Устойчивость Дрейфово-Диссипативных Структур и Аномальный Перенос Плазмы. II.

А.А.Водяницкий
Институт теоретической физики
ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт" НАН Украины

Содержание

1. Введение

Настоящая работа является продолжением начатого в е́е первой части [?] исследования нелинейной дрейфово-диссипативной структуры неоднородной замагниченной плазмы. Для выяснения нелинейного механизма стабилизации неустойчивых в линейной теории дрейфовых волн в первом разделе приведено исследование неустойчивых диссипативных структур с заданными модулями компонент волнового вектора. В такой системе когерентные волновые флуктуации логарифма плотности неустойчивых волн

$$\nu_1(\vec{r},t) = a_m(t)\exp\{i\theta_m\} + a_{\overline{m}}\exp\{i\theta_{\overline{m}}\} + a_{m'}(t)\exp\{i\theta_{m'}\} + a_{\overline{m}'}\exp\{i\theta_{\overline{m}'}\} + c.c.$$

включают четыре волновых слагаемых. К выписанным слагаемым добавляется ещ́е четыре комплексно сопряженных слагаемых, сокращенно обозначенных *c.c.* — complex conjugate. Укажем предварительно [1], что одна буква m обозначает тр́ехмерный волновой вектор $m = (m, n, k_x)$, штрих сверху указывает на то, что у k_x надо поставить знак минус, черта над буквой m — надо поставить минус перед продольной компонентой волнового числа n, штрих и черта — знак минус перед обеими компонентами. Фаза $\theta_m = -\omega_m t + my + nz + k_x x$, в остальных фазах $\theta_{\overline{m}}, \theta_{m'}$, и $\theta_{\overline{m}'}$ надо учесть перемены знаков у компонент волнового вектора. К выписанному разложению необходимо добавить слагаемые, являющиеся биениями неустойчивых волн, например, их вторые гармоники и нуль-частотные моды (законы сохранения волновых векторов, выражающие синхронизм фаз, представлены в формулах (2)).

В разделе 1 показано, что благодаря сильной нелинейной связи посредством нуль-частотной моды двух волн, неустойчивых в линейной теории, нелинейная структура с возбужд́енными нуль-частотными модами является неустойчивой. В разделе 2 исследована внутренняя и внешняя устойчивость доминирующей волны $m = (m, n, k_x)$ с $m > 0$ и $k_x > 0$, стабилизируемой второй гармоникой и кубичными ангармонизмами, а также обобщен принцип максимального инкремента для доминирующей волны, конкурирующей за "выживание" с другими неустойчивыми в линейной теории волнами. Приведены неравенства для исследования эффекта перестройки нелинейной дрейфово-диссипативной структуры [?]. Наконец, в последнем разделе проведены

[1] Подробные сведения об обозначениях волновых векторов с равными по модулю компонентами содержатся в формулах (1)

исследования аномального волнового транспорта частиц и электронной температуры плазмы, осуществляемого нелинейной дрейфово-диссипативной структурой. Решается вопрос об амбиполярности переноса плазмы. В изложении приводится редуцированная система уравнений двухкомпонентной гидродинамики, включающая возмущения электронной температуры. В начале каждого раздела излагаются его краткое содержание и основные результаты.

2. Неустойчивые нелинейные диссипативные структуры.

В настоящем разделе исследованы стационарные диссипативные нелинейные структуры, образованные комплексными триплетами волн. Нелинейные стационары (то есть решения с постоянными амплитудами) комплексных триплетов, состоящие из двух неустойчивых в линейной теории дрейфовых волн, бегущих в противоположных направлениях вдоль неоднородной координаты, и нуль-частотной моды, нефизичны, $|a^0_{\overline{m}'}|^2 < 0$. Тем не менее, проведено исследование устойчивости общего случая комплексного триплета. Показано, что нелинейный стационарный режим комплексного триплета с двумя неустойчивыми в линейной теории волнами и одной устойчивой является неустойчивым, и нелинейная система на нём не задерживается, а проходит его за время, равное половине среднего геометрического обратных инкрементов неустойчивых волн.

2.1. Амплитудные уравнения и их параметры.

Для исследования механизмов стабилизации нелинейной волны следует взять набор таких волн, частоты которых в линейной теории несильно разнятся. К таким волнам относятся высшие гармоники доминирующей волны, которые при малости их амплитуд дают малое отклонение от гармонического закона распространения доминирующей волны, а также волны с компонентами волнового вектора, равными по модулю компонентам волнового вектора доминирующей волны (частоты линейной теории не зависят от знака k_x и n, а инкременты не зависят от знаков всех трёх компонентов волнового вектора).

Возьмём простейший набор, состоящий из доминирующей волны, её второй гармоники, а также волны $\overline{m}' = (m, -n, -k_x)$, распространяющейся вдоль x и z навстречу направлению распространения доминирующей волны. Для краткости обозначения индексов у волновых амплитуд волновые векторы по-прежнему будем нумеровать с помощью их азимутальных компонент. В связи с этим используем обозначения:

$$\begin{aligned}
\pm m &= (\pm m, \pm n, \pm k_x), \qquad \overline{m} = (m, -n, k_x), \qquad m' = (m, n, -k_x),\\
\overline{m}' &= (m, -n, -k_x), \qquad 2m = (2m, 2n, 2k_x), \qquad 2\overline{m}' = (2m, -2n, -2k_x),\\
0 &= (0, 2n, 2k_x), \qquad 0' = (0, 2n, -2k_x), \qquad \overline{0}' = -0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Нелинейные биения неустойчивых волн возбуждают волновые и неволновые степени свободы, например:

$$m + m = 2m, \quad 0 = m - \overline{m}', \quad \overline{m}' + \overline{m}' = 2\overline{m}', \quad m + \overline{m}' = 2m_{00} = (2m, 0, 0). \tag{2}$$

Эти равенства представляют собой законы сохранения по волновым векторам и приводят к системе связанных нелинейных амплитудных уравнений:

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_m a_m &= V(0, \overline{m}') a_0 a_{\overline{m}'} + V(2m, -m) a_{2m} a_{-m},\\
\widehat{D}_{\overline{m}'} a_{\overline{m}'} &= V(-0, m) a_{-0} a_m + V(2\overline{m}', -\overline{m}') a_{2\overline{m}'} a_{-\overline{m}'},\\
\widehat{D}_{2m} a_{2m} &= V(m, m) a_m^2, \qquad \widehat{D}_{2\overline{m}'} a_{2\overline{m}'} = V(\overline{m}', \overline{m}') a_{\overline{m}'}^2,\\
\widehat{D}_0 a_0 &= V(m, -\overline{m}') a_m a_{-\overline{m}'}; \qquad \widehat{D}_j = i \frac{\partial D_j}{\partial \omega_j} \frac{\partial}{\partial t} + D_j.
\end{aligned} \tag{3}$$

Кубичные по амплитуде слагаемые здесь ради краткости не выписываются. Эту систему уравнений надо дополнить комплексно сопряженными уравнениями.

В нелинейном стационарном режиме в системе уравнений (3) амплитуды постоянны, а нелинейные частоты, входящие в дисперсионные функции, точно удовлетворяют распадным условиям. Так как при взаимодействии двух дрейфовых волн и нуль-частотной моды распадные условия точно выполняются и в линейной теории, то дисперсионная функция нуль-частотных мод не содержит частоты линейной теории ($\omega_0^L = 0$), и оператор эволюции равен

$$\widehat{D}_0 = i \frac{\partial D_0}{\partial \omega_0} \frac{\partial}{\partial t} + D_0 \approx -4n^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_0 - \gamma_0 \right); \tag{4}$$

$$\gamma_0 = -b_{2k_x}(1 + t_i)\eta_{2k_x}; \qquad \widetilde{\eta}_{2k_x} = 4k_x^2 \eta (1 + p_\zeta / 4k_x^2). \tag{5}$$

Здесь вторыми производными по времени и квадратом нелинейной частоты пренебрегается в силу малости обратных характерных времён. Моды, для которых распадные условия не выполнены, в систему уравнений (3) не включены. К ним относится степень свободы с волновым вектором $2m_{00} = (2m, 0, 0) = m + \overline{m}'$, собственными частотами которой являются ионная дрейфовая и нулевая частоты.

В работе [?] рассматривается возбуждение поперечных конвективных ячеек с $k_z = Re\,\omega^L = 0$ при $b_\kappa = k_\perp^2 \rho_{ei}^2 \sim 1$ в результате распадного процесса $\vec{k} - \vec{k}_j = (m - j, 0, k_x - k_{xj})$. Нетрудно видеть, что для дрейфовых волн при $b_\kappa \ll 1$ в случае дискретного, по "азимутальному" волновому числу, набора волн распадное условие не может быть выполнено по частоте. Но именно такая ситуация и рассмотрена в настоящей работе.

В системе амплитудных уравнений (3) представлены только две неустойчивые волны, бегущие, как отмечалось выше, в противоположных направлениях по x и z. Одновремённое включение всех четырёх неустойчивых волн $m, \overline{m}'$, и $m' = (m, n, -k_x), \overline{m} = (m, -n, k_x)$ приведёт к гораздо большему числу уравнений (см. замечания в абзаце после формул (9)).

