопротивления нагрузки R , причём таким образом, что пробой становится невозможным при увеличении R (время пробоя быстро становится настолько большим, что построенная в настоящей работе теория становится неприменимой).

Тем не менее, имеется настоятельная необходимость дальнейшей разработки теории пробоя на основе идеи, предложенной в работе. Прежде всего, это касается изучения реальной двумерной модели. Однако, также важно исследовать возможность использования иных, отличных от рассмотренных в настоящей работе, зависимостей $\kappa(T), \sigma(T)$. Необходимо также количественная верификация использованного при построении модели рассуждения о малости влияния инертности теплового фона (переход к уравнению (21)) и диффузионного расплывания с фоновым коэффициентом диффузии (переход к уравнению (22)), учёт которого, по-видимому, не разрушает локализацию тепла, однако приводит к некоторому эффективному размеру локализации.

Кроме этих математических вопросов, в рамках уже построенной в этой работе модели, остаются нерешёнными иные физические проблемы, связанные с явлением локализации тепла и теплового пробоя, например, при учёте генерации и инжекции носителей.

Авторы надеются, что предложенный в работе механизм локализации тепла окажется важным при дальнейшем развитии теории теплового пробоя.

Список литературы

- [1] Benzer S. High inverse voltage germanium rectifiers// J.Appl.Phys. 1949. Vol.20. P.804-815.
- [2] Thornton C.I., Simmons C.D. A new high current mode of transis for operation// IRE Trans. on Electron Devices. 1958. Vol. ED-5. P.6-10.
- [3] IEE Document 47 (Secretariat) 86, (1963)
- [4] Special Issues on Second Breakdown. IEEE Trans. Vol. ED-13, N 8/9, 11 (1966)
- [5] Holonyak N. Jr.// Proc. IRE. 1962. Vol. 50. P.2421.
- [6] Ashley K.L., Milnes A.J.// J.Appl. Phys. 1964. Vol. 35. P.369.
- [7] Ing S.W., Yensen H.A., Stern B.// Appl.Phys.Lett. 1964. Vol.4. P. 164.

- [8] Gerhard G.C., Yensen H.A.// Appl.Phys.Lett. 1964. Vol.10. P.333.
- [9] Ламперт М., Марк П. Инжекционные токи в твёрдых телах. М.: Мир. 1977.
- [10] Милнс А. Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках. М.: Мир. 1977.
- [11] Barnett A.M., Milnes H.A.// J. Appl. Phys. 1966. Vol.37. P.4215.
- [12] Barnett A.M., Yensen H.A.// Appl.Phys.Lett. 1968. Vol.12. P.341.
- [13] Ferro A.P., Ghandhi S.K.// J. Appl. Phys. 1971. Vol.42. N10. P.4015.
- [14] Day G.F.// IEEE Trans. 1966. ED-13. P. 88. (пер.: Дж. Дэй СВЧ - колебания в высокоомном GaAs// Новые методы полупроводниковой СВЧ-электроники. М.: Мир. 1968. С. 294-300)
- [15] English A.C. Physical Investigation of the Mesoplasma in Silicon. см. [4], N 8/9. С.622-670.
- [16] Antinone R.J. How to prevent circuit zapping// IEEE Spectrum, April 1987. N 4. P.34-38.
- [17] Риккерс Л. У., Бриджес Дж.Э., Майлетта Дж., Электромагнитный импульс и методы защиты. М.: Атомиздат. 1979.
- [18] Flemming D.J.// IEEE Trans. 1971. ED-18. N2. P.94-97.
- [19] Sunshine R.A., Lampert M.A. //IEEE Trans. 1972. ED-19. N7.
- [20] Budenshtein P.P., Pontius D.H., Smith W.B.// U.S.Army Missile Command. Report RQ-TR-72-15. April 1972.
- [21] Водяницкий А.А.// Кинетические диссипативные процессы и становление радиационной тепловой структуры. Современные проблемы статистической физики, сб. докл., Харьков, май 1991, 44-45.
- [22] Вирченко Ю.П., Водяницкий А.А.// Синергетика вторичного теплового пробоя. Современные проблемы статистической физики, сб. докл., Харьков, май 1991, 41-42.
- [23] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва. Наука, 1987.
- [24] Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A.// Semiconductors Materials Heat Breakdown under Action of the Penetrating Electromagnetic Radiation. Functional Materials. 1996. Vol. . N 1.
- [25] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982.
- [26] Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука. 1982.
- [27] Баранский П.И., Ключков В.П., Потыкевич И.В. Полупроводниковая электроника. Свойства материалов. Киев: Наукова думка. 1975.
- [28] Фридман А.// Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир. 1966.
- [29] Вольтер А.И., Худеев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М. : Наука. 1975.
- [30] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. М. : Наука. 1987.
- [31] Таблицы физических величин. Справочник под ред. И.К.Кикоина. М. : Атомиздат 1976.