Предположив, что в системе уравнений (3) амплитуды всех степеней свободы постоянны, амплитуды и частоты неустойчивых в линейной теории волн находим в стационарном режиме из следующей системы уравнений:

$$D_m a_m^0 = a_m^0 \left(W_{mm} \left| a_m^0 \right|^2 + W_{m\overline{m}'} \left| a_{\overline{m}'}^0 \right|^2 \right); \tag{6}$$

$$D_{\overline{m}'} a_{\overline{m}'}^0 = a_{\overline{m}'}^0 \left(W_{\overline{m}'m} \left| a_m^0 \right|^2 + W_{\overline{m}'\overline{m}'} \left| a_{\overline{m}'}^0 \right|^2 \right); \tag{7}$$

Здесь коэффициенты нелинейного самовоздействия $W_{mm}, W_{\overline{m}'\overline{m}'}$ и нелинейного взаимодействия через нуль-частотные моды $W_{m\overline{m}'}, W_{\overline{m}'m}$, из которых приведём только два коэффициента, выражаются через нелинейные матричные элементы и дисперсионные функции;

$$W_{mm} = \frac{V(m,m)V(2m,-m)}{D_{2m}} + S_{mm}; \quad W_{m\overline{m}'} = \frac{V(m,-\overline{m}')V(\overline{m}',0)}{D_0}. \tag{8}$$

Так как коэффициенты нелинейного самовоздействия W_{mm}, $W_{\overline{m}'\overline{m}'} \sim (b_\kappa, b_\kappa \eta_\kappa)$, [2] то в первом приближении по малому параметру в уравнениях (6), (7) необходимо пренебречь этими членами, оставив перекрёстные, $W_{m\overline{m}'} \sim b^0 \sim 1$. Это означает, что в системе уравнений (3) амплитуды неустойчивых волн должны стабилизоваться затухающими нуль-частотными модами, удовлетворяющими уравнениям комплексного триплета:

$$\begin{gathered} \widehat{D}_m a_m = V(0,\overline{m}') a_0 a_{\overline{m}'}, \qquad \widehat{D}_{\overline{m}'} a_{\overline{m}'} = V(-0,m) a_{-0} a_m, \\ \widehat{D}_0 a_0 = V(m,-\overline{m}') a_m a_{-\overline{m}'}, \end{gathered} \tag{9}$$

которые надо дополнить комплексно сопряжёнными уравнениями.

Аналогичным образом набор неустойчивых волн с заданными по модулю компонентами волнового вектора, то есть набор связанных волн $m, \overline{m}'$ и $\overline{m}, m'$ распадается на два несвязанных между собой комплексных триплета. Уравнениями для одного из служат уравнения (9), а уравнения другого триплета получаются из (9) заменой $n \to -n$.

Исследование несвязанных триплетов, очевидно, совпадает с исследованием одного изолированного триплета. Кроме того, если существует и устойчив стационар изолированного триплета, то такой же вывод следует и для стационара двух триплетов. Таким образом, необходимо провести исследование стационарного режима и устойчивости триплета, состоящего из двух неустойчивых волн и затухающей в линейной теории нуль-частотной моды, возбуждаемой биениями этих неустойчивых волн.

2.2. Неустойчивость стационарного режима с возбуждёнными нуль-частотными модами.

Стационарные значения амплитуд, неустойчивых в линейной теории волн для триплета (9), определяются из системы уравнений (6), (7) в пренебрежении самовоздействием волн через высшие гармоники и в приближении малой надпороговости, $d'_m \sim b_\kappa \sim \varepsilon$, $|D_m| \sim \varepsilon^2$. Здесь ε — малый параметр, отражающий степень предполагаемой малости тех или иных физических величин и широко используемый при построении нелинейной теории и нахождении нелинейных решений. Отсюда квадраты амплитуд оцениваются как величины $\sim \varepsilon^2$, а частоты ω_m и $\omega_{\overline{m}'}$, с точностью до b_κ включительно, — формулами линейной теории. Используя значения матричных элементов (61), (63) и дисперсионных функций (50), (51) приведенных в первой части

[2] Нелинейные матричные элементы $V(m, j)$ и коэффициент кубичного нелинейного самовоздействия S_{mm} вычислены в работе [?].

работы [?], а также дисперсионной функции, следующей из выражения (4), получаем два вещественных уравнения для частоты и амплитуды, из которых привед́ем только уравнение для амплитуды:

$$\gamma_{\overline{m}'} - (mk_1^2/k_x)2(k_1^2+2k_\perp^2)|a_m^0|^2/\eta_{2k_x} = 0, \tag{10}$$

где $\gamma_{\overline{m}'} = \gamma_m$ — инкремент линейной теории. Влиянием поперечного трения пренебрегаем.

Из этого уравнения находится значение квадрата амплитуды

$$\left|a_m^0\right|^2 = \gamma_m \eta k_x \left/ \left(2mk_1^2(k_1^2+2k_\perp^2)\right)\right.; \quad k_1^2 \equiv k_x^2 - m^2, \quad k_\perp^2 = k_x^2 + m^2. \tag{11}$$

Условие положительности квадрата модуля амплитуды состоит в выполнении неравенства $mk_1^2/k_x > 0$. Квадрат модуля амплитуды волны $|a_{\overline{m}'}^0|^2$ получается из формулы (11) заменой $k_x \to -k_x, n \to -n$, что приводит к противоположному неравенству $m(k_x^2-m^2)/k_x < 0$. Полученная система неравенств является несовместной. Таким образом, стационарный режим из двух волн, бегущих в противоположных направлениях по x и z, является нефизическим вследствие отрицательности квадрата модуля амплитуды одной из волн.

Исследуем устойчивость стационарного режима комплексного триплета в общем виде с положительными квадратами модулей амплитуд. Преобразованием растяжения для амплитуд получаем уравнения для триплета с единичными матричными элементами и единичными по модулю амплитудами в стационаре. Линеаризуем эту систему уравнений вблизи стационара. В результате, приходим к полиному устойчивости

$$(\varepsilon_{0,m}\delta_{-\overline{m}'} - \delta_m\delta_{-0})(\varepsilon_{-0,\overline{m}'}\delta_{-m} - \delta_{-\overline{m}'}) = (\varepsilon_{0,m} + \varepsilon_{-0,-m})(\varepsilon_{0,-\overline{m}'} + \varepsilon_{-0,\overline{m}'}), \tag{12}$$

где использованы обозначения

$$\varepsilon_{j,l} = \delta_j\delta_l - 1; \qquad \delta_j \equiv \delta_j(p) = c_jp + 1; \qquad c_j^{-1} = -\gamma_j + i\beta_j;$$

γ_j — инкремент (декремент) волны j в линейной теории, β_j — нелинейный сдвиг частоты.

Уравнение (12) является уравнением шестой степени относительно показателя p, коэффициенты которого при нулевой и первой степени равны нулю. Это означает наличие у полинома двухкратного нулевого корня, который соответствует нейтральной устойчивости возмущений, выбранных вдоль двумерного стационарного многообразия. Остальные корни полинома устойчивости отыскиваем в предположении малой надкритичности: $\beta_m \sim \gamma_m \sim \gamma_{\overline{m}'} \sim \varepsilon^2$; $\gamma_0 \sim \beta_0 \sim \varepsilon$. Полагая, что корни имеют первый порядок малости, $p \sim \varepsilon$, и оценивая порядки величин коэффициентов в уравнении (12), находим из него два устойчивых корня $p_{1,2} = \gamma_0 \pm \beta_0$ $(\gamma_0 < 0)$. Для корней второго порядка малости после пренебрежений малыми членами получаем уравнение $p^2 = 4\gamma_m\gamma_{\overline{m}'}$, откуда $p_{3,4} = \pm 2\gamma_m$. Один из этих корней неустойчив и равен удвоенному инкременту линейной теории. Отсюда следует, что время пребывания системы вблизи нелинейного стационара является величиной порядка обратного инкремента линейной теории.

Такие же выражения для корней полинома устойчивости можно найти при других порядках величины его коэффициентов: $\gamma_m \sim \varepsilon, \gamma_0 \sim \varepsilon^0 \sim 1$, то есть при использовании только малой надпороговости неустойчивых волн.

Таким образом, в решении для двух несвязанных комплексных триплетов нуль-частотные моды не могут стабилизовать неустойчивость линейной теории при физически допустимых значениях амплитуд. Если бы стабилизация наступила, то полученный стационарный режим был бы неустойчивым как стационар триплета, включающего две неустойчивые в линейной теории волны. Такой вывод для двух близких к порогу неустойчивости волн является следствием их сильной связи через нуль-частотную моду по сравнению с собственными стабилизирующими членами. Эволюция, которую претерпевает система тр́ех волн, приводит к исчезновению одной из неустойчивых волн и нуль- частотной моды, амплитуды которых стремятся к нулю. Другая волна оста́ется вместе со своими высшими гармониками, которые исчезнуть не могут и которыми в предыдущем анализе пренебрегли вследствие малого вклада в уравнения для нахождения амплитуд (6), (7).

3. Внутренняя и внешняя устойчивость нелинейной диссипативной структуры.

Дрейфово-диссипативная структура в неоднородной плазме, состоящая из набора низкочастотных дрейфовых диссипативных волн, характеризуется некоторыми внутренними и внешними свойствами, обеспечивающими е́е существование. В стационарном состоянии с не зависящими от времени амплитудами волн имеется баланс между напуском плазмы и её утечкой. К свойствам структуры относится внутренняя и внешняя устойчивость стационарного режима, а также эффект перестройки волн, приводящий к смене одной волновой структуры другой с изменением пространственного масштаба волн при изменении грубых параметров плазмы. Полученные условия устойчивости определяют как нелинейный механизм стабилизации неустойчивых в линейной теории волн, так и значения параметров волновых структур, например, значения волнового вектора доминирующей волны и эффективно используются при построении решений.

Исследуем устойчивость решения для стационарной нелинейной волны по отношению к малым отклонениям от стационара. Такое исследование разделяется, в результате расцепления линеаризованной системы уравнений на несвязанные подсистемы уравнений для возмущений, на исследование внутренней и внешней устойчивости. По терминологии работы [4], внутренней устойчивостью называется устойчивость по отношению к степеням свободы, определяющим стационарную амплитуду волны. [3] Устойчивость по отношению к остальным степеням свободы, не дающим вклад в нелинейную стабилизацию волны, представляет собой внешнюю устойчивость. Исследование внешней устойчивости приведено во второй части раздела.

3.1. Внутренняя устойчивость.

Система уравнений для комплексных амплитуд $a_1 = a_1(t)$ и $a_2 = a_2(t)$ двух нелинейно взаимодействующих волновых гармоник может быть записана в виде

$$\dot{a}_1 - d_1 a_1 = v_1 a_2 a_{-1} + s_1 a_1 |a_1|^2, \qquad \dot{a}_2 - d_2 a_2 = v_2 a_1^2, \tag{13}$$

в котором линейные коэффициенты определяются инкрементом (декрементом) нарастания (затухания) волн γ_j и нелинейными сдвижками частоты β_j

$$d_j = \gamma_j + i\beta_j, \quad \beta_1 = \omega_m - \omega_m^L, \quad \beta_2 = 2\beta_1 + \triangle\omega_2, \quad \triangle\omega_2 = 2\omega_m^L - \omega_{2m}^L, \tag{14}$$

где частоты с индексом L вверху являются частотами линейной теории. Стационарный режим определяет четыре неизвестные величины $|a_1|, |a_2|, \beta_1, \vartheta = \arg\ a_2 - 2\arg\ a_1$ через девять вещественных известных параметров из числа независимых комплексных коэффициентов системы уравнений (13) (комплексные d_1 и d_2 содержат три вещественных параметра γ_1, γ_2 и $\triangle\omega_2$). Эти четыре неизвестные величины находятся из системы уравнений:

$$-d_1 a_1^0 = v_1 a_2^0 a_{-1}^0 + s_1 a_1^0 |a_1^0|^2, \qquad -d_2 a_2^0 = v_2 {a_1^0}^2. \tag{15}$$

Линеаризуя систему уравнений (13) вблизи стационарного значения амплитуды при помощи подстановки $a_j(t) = a_j^0(1 + \eta_j(t))$ и используя решения уравнений (15) для исключения коэффициентов v_1 и v_2, при квадратичных нелинейностях, получаем уравнения, в которых исключены также разность фаз двух волновых гармоник $\vartheta^0 = \arg\ a_2^0 - 2\arg\ a_1^0$ и стационарная амплитуда второй гармоники a_2^0:

$$\dot{\eta}_1 - (d_1 + 2s_1|a_1^0|^2)\eta_1 = -d_1\eta_{-1} - \eta_2(d_1 + s_1|a_1^0|^2); \qquad \dot{\eta}_2 - d_2\eta_2 = -2d_2\eta_1. \tag{16}$$

К этой системе уравнений необходимо добавить линейно независимые уравнения для комплексно сопряжённых возмущений $\eta_{-j} = \eta_j^*;\ j = 1, 2$. Отыскивая решение в виде $\eta_j = \eta_j^0 \exp(pt)$, приходим к характеристическому уравнению с вещественными коэффициентами:

$$\prod_{j=1;-1} \left[\delta_{2j}(p)\widetilde{\delta}_j(p) - 2d_{2j}(d_j + s_j|a_1^0|^2)\right] = \left|\delta_2(p)d_1\right|^2, \tag{17}$$

где справа и слева стоят произведения комплексно сопряжённых величин и введены обозначения

$$\delta_j(p) = p - d_j; \qquad \widetilde{\delta}_j(p) = \delta_j(p) - 2s_j|a_1^0|^2. \tag{18}$$

Используя эти обозначения и соотношения (14), нетрудно расположить полином устойчивости по степеням неизвестного

$$p^4 - 2p^3(\gamma_1 + \gamma_2 + |a_1^0|^2 Re s_1) + p^2[|d_2|^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + 4|a_1^0|^2 Re(s_{-1}(d_1 + d_2 + \\ + |s_1 a_1^0|^2))] + 2p[\gamma_1|d_2|^2 + 2\gamma_2|d_1|^2 + 2|a_1^0|^2 Re(s_{-1}d_1d_2)] = 0, \tag{19}$$

[3] Исследование устойчивости нелинейных стационарных решений комплексных амплитудных уравнений, проведенное в работах [?], позволило автору этих работ обнаружить новые интересные эффекты в теории нелинейных колебаний и их применения в физике.

где коэффициент s_{-1} является комплексно сопряж́енным коэффициенту нелинейного кубичного самовоздействия волны s_1. В выписанном полиноме свободный член точно равен нулю. Это соответствует одному нулевому корню полинома устойчивости и нейтральной устойчивости вдоль траектории одномерного стационарного многообразия, находимого из уравнений (15) и представляющего собой двупериодический предельный цикл в четыр́ехмерном фазовом пространстве. Необходимым условием устойчивости по остальным тр́ем направлениям, ортогональным траектории предельного цикла, является положительность коэффициентов полинома (19). Эти условия не были выполнены работе Стикса [?] и полученное им стационарное решение с $\gamma_1+\gamma_2>0$ не обладает внутренней устойчивостью и в эксперименте не реализуется (в этой работе нелинейное кубичное самовоздействие не учитывалось). Необходимые и достаточные условия устойчивости представляются неравенствами для детерминантов матриц Гурвица в пространстве семи параметров. Запись этих неравенств громоздка и здесь не приводится. В предположении близости первой гармоники к порогу неустойчивости, $0<\gamma_1\ll 1$, корни полинома легко находятся по теории возмущений и в главном приближении равны [?]:

$$p_1=\gamma_2+i\beta_2, \qquad p_2=\gamma_2-i\beta_2, \qquad p_3=-2\gamma_1. \tag{20}$$

Эти корни удовлетворяет условиям устойчивости

$$\mathcal{R}e p_{1,2}=\gamma_2<0, \qquad \mathcal{R}e p_3=-2\gamma_1<0, \qquad \gamma_1+\gamma_2<0, \tag{21}$$

что следует из свойств изучаемой диссипативной структуры, в которой основная гармоника дрейфовой волны неустойчива в линейной теории с инкрементом $\gamma_m\sim\varepsilon^2$ или $\sim\varepsilon\ll 1$, а вторая гармоника устойчива с декрементом $\gamma_{2m}\sim\varepsilon$ или $\sim\varepsilon^0=1$. Таким образом, исследуемая нелинейная дрейфово-диссипативная структура обладает внутренней устойчивостью.

3.2. Внешняя устойчивость и эффект перестройки волн.

Исследуем распад волны со стационарным значением амплитуды $\overset{0}{a}_m\neq 0$ на волну j с компонентами волнового вектора (j,n_j,k_{xj}), близкую к порогу неустойчивости, $\gamma_j\sim\varepsilon^2,\varepsilon$ $(\beta_j=0)$, и на волну $(j-m)=(j-m,n_j-n,k_{xj}-k_x)$, которая не находится вблизи порога неустойчивости, $|\gamma_{j-m}|\sim\varepsilon,\varepsilon^0\sim 1,\gamma_{j-m}<0,\ \beta_{j-m}\neq 0$. Компоненты волнового вектора в модели плоского слоя, отражающей цилиндрическую либо тороидальную геометрию неоднородной области плазмы, приведены в принятой нами последовательности, отмечающей превалирующий вклад в дисперсию и линейный инкремент волны , а именно: "азимутальный" компонент, аксиальный (вдоль внешнего магнитного поля) и "радиальный" (вдоль градиента неоднородной плотности). Эта запись учитывает закон сохранения по волновым векторам $\vec{k}_j-\vec{k}_m=\vec{k}_{j-m}$. Предполагается также выполненным закон сохранения по частотам, $\omega_j-\omega_m=\omega_{j-m}$. Здесь в качестве частот двух неустойчивых волн j и m могут быть выбраны либо их пороговые значения, как в приведенных ниже исследованиях, либо их значения в нелинейном стационарном режиме, как в предыдущем разделе. Для двух волн с одинаковыми частотами $\omega_m=\omega_j$, что может выполняться, например, для двух различных дрейфовых волн с одинаковыми по модулю волновыми векторами, разностная частота равна нулю. Такой распад называют модифицированным, а степень свободы с волновым вектором $\vec{k}_{j-m}$ — нуль-частотной.

Линеаризованная система уравнений тр́ехволнового процесса, описывающая устойчивость доминирующей волны, стабилизируемой высшими гармоникам (в рассматриваемом случае — второй гармоникой и кубичными ангармонизмами доминирующей волны), имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{D}_j a_j(t)&=V(m,j-m)a_m^0a_{j-m}(t)+a_j(t)S_{jm}|a_m^0|^2,\\ \hat{D}_{j-m}a_{j-m}(t)&=V(j,-m)a_{-m}^0a_j(t).\end{aligned} \tag{22}$$

Как отмечалось, распадное условие по частоте считаем выполненным. Вкладом распада $m=-j+(m+j)$ пренебрегаем. Уравнение (22) приводит к полиному устойчивости

$$\left[D_j(p)-S_{jm}|a_m^0|^2\right]D_{j-m}(p)=V(m,j-m)V(j,-m)|a_m^0|^2, \tag{23}$$

где

$$D_j(p)=i\frac{\partial D_j}{\partial\omega_j}(p-\gamma_j), \qquad D_{j-m}(p)=i\frac{\partial D_{j-m}}{\partial\omega_{j-m}}p+D_{j-m};$$

$$i\frac{\partial D_l}{\partial\omega_l}\approx -n_l^2, \quad l=j;(j-m); \qquad D_{j-m}\approx-(n-n_j)^2(-\gamma_{j-m}-\beta_{j-m}).$$

При указанных порядках величин инкрементов и нелинейного коэффициента связи волн $|W_{jm}| \sim \varepsilon \ll 1$ (см. ниже), один корень этого полинома устойчив, $Re p_1 = \gamma_{j-m} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) < 0$, а реальная часть второго корня равна

$$Re p_2 = \gamma_j - \left|a_m^0\right|^2 Re W_{jm}, \qquad W_{jm} = \left(\frac{V(j,-m)V(m,j-m)}{D_{j-m}} + S_{jm}\right) n_j^{-2}. \tag{24}$$

Поскольку квадрат стационарной амплитуды доминирующей волны можно представить в виде $\left|a_m^0\right|^2 = \gamma_m \,/ Re W_{mm}$, где W_{mm} — коэффициент нелинейного самовоздействия волны, приходим к условию устойчивости доминирующей $m-$волны по отношению к возбуждению $j-$волны; [?]:

$$\frac{\gamma_m}{Re W_{mm}} > \frac{\gamma_j}{Re W_{jm}}. \tag{25}$$

Это условие, содержащее нелинейные коэффициенты, обобщает утверждение о том, что среди набора неустойчивых волн возбуждается волна с максимальным инкрементом. Среди волн с одинаковым инкрементом доминирует та $m-$волна, коэффициент нелинейного самовоздействия которой (характеризующий перекачку энергии в высшие затухающие гармоники и диссипацию на нелинейных ангармонизмах, например, кубичных) меньше коэффициентов нелинейной связи с остальными, недоминирующими $j-$волнами [?], [?]. Можно, в эвристическом плане, на неравенство (25) смотреть как на условие для выбора механизма стабилизации доминирующей волны. А именно, так как с левой стороны неравенства стоит квадрат модуля амплитуды доминирующей волны, составленный из отношения линейных дестабилизирующих факторов и нелинейных стабилизирующих, а справа — отношение дестабилизирующих факторов (в данном случае инкрементов линейной теории) подавляемых $j-$волн к коэффициентам нелинейной связи этих волн с доминирующей волной, то можно утверждать, что система выбирает тот нелинейный механизм стабилизации, который даёт бóльшую амплитуду доминирующей волны. По-иному можно сказать, что в ансамбле многих неустойчивых в линейной теории волн нелинейный режим с доминирующей волной может существовать благодаря сильной нелинейной связи этих волн. Приведенными замечаниями не исчерпывается содержание условий, подобных неравенству (25), [?]. Подробное исследование такого рода условий позволяет обнаружить своеобразную нелинейную дрейфово-диссипативную структуру, осуществляющую аномальный волновой перенос плазмы. Этому вопросу будут посвящены дальнейшие исследования. Сейчас же отметим, что волновая структура может претерпевать изменения в зависимости от значений внешних параметров плазмы, что в экспериментальной литературе отмечено как эффект перестройки волн [?] (wave transition [?]). Эффект перестройки волн выявляется при изучении в условии (25) зависимости волнового вектора доминирующей волны от внешних параметров плазмы.

3.3. Устойчивость по отношению к нуль-частотной моде.

Рассмотрим устойчивость $m-$доминирующей волны по отношению к возбуждению $\overline{m}'-$волны, бегущей вдоль неоднородной координаты в направлении, противоположном направлению распространения волны m. При этом полагаем $j = \overline{m}'$ и $(j-m) = -(0, 2n, 2k_x)$; $\beta_{j-m} = 0$. Так как матричный элемент $V(m,-0)$ велик, то коэффициент нелинейной связи $|W_{\overline{m}'m}| \sim \varepsilon^0 \sim 1$, и полученные выше выражения для корней непригодны. Необходимо обратиться к уравнению (23), в котором коэффициентом кубичного нелинейного взаимодействия волн $S_{\overline{m}'m} \sim \varepsilon \ll 1$ и инкрементом неустойчивой волны j следует пренебречь. В результате, получаем квадратное уравнение с комплексным свободным членом

$$p^2 - \gamma_0 p + c = 0, \qquad c = \left|a_m^0\right|^2 V(m,-0)V(\overline{m}',-m)\,/4\,n^2, \tag{26}$$

условия устойчивости которого состоят в выполнении неравенств $-\gamma_0 > 0$ и $\gamma_0^2 Re c > (Im c)^2$. Первое неравенство выполняется в силу отрицательности декремента нуль-частотных мод. Используем произведение матричных элементов, комплексно сопряжённых элементам (61), (63) (см. раздел 4 работы [?]), и значение декремента γ_0 и введём функцию устойчивости $F(h)$. Тогда второе условие устойчивости запишется в виде неравенства

$$\begin{gathered} \left|a_m^0\right|^2 b\eta N^2 < F(h)\left(1 + p_{\zeta k_x}/(3h^2+1)\right)/(1+ p_{\zeta\kappa})^2, \qquad h = k_x\,/m\,; \\ F(h) = 32h^5(h^2-1)(3h^2+1+p_{\zeta k_x})\,/(1+h^2)^4, \qquad p_{\zeta k_x} = p_\zeta\,/k_x^2\,. \end{gathered} \tag{27}$$

Квадрат модуля амплитуды $\left|a_m^0\right|^2$ и входящие в эти формулы безразмерные величины определены в первой части работы [?]. Фигурирующие здесь параметры приведены ниже после формул (35), (36).

Из неравенства (27) следует, что $F(h) > 0$. Таким образом, необходимым условием устойчивости является принадлежность к любому из интервалов $h > 1$ или $-1 < h < 0$. Фазовая скорость доминирующей волны вдоль неоднородной координаты $\omega_k/k_x = (\omega_m - m\psi'_{0x})/k_x = -(N + \psi'_{0x})/h$ направлена против градиента плотности (при $|\psi'_{0x} \ll |N|$), если $h > 0$, и по градиенту плотности, если $h < 0$. Условие $h > 0$ выполнялось бы в силу неравенства (27), если бы функция устойчивости не меняла знак при $|h| = 1$.

Асимметрия направлений распространения доминирующей волны вдоль неоднородной координаты достигается сильно асимметричными значениями функции $F(h)$ внутри интервалов $h > 1$ и $0 > h > -1$. В самом деле, квадрат амплитуды доминирующей волны слабо зависит от h и q_κ и оценивается как величина $|a_m^0|^2 \leq 0{,}1 d'_m$, где d'_m — параметр надкритичности. Функция $F(h)$ уже́ при $h = 1{,}1$ больше единицы, $F(h = 1{,}2) = 5{,}2$, а при $h = 1{,}3$ функция близка к 10 и монотонно возрастает с увеличением h. Подставляя выражение для квадрата амплитуды и значения $F(h) = 5 \div 10$ в неравенство (27), получаем следующие ограничения для параметров плазмы при $p_{\zeta\kappa} = 0$:

$$d'_m < 10F(h)b\eta N^2 = (50 \div 100)b\eta N^2, \tag{28}$$

где параметр надкритичности приблизительно равен $\max\{b_\kappa;\quad b_\kappa q_\kappa\}$ (обозначения см. в формулах (41) — (43)).

Таким образом, устойчивость бегущей против градиента плотности волны имеет место при условии $\min(y_e^{-1};\eta)N^2 > 0{,}1/F(h) = (2 \div 1)10^{-2}$ для $h \geq 1{,}2$. Для значений h внутри интервала $-1 < h < 0$ функция $F(h)$ мала, и неравенство (28) может не выполняться. Однако, если же условие устойчивости выполняется для некоторой волны с $h > 1$ и для другой волны со значениями h из интервала $0 > h > -1$, то какая из этих волн станет доминирующей, зависит от предыстории системы, а именно, начального условия, из которого эволюционирует доминирующая волна. Экспериментальные значения $h = 1{,}1 \div 1{,}2$ несколько больше единицы [?].

В заключение, отметим, что результатом действия большой нелинейности в матричном элементе $V(m, -0)$ является относительно большой порядок величины устойчивых корней, $p_{1,2} \sim \varepsilon$, несмотря на то, что в системе имеются два характерные масштаба обратных врем́ен эволюции амплитуд $|\gamma_0| \sim \varepsilon$ и $\gamma_{\overline{m}'} \sim \varepsilon^2$. Следовательно, нелинейное затухание волны $\overline{m}'$ происходит за время более быстрое, чем нарастание вследствие неустойчивости в линейной теории. Вместе с этой затухающей волной исчезает и нуль-частотная мода.

4. Аномальная волновая конвекция плазмы и электронной температуры.

В настоящем разделе на основе развитого обобщения асимптотического разложения нелинейной механики проведено вычисление аномальной волновой конвекции плазмы вдоль градиента неоднородной плотности. Показано, что коэффициент аномальной конвекции значительно превышает коэффициент классической диффузии и в результате эффекта перестройки волн зависит осциллирующим образом от напряженности удерживающего магнитного поля. Реш́ен вопрос об амбиполярности конвекции плазмы. Амбиполярность устанавливается при появления вторичного течения, представляющего собой "азимутальный" дрейф в скрещенных магнитном поле и направленном вдоль неоднородной координаты электрическом поле.

В построенной нелинейной теории, как видно из проведенного исследования, инкременты неустойчивых в линейной теории волн значительно меньше декрементов устойчивых волн. Диссипативная по происхождению разность (рассогласовка) фаз между когерентными осцилляциями нормальных колебаний и осцилляциями потенциала и температуры значительно больше отношения инкрементов неустойчивых волн к их частоте. Предложенное в работе [?] обобщение разложения нелинейной механики учитывает это различие диссипативных масштабов и состоит во включении в нормальные функции диссипативных членов, которые определяют разность фаз между колебаниями плотности и потенциала, с одной стороны, и колебаниями токовой функции и электронной температуры, с другой стороны. Это позволяет найти волновую конвекцию плазмы и электронной температуры (при уч́ете температурных возмущений) вдоль неоднородной координаты.

4.1. Уравнения и соотношения с температурными возмущениями.

Для полноты физической картины в настоящем разделе приводятся и обсуждаются результаты как для волновой конвекции плазмы, так и конвекции электронной температуры. Нелинейная теория дрейфово-диссипативной структуры, включающей температурные возмущения, требует отдельного рассмотрения и будет изложена в третьей части настоящей работы. Здесь выпишем систему уравнений, следующих из уравнений двухкомпонентной гидродинамики и описывающих дрейфово-диссипативную структуру при контролируемых пренебрежениях в ней:

$$\partial_t\widetilde{\nu} + \vec{v}_E \cdot \nabla_\perp \widetilde{\nu} + \exp(-\widetilde{\nu}) + \nabla_\perp \widetilde{n}(\vec{v}_{i2} + \vec{v_D}) = S; \tag{29}$$

$$-\nabla_\parallel \triangle_\perp a_\parallel = \nabla_\perp \widetilde{n}\vec{v}_{i2}; \qquad \nabla_\parallel \equiv \frac{\partial}{\partial z}; \tag{30}$$

$$\nabla_\parallel \left[\nabla_\parallel \left(\widetilde{\nu} + B\widetilde{\theta}_e\right) + \frac{1}{\widetilde{\mu}_e}\nabla_\parallel \widetilde{\psi} + \frac{\beta_k}{\widetilde{\mu}_e}(\partial_t + \vec{v}^e_\perp \nabla_\perp) a_\parallel\right] + \frac{\alpha_0 y_{e0}}{\widetilde{\mu}_e^{5/2}} \nabla_\perp \widetilde{n}\vec{v}_{i2} = 0; \tag{31}$$

$$\frac{3}{2}\left(\partial_t + \vec{v}_E \cdot \nabla_\perp\right)\widetilde{\theta}_e + \exp(-\widetilde{\nu})\left(-B\triangle_\perp \nabla_\parallel a_\parallel + \left(\triangle_\perp a_\parallel\right)\nabla_\parallel \widetilde{\nu}\right) = \tag{32}$$

$$= \chi^e_{\parallel 0} \exp\left(-\widetilde{\nu} + \frac{5}{2}\widetilde{\theta}_e\right)\left(\nabla^2_\parallel \widetilde{\theta}_e + \frac{7}{2}\left(\nabla_\parallel \widetilde{\theta}_e\right)^2\right). \tag{33}$$

Эта система уравнений получена из системы следующих пяти уравнений (104)—(108) [4]: два уравнения непрерывности для электронов и ионов, уравнения продольного движения и теплового баланса для электронов и, наконец, уравнения для продольного компонента векторного потенциала. В качестве первого уравнения (29) взято уравнение непрерывности ионов. Для получения второго уравнения (30) в разности двух уравнений непрерывности ионов и электронов была исключена расходимость продольного тока посредством уравнения для продольной компоненты векторного потенциала. Третье уравнение (31) получено также в результате преобразований трёх уравнений. В разности двух уравнений непрерывности расходимость продольного тока исключена посредством уравнения продольного движения электронов, предварительно продифференцированного по продольной координате. Четвёртое уравнение (32) взято в обычном виде для эволюции неравновесной температуры и исключена из него продольная токовая скорость с помощью уравнения для продольного компонента векторного потенциала , а также пренебрежено слагаемым с малой конвекцией тепла вдоль магнитного поля. Уравнения записаны для четырёх неизвестных безразмерных функций: логарифма плотности $\widetilde{\nu}(\vec{r},t) = \ln \widetilde{n}$, безразмерных электростатического потенциала $\widetilde{\psi}(\vec{r},t) = e_e\varphi/T_{e0}$, продольной компоненты векторного потенциала

$$a_\parallel(\vec{r},t) = A_\parallel(\vec{r},t) c k_{\parallel 0} k^2_{\perp 0}/(4\pi e_e n_{00}\omega_*)$$

и логарифма электронной температуры (в формулах используется и обозначение для относительной температуры) $\theta_e \equiv \ln \mu_e = \ln T^e/T_{e0}$. Здесь плотность электронов и ионов $\widetilde{n}$, температура электронов T^e, электростатический потенциал $\varphi = \varphi(\vec{r},t)$ и продольная компонента векторного потенциала $A_\parallel$ — размерные величины.

Поперечная безразмерная скорость ионов, для которой приведём только одну компоненту, используемую ниже для выяснения вопроса об амбиполярности конвекции плазмы, равна:

$$v^i_{2x} = -b\left\{\frac{d_i\xi'_x}{dt} - \left[(\eta^i_1\triangle_\perp\xi + 2\eta^i_3\xi''_{xy})'_x + (2\eta^i_1\xi''_{xy} - \eta^i_3\triangle_1\xi)'_y\right]/\widetilde{n}\right\};$$
$$\triangle_{\perp,1} = \partial^2/\partial x^2 \pm \partial^2/\partial y^2. \tag{34}$$

В первое, инерционное слагаемое в фигурных скобках этого выражения наряду со скоростью электрического дрейфа входит и скорость ларморовского дрейфа,

$$d_i/dt = \partial/\partial t + (\vec{v}_E + \vec{v}^i_L)\nabla_\perp.$$

Напомним, что при переходе к безразмерным переменным в качестве характерного времени выступала величина $2\pi/\omega_*$, где $\omega_* = cT_{e0}k^2_{\perp 0}/eH_0$ — характерная градиентная частота; в качестве характерных пространственных масштабов приняты поперечный $L_\perp = 2\pi/k_{\perp 0}$ и продольный $L_\parallel = 2\pi/k_{\parallel 0}$ размеры плазмы. Приведем для справок входящие в систему уравнений слагаемые, представляющие собой вклад в уравнение непрерывности поперечных электрического дрейфа, ионной инерции и поперечной столкновительной вязкости ионов

$$\vec{v}_E = \widetilde{\psi}'_y\partial_x - \widetilde{\psi}'_x\partial_y;$$
$$\nabla_\perp\widetilde{n}\vec{v}_{i2} = -b\left\{\nabla_\perp(\widetilde{n}d_\perp(\nabla_\perp\xi)/dt) - \eta_0\left[\triangle_1(\widetilde{n}^2\triangle_1\xi) + 4(\widetilde{n}^2\xi''_{xy})''_{xy}\right]\right\},$$
$$d_\perp/dt = \partial_t + \psi'_y\partial_x - \psi'_x\partial_y; \qquad \eta_0 = 0{,}3t_i/(\omega_{Hi}\tau_{ii0}).$$
$$\nabla_\perp\widetilde{n}\vec{v}_D = -\nabla_\perp\frac{1}{\omega_{He}\tau_{ei}}\left(\nabla_\perp\pi - \frac{3}{2}\widetilde{n}\nabla_\perp\mu_e\right). \tag{35}$$

[4]См. приложение к первой части настоящей работы [?].

В системе уравнений и обозначениях к ней введены следующие величины и параметры: параметр продольного трения $y_e = \alpha_0 y_{e0} \exp\nu_0 = \nu_{ei}\omega_* m_e/k_\parallel^2 T_{e0}$, (через этот же параметр выражается продольная электронная температуропроводность $\chi_\parallel = \gamma_0^e \exp(-\nu_0)/y_{e0} = \gamma/y_e$; $\alpha_0 = 0{,}51$, $\gamma_0^e = 3{,}16$, $\gamma = \gamma_0^e \cdot \alpha_0 = 1{,}61$); параметр поперечной ионной инерции $b = k_{\perp 0}^2 \rho_{ie}^2$, где $\rho_{ie}^2 = T_{e0} m_i/e^2 H_0^2$ — квадрат ларморовского радиуса ионов, рассчитанного по электронной температуре; $\eta = \eta_0 \exp\nu_0 = 0,3 t_i/\omega_{Hi}\tau_{ii}$ — параметр поперечной ионной столкновительной вязкости с гирочастотой ионов ω_{Hi}, частотой ионно-ионных соударений τ_{ii} и отношением невозмущенных температур ионов и электронов $t_i = T_{i0}/T_{e0}$; $\pi = (p_e + p_i)/n_0 T_{e0}$ — безразмерное давление электронов и ионов плазмы; и, наконец, $\beta_k = \beta k_{\perp 0}^2/k_{\parallel 0}^2$ — параметр, учитывающий конечное электронное давление, $\beta = 4\pi n_0 T_{e0}/H_0^2$; $\nu_0 = \nu_0(x)$ — логарифм неоднородной плотности. Числовая константа $B = 1 + \beta_0 = 1{,}71$ составлена из вклада электронного давления и термосилы, пропорциональной $\beta_0 = 0{,}71$.

Для выяснения характера зависимости коэффициентов конвекции от параметров плазмы и параметров доминирующей волны вычислим усредненный по периоду волны поток плазмы. Определяя коэффициент конвекции как отношение среднего (по периоду) потока плазмы к градиенту невозмущенной плотности плазмы, легко выражаем его через безразмерные параметры

$$\begin{aligned} D_{conv} &= -\left\langle \widetilde{n} V_x /(d\, n_0/dX) \right\rangle = -D \left\langle (\exp\nu)(v_{1x} + v_{2x}^i) \right\rangle / N\ ; \\ D &= \frac{cT_{0e}}{eH_0}; \quad \widetilde{n} = n_{00} \exp\widetilde{\nu}(\vec{r},t), \quad \widetilde{\nu} = \nu_0(x,t) + \nu_1(\vec{r},t). \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь V_x и $X = xL\perp/2\pi$ — размерные скорость и координата, $N = d\ln n_0(x)/dx < 0$ — безразмерный градиент логарифма плотности. Размерная плотность равна $\widetilde{n}(\vec{r},t) = n_0(x)[\exp\nu_1(\vec{r},t)]$. Скорости v_{1x} и v_{2x}^i выражаются через токовую функцию ξ и ν. В формуле (36) первое слагаемое для электронов и ионов одинаково и вычисленный по нему коэффициент конвекции является амбиполярным. Второе слагаемое существенно только для потока ионов. Устранение предоставляемой им возможности отклонения от амбиполярности конвекции опишем ниже.

Согласно вычислениям, приводимым аналогично первой части работы [?], из системы уравнений (29) – (32) в линейном приближении нормальная функция ξ_κ с учётом температурных возмущений равна одному из следующих выражений:

$$\xi_\kappa^{(1)} = a_\kappa \frac{(1 + t_i)}{1 - i b_\kappa \omega_\kappa \eta_B y_e/n^2} = \frac{\omega_m + t_i \omega_{ne}}{\omega_{ne} - b_\kappa \omega_\kappa} a_\kappa, \tag{37}$$

$$\omega_\kappa = \omega_m + i\eta_\kappa, \quad \eta_B = 1 + i\frac{\beta_k}{y_e k_\perp^2}(\omega_m - \omega_{ne}) + i\frac{n^2 B^2}{\omega_\theta y_e}, \quad \omega_\theta = \frac{3}{2}\omega_m + i n^2 \chi_\parallel.$$

Частота $\omega_m = \omega_{\vec{k}} + m\psi_{0x}'$ вбирает в себя допплеровский сдвиг из-за азимутального электрического дрейфа. Второе из выражений (37) получено из уравнения непрерывности ионов и используется для исключения нормальной функции ξ_κ при выводе основного нелинейного уравнения для волн. Первое выражение получено из остальных уравнений системы (30) — (32) после разложения искомого решения по полной ортогональной системе функций (аналогично процедуре, изложенной в работе [?]) путём исключения нормальных функций температуры и векторного потенциала. Правое равенство в формуле (37) приближённое и выражает равенство дисперсионной функции нулю, то есть тот факт, что неустойчивые волны находятся вблизи порога неустойчивости. Это равенство можно сделать точным в смысле используемого асимптотического разложения, включив нелинейные члены, а именно:

$$\xi_\kappa = \frac{(1 + t_i)a_\kappa + N_{2,3,4}(\kappa)/n^2}{1 - i b_\kappa \omega_\kappa \eta_B y_e/n^2} = \frac{(\omega_m + t_i\omega_{ne})a_\kappa - iN_1(\kappa)}{\omega_{ne} - b_\kappa \omega_\kappa}, \tag{38}$$

где $N_1(\kappa)$ — нелинейные члены уравнения непрерывности для ионов, а $N_{2,3,4}(\kappa) = N_3 + in^2 B(BN_2/k_\perp^2 + N_4)/\omega_\theta$; N_2, N_3, N_4 — нелинейные члены уравнений (30) — (32) с преобразованиями, выполненными согласно разработанной в [?] регуляризации теории возмущений. (Обозначения в формулах традиционные и приведены выше.) Тогда правое равенство в формуле (38) представляет собой основное нелинейное уравнение для волн. Но очевидно, что главными членами разложения при отыскании нормальной функции остаются линейные слагаемые, поэтому для нормальной функции $\xi_\kappa^{(1)}$ необходимо пользоваться одним из выражений (37), из которых выберем первое выражение, позволяющее оценить роль электронно-ионного трения и продольной теплопроводности, а также влияние температурных возмущений и непотенциальности колебаний.

Без подробных обсуждений приведём здесь выражение для нормальной функции возмущений электронной температуры

$$\theta_\kappa^{(1)} = -\omega_\theta^{-1}\left(Bb_\kappa\omega_\kappa - \frac{3}{2}t_i\omega_{Te}\right)\xi_\kappa^{(1)}, \omega_{T_e} = -m\frac{d}{dx}\ln T_{e0}(x). \tag{39}$$

4.2. Амбиполярная волновая конвекция плазмы.

Подставляя скорость первого приближения $v_{1x} = -\xi'_y$ в формулу (36) в виде разложения по сумме волн, с точностью до слагаемых, квадратичных по амплитуде нелинейной доминирующей волны, получаем

$$D_{conv} = D(2m/N) \left|a_m^0\right|^2 Im \left(\xi_\kappa^{(1)} / a_\kappa\right),$$

где m — азимутальная компонента волнового вектора. Мнимую часть нормальной функции находим из первого равенства (37)

$$Im \left(\xi_\kappa^{(1)} / a_\kappa\right) = (1 + t_i) b_\kappa r y_N \left[1 + \frac{B^2(\gamma - \frac{3}{2} q_\kappa)}{\frac{9}{4} y_N^2 r^2 + \gamma^2}\right] = \left|\frac{\xi_\kappa^{(1)}}{a_\kappa}\right| \sin \Delta\vartheta_\kappa. \tag{40}$$

Здесь частично использованы обозначения для безразмерных параметров, вводимые при исследовании линейной пороговой и нелинейной теорий:

$$r = \frac{\omega_m}{\omega_{ne}}, \quad y_N = \frac{y_e \omega_{ne}}{n^2}, \quad g = \frac{\omega_{ne}}{\eta_\kappa}, \quad q_\kappa = \frac{y_e \eta_\kappa}{n^2}, \quad p_N = \frac{y_e \omega_{ne}^2}{n^2 \eta_\kappa}, \tag{41}$$

$$b_\kappa = K_\perp^2 T_{e0} / (m_i \omega_{Hi}^2), \tag{42}$$

$$q_\kappa = 0{,}15 (\nu_{ei} \nu_{ii} / \omega_{Hi} \omega_{He}) t_i (K_\perp^2 / K_z^2) \equiv \lambda_{ei} b_\kappa. \tag{43}$$

Равенство (40) написано с точностью до членов, линейных по $b_\kappa \ll 1$. Комбинированный параметр плотности и магнитного поля q_κ может быть произвольным.

Окончательно, для коэффициента амбиполярной аномальной волновой конвекции получаем выражение [?]

$$D_{conv} = \frac{cT_{e0}}{eH_0} 2mry_\kappa b_\kappa (1 + t_i) \left|a_m^0\right|^2 \left[1 + \frac{B^2(\gamma - \frac{3}{2} q_\kappa)}{9 y_N r^2/4 + \gamma^2}\right], \qquad y_\kappa = \frac{y_e m}{n^2}, \tag{44}$$

где $|a_m^0|^2$ — квадрат амплитуды доминирующей волны, найденный без температурных возмущений в части первой (79) и исследуемый с температурными и непотенциальными возмущениями в части третьей, и вводится обозначение для параметра y_κ.

Остальные обозначения приведены выше. Для сравнения привед́ем классический коэффициент диффузии плазмы

$$D_{cl} = D(1 + t_i) / (\omega_{He}\, \tau_{ei}), \tag{45}$$

который обратно пропорционален квадрату магнитного поля.

Прежде чем обсуждать эти результаты, выясним вопрос об амбиполярности конвекции. Для этого провед́ем вычисление среднего по времени потока от ионной скорости второго приближения v_{2x}^i, задаваемого формулой (34). Решение для добавки к невозмущ́енному логарифму плотности ν и функции тока ξ получено в виде бегущей доминирующей волны: [5], [6]

$$\nu_1 = 2|a_m| \cos \vartheta_\kappa, \quad \xi_1 = 2|a_m| \cos(\vartheta_\kappa + \Delta\vartheta_\kappa), \quad \vartheta_\kappa = -\omega_k t + my + nz + k_x(x). \tag{46}$$

В выражении для токовой функции $\Delta\vartheta_\kappa$ является находимой из нормальной функции (37) поправкой к фазе, синус которой пропорционален мнимой части этой нормальной функции (40). Членами, пропорциональными b_κ^2, пренебрегаем как в выражениях (40), так и всюду далее. В частности, волновое слагаемое от столкновительной вязкости в формуле (34) да́ет такой же, по порядку величины, пренебрежимый вклад. Однако, слагаемое, связанное с ионной инерцией

$$v_{2x}^i = -b \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi'_{0x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \xi'_x,$$

приводит к конвективному потоку ионов. Усредн́енный по периоду волны, он равен

$$\left\langle \widetilde{n} v_x^{(2)} \right\rangle = b \omega_\xi k_x \left|a_m^0\right|^2 8 n_0(x) \cos \Delta\vartheta_\kappa \tag{47}$$

и определяет коэффициент конвекции, сравнимый с выражением (44) ($\widetilde{n}, n_0(x)$ — размерные). Причина появления этого потока связана с характером решения для доминирующей волны, как волны бегущей вдоль x.

[5] Вторую гармонику не учитываем ввиду малости е́е амплитуды.

[6] Зависимость k_x от x слабая , как от "медленной" координаты.

Появление ионной конвекции, отличающейся от электронной, в силу неразрывности тока в плазме, может привести к выводу о существовании токов в плазме, разрешающем полученный парадокс. В связи с этим вспомним, что классическая диффузия ионов и электронов, вычисленная с точностью до членов, обратно пропорциональных четв́ертой степени магнитного поля, также неамбиполярна, так как ионная вязкость да́ет вклад в диффузию, а электронной пренебрегается. В этом случае вдоль магнитного поля могут течь электронные токи, которые замыкаются с поперечными ионными токами через проводящий цилиндрический кожух. На такую возможность в слабо ионизованной плазме указал А. Саймон в работе [?] по интерпретации повышенного ухода плазмы в экспериментах с газовыми разрядами. Ламинарное течение в этом случае двумерное, и соответствующая задача решена только в линейном приближении, хотя уравнения в этом случае существенно нелинейные [?].

В Q-машинах, где проведены тщательные измерения повышенного ухода плазмы при возбуждении дрейфово-диссипативной неустойчивости, были предприняты специальные меры, чтобы избежать эффекта замыкания токов. А именно, при диаметре плазменного столба 1,5 — 4 см диаметр внешнего кожуха составлял 80 см, так что радиальный ионный ток вне плазменного столба течь не мог. Таким образом, в Q-машинах реализовался амбиполярный характер поперечного переноса плазмы.

Парадокса не наступает, так как достаточно обратиться к уравнению неразрывности тока (31), в котором продольная расходимость тока исключена с помощью уравнения продольного движения электронов. Усреднив его по периоду дрейфовой волны, считаем, что уравнение для медленно меняющихся величин одномерно по x и не зависит от z и y . Кроме расходимости потока (47), необходимо учесть классические ламинарные члены от ионной вязкости и ионной инерции, если хотим учитывать медленную эволюцию фоновых величин. В результате, получаем:

$$0 = [(\nu_0 + B\theta_0)'_z + {\psi_0}'_z]'_z =$$

$$= -\frac{y_{e0} b}{\mu_0^{5/2}} \left[\frac{\partial n_0}{\partial x} \omega_\xi \left| a_m \right|^2 8 k_x cos\Delta\vartheta_\kappa - \frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) + \eta_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(n_0^2 \xi''_{0xx} \right) \right]. \tag{48}$$

При этом реализуется возможность амбиполярной конвекции за сч́ет перестройки "азимутального" дрейфового движения электронов и ионов при изменении $\xi_0(x,t)$.

Аналогичные решения вопроса об амбиполярности классической диффузии в неоднородной плазме предложены в работах по магнитному удержанию [?], [?], [?]. В самом деле, уравнение (48) необходимо дополнить уравнением непрерывности электронов и ионов для $n_0(x,t)$ с вычисленным выше коэффициентом аномальной конвекции (44) и коэффициентом диффузии (45)

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_{conv} + D_{cl} \right) \frac{\partial n_0}{\partial x} \right] = S. \tag{49}$$

В этом уравнении отсутствует фоновая, медленно меняющаяся в зависимости от пространственной и временно́й переменных, функция тока $\xi_0(x,t)$, а также добавлен источник, чтобы уравнение обладало неоднородным (зависящим от x) стационарным решением. В этих условиях уравнение (48) также имеет стационарное решение для токовой функции, нахождением которого заниматься здесь не будем. Однако укажем, что стационарные значения токовой функции устанавливаются за более быстрые времена, чем стационарные значения плотности $n_0(x)$ (в $1/b_\kappa \gg 1$ раз быстрее). Неоднородная плотность, в свою очередь, эволюционирует к стационарному состоянию (либо к равновесному состоянию — без источника в уравнении (49) при однородных граничных условиях) быстрее, чем в случае классической диффузии, вследствие повышенной аномальной волновой конвекции.

Таким образом, как и в случае классической диффузии плазмы посредством парных столкновений электронов и ионов неоднородной плазмы, помещ́енной в магнитное поле [?], [?], величина "радиального" электрического поля и скоростей "азимутального" дрейфа плазмы в теории аномальной волновой конвекции, дополненной классической диффузией, "не является задаваемым извне параметром, а определяется самим процессом диффузии" [?] и конвекции и решает вопрос об амбиполярности переноса плазмы.

4.3. Конвекция температуры и обсуждение результатов.

Как известно, вопрос об амбиполярности переноса ионного и электронного тепла не возникает. Поперечный перенос ионного тепла осуществляется поперечной классической теплопроводностью. Однако на перенос электронного тепла существенно влияют дрейфовые диссипативные волны, и в этом влиянии имеются свои особенности, не свойственные аномальной конвекции плазмы.

Конвекция электронного тепла происходит вместе с переносом плазмы, а также и вследствие аномальной температуропроводности, даже при отсутствии градиента температуры. Аномальная температуропроводность связана с потоком электронной температуры, переносимой температурными возмущениями дрейфовой волны. Усредняя по периоду волны поток температуры с возмущениями скорости электрического дрейфа и электронной температуры и подставляя полученное решение для доминирующей волны с нормальной функцией (39), получаем для потока электронной температуры следующее выражение:

$$Q_{_{Te,X}} = \langle V_{_{EX}} T_e \rangle_t = -2\frac{cT_{0e}}{eH_0} K_y \left| a_m^0 \right|^2 \left(T_{e0} + T_{i0} \right) Im\theta_{\kappa\xi} \left(1 + \mathcal{O}(b_\kappa) \right), \qquad (50)$$

где $Im\theta_{\kappa\xi}$ — диссипативная часть нормальной функции температурных возмущений по отношению к токовой функции

$$Im\theta_{\kappa\xi} = Bb_\kappa y_N \frac{\gamma - 3q_\kappa/2}{\left(3ry_N/2\right)^2 + \gamma^2}; \qquad y_N = -y_e\frac{mN}{n^2}. \qquad (51)$$

Отсюда видно, что когда температурные возмущения дестабилизируют волну, $q_\kappa < 2\gamma/3$, поток электронной температуры направлен внутрь плазмы. В противоположном случае — наружу плазмы. Такой результат несколько неожидан. Однако он не может считаться парадоксальным. Наша задача решена для весьма малого градиента электронной температуры. В Q-машине предпринимаются специальные меры для выравнивания температуры на торцах плазменного столба.

Физическое объяснение полученного результата состоит в следующем. Согласно формуле (39) реактивная часть осцилляций электронной температуры находится в противофазе с осцилляциями токовой функции и плотности частиц (с точностью до членов порядка b_κ включительно). Диссипации электронной температуры (продольная температуропроводность) приводит к совпадению знаков диссипативной поправки к фазе осцилляций температуры по отношению к осцилляциям токовой функции, а значит, и осцилляциям плотности. В силу связи $\psi_\kappa = -a_\kappa(1+\mathcal{O}(b_\kappa))$, диссипативная часть фазы потенциала отстаёт от фазы возмущений температуры. Это и приводит при $q_\kappa < 2\gamma/3$ к потоку температуры, направленному внутрь плазмы. При противоположном соотношении $q_\kappa > 2\gamma/3$, согласно выражению (51), изменяется направление потока (50).

Отметим, что поток тепла внутрь плазмы за счёт аномальной температуропроводности меньше потока тепла, выносимого вместе с нагретыми электронами плазмы, то есть указанные потоки не компенсируются, и общий поток электронного тепла направлен против градиента плотности, наружу плазмы. Указанное свойство аномальной температуропроводности может быть использовано для увеличения термоизоляции электронов плазмы при помощи возбуждения дрейфово-диссипативной неустойчивости. Найденная волновая конвекция электронной температуры имеет аналогию с теплопереносом в теории ионно-звуковой турбулентности В.П. Силина с сотрудниками [?], в которой предсказано явление аномальной электронной теплопроводности на турбулентных волнах, препятствующих дальнейшему росту теплового потока (см. также [?]). Проблемы переноса, находимого по теории возмущений, продолжают привлекать пристальное внимание исследователей (см. обзорную работу [?]). В этой работе вводится матрица коэффициентов переноса с недиагональными элементами по отношению к вектору, составленному из градиентов невозмущённых величин. С этой точки зрения, в настоящем исследовании найден один вектор-столбец матрицы переноса при условии аддитивности аномальной волновой конвекции по отношению к различным наборам градиентов невозмущённых величин.

Выражения для коэффициента конвекции частиц (44) и конвективного потока (50) электронной температуры содержат четвёртую степень магнитного поля в знаменателе. Казалось бы, обеспечивая существенное превышение классического переноса частиц и тепла при небольших значениях магнитного поля, они будут сильно уменьшаться с увеличением магнитного поля. Однако, если учесть предсказываемый в разделе 2 и обнаруживаемый экспериментально эффект перестройки волн, то у коэффициентов конвекции проявляется интересная особенность, а именно, осцилляционная зависимость от внешнего магнитного поля. В самом деле, квадрат амплитуды доминирующей $m-$волны при значениях параметров возбуждения $m+1-$волны слабо зависит от внешнего магнитного поля. При этом $\left|a_m^0\right|^2$ растёт вместе с ростом магнитного поля вблизи его порогового значения. Другие сомножители в формулах (44), (50) и (51) зависят от магнитного поля только через отношение азимутального волнового числа (или поперечного $K_\perp$, но $K_x \sim K_y$ см. раздел 2) к магнитному полю. Линейная пороговая теория приводит к набору эквидистантных значений критического магнитного поля, $m/H_{cr}(m) = F(p_{_N}, \lambda_{ei})$ при заданном значении градиентного параметра $p_{_N}$ (41), параметра плотности λ_{ei} и $k_x/m = const$ (см. формулы (42), (43)). Отсюда следует, что при увеличении магнитного поля внутри интервала, заключённого между двумя соседними критическими значениями, сомножители, стоящие перед амплитудой, уменьшаются как m^4/H_0^4. При перестройке волн, то есть при переходе к доминирующей волне с большим азимутальным номером множитель

$$m^4/H_0^4 = (H_{cr}^4/H_0^4)F^4(p_{_N}, \lambda_{ei}) \qquad (52)$$

скачком возвращается к первоначальному и постоянному, согласно линейной теории, значению. Описываемая картина зависимости коэффициента конвекции от магнитного поля аналогична более простой ситуации, которая встретилась при экспериментальном исследовании зависимости частоты дрейфовых волн от внешнего поля. При этом оказалось, что частота дрейфовых волн почти не зависит от магнитного поля вместо предсказываемой теорией обратно пропорциональной зависимости. Проблема состояла в том, что на опыте столкнулись с эффектом перестройки волн, когда разные значения поля относились к различным азимутальным номерам дрейфовых волн, причём достаточно большим по сравнению с единицей.

Таким образом, изменение коэффициентов конвекции в зависимости от увеличивающегося магнитного поля в интервале между соседними его критическими значениями состоит из роста квадрата амплитуды и уменьшения предэкспоненциального сомножителя (52). При возбуждении доминирующей волны со следующим по порядку азимутальным номером $m+1$ происходит резкий скачок сомножителя (52) вследствие эффекта перестройки волн. Можно бы было говорить о периодической зависимости коэффициентов при условии, что градиентный параметр p_N и параметр плотности λ_{ei} постоянны и нелинейные пороги те же самые, что и в линейной теории. Однако в нелинейной теории появляются нелинейные пороги возбуждения волн, а также возникает связь эффекта перестройки волн с аномальной конвекцией и интенсивностью внешнего источника плазмы. Поэтому исследование эффекта перестройки волн и нелинейных порогов должно привести к установлению полной зависимости как коэффициентов аномальной конвекции, так и компонентов волнового вектора доминирующей волны от магнитного поля, градиентного параметра и параметра плотности. Для известного волнового числа доминирующей волны, измеренного в эксперименте, такие зависимости уже содержатся в полученных результатах.

Список литературы

[1] Водяницкий А.А. Нелинейные дрейфово-диссипативные структуры в плазме. I. - см. наст. выпуск, с. 254-282.

[2] Vodyanitskii A.A., Moiseev S.S. Nonlinear Drift-Dissipative Structures in a Plasma. - Proceedins of Contributed Papers of International Conference On Plasma Physics, 1987, Naukova Dumka, Kiev, v.4, p.103-106.

[3] Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Конвективные ячейки и аномальная диффузия плазмы. - Физика плазмы, 1978, т.4, с.551-558.

[4] Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Стационарная нелинейная теория параметрического возбуждения волн. - ЖЭТФ, 1970. т.59, с.2000-2014.

[5] Бакай А.С. Вопросы теории нелинейных колебаний и их применение в физике. Препринт ФТИ АН УССР, ХФТИ-71-4, 1971. Об автомодуляции волн. ЖЭТФ, 1971, т.60, в.9, с.182-192.

[6] Stix T.H. Finite Amplitude Drift Waves. - Phys. Rev. Lett., 1968, v.20, p.1422.

[7] Водяницкий А.А. Многоволновые нелинейные пороговые режимы и диффузия в условиях дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы. II Международная конференция по теории плазмы. В кн.: Аннотации докладов, 1974, Киев, с.79.

[8] Водяницкий А.А. О нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы. II . Препринт АН УССР, ХФТИ 79-28, Харьков, 1979, с. 1-29.

[9] Lamb W.E.(Jr) Theory of optical maser. - Phys. Rev.A, 1964, v.134, p.A1429.

[10] Смирнов Г.И., Шапиро Д.А. К теории ионных лазеров. - Институт автоматики и электрометрии СО АН СССР, 1981, препринт No 128, Новосибирск, 29 с. - см. также ЖЭТФ, 1981, т. 81, в. 8, с. 457-467; Квант. электр., 1982, т.96, No 5, с. 883-888.

[11] Наумовец В.Г., Пасечник Л.Л., Попович С.А. Исследование дрейфово-диссипативной неустойчивости в ограниченной газоразрядной плазме. - ЖТФ, 1972, т.42, с.270.

[12] Hendel H.W., Chu T.K., Politzer P.A. Collisional drift waves — identification, stabilization and enhanced plasma transport. - Phys. Fluids, 1968, v.11, p.2426-2439.

[13] Vodynitskii A.A., Moiseev S.S. Nonlinear stationary states of the collisional drift-wave instability taking temperature fluctuations into account. - in: Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, 1984, New York. Ed. by R.Z. Sagdeev, Harwood Academic Publishers, v.1, p.607-615. (см. Водяницкий А.А., Моисеев С.С. Нелинейный стационарный режим дрейфово-диссипативной неустойчивости с уч́етом температурных возмущений. - В сб. Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике, ч.1. Изд. Наукова думка, Киев, 1983, с.293-297).

[14] Simon A. Ambipolar diffusion in a magnetic field.- Phys. Rev., 1955, v.98, N2, p.1376-1379.

[15] Гурин А.А., Пасечник Л.Л., Попович А.С. Диффузия плазмы в магнитном поле. К., "Наукова думка", 1979, 266 с.

[16] Тамм И.Е. Теория магнитного термоядерного реактора. - В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. Изд. АН СССР, 1958, т.1, с.3-19.

[17] Rosenbluth M.N. Taylor J.B. Phys. Rev. Lett. 1969 v.23 p.367.

[18] Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Неоклассическая теория диффузии. - В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.7, М., Атомиздат, 1973, с.205-273.

[19] Быченков В.Ю., Силин В.П. Ионно-звуковая турбулентность плазмы. ЖЭТФ, 1982, т.82, в.6, с.1882-1903.

[20] Исиченко М.Б.Физика плазмы 1985, т.11, в.8, с. 936-943.

[21] N. J. Lopes Cardoso. Pertubative transport studies in fusion plasmas. - Plasma Phys. Control. Fusion, 1995, v. 37, p. 799-852.