# Суперсимметрия и Электродинамика Частиц со Спином

А. А. Желтухин
*Институт теоретической физики*
*ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт" НАН Украины*
В. В. Тугай
*Научный физико-технологический центр,*
*310145, Харьков, Украина. E-mail: tugai@sptca.kharkov.ua*

## Содержание



## Аннотация

Рассмотрена суперсимметричная формулировка классического действия взаимодействующих заряженных и нейтральных фермионов с произвольным аномальным магнитным моментом. Эта формулировка обобщает известное действие для скалярных заряженных частиц, изученное в работах Фоккера, Шварцшильда, Тетроде, Уилера и Фейнмана. Из предложенного действия выведена суперполевая формулировка электродинамики максвелловского супермультиплета, построенного из мировых координат заряженных или нейтральных фермионов. Как следствие рассматриваемой формулировки, предложен новый полевой принцип минимальности в суперпространстве, позволяющий единым образом описать стандартное минимальное и неминимальное паулиевское взаимодействие фермионов с электромагнитным полем.

## 1. Введение

Несмотря на фундаментальный прогресс, достигнутый теорией струн при объединении взаимодействий, в ней остается ряд нерешенных вопросов [1]. Одним из них является вопрос правильного выбора физических переменных и соответствующего математического аппарата для адекватного описания наблюдаемого мира. При решении этого вопроса может оказаться полезным анализ ранее предложенных подходов с целью реализации содержащихся в них скрытых возможностей.

Теория дальнодействия Фоккера-Шварцшильда-Тетроде-Уилера-Фейнмана (FSTWF) [2–5], описывающая электромагнетизм без введения концепции поля как фундаментальной категории, принадлежит к числу таких подходов. Известной трудностью FSTWF подхода является одновременное присутствие в нем как запаздывающих, так и опережающих потенциалов. Хойль и Нарликар [7, 8] показали, что этот недостаток устраняется при переходе к стационарной модели Вселенной, поскольку в ней допустимыми решениями уравнений Максвелла оказываются только запаздывающие потенциалы. Обсуждая результаты работы Хойля и Нарликара, Вайнберг в своей книге [6] отметил "интригующую роль" FSTWF подхода в решении старой проблемы о связи физики микромира со свойствами Вселенной в целом. Вывод Вайнберга оправдался последующим развитием теории струн, в рамках которой основные характеристики выводимых из нее полевых теорий, существенно зависят от выбора вакуумного состояния. Последнее, как известно, определяется заданием геометрии объемлющего пространства-времени или, что эквивалентно, выбором космологической модели Вселенной. Работа Калба и Рамона [9], в которой антисимметричное калибровочное поле было открыто при описании взаимодействий между бозонными струнами на основе FSTWF подхода, дала новый пример его эффективности. Это поле играет важную роль в теории супергравитации [10] и современных топологических теориях [11, 12]. Принимая во внимание пользу объединения различных подходов теории поля и космологии, мы считаем актуальным дальнейшее изучение FSTWF подхода.

Напомним, что FSTWF подход был развит для описания электромагнитных взаимодействий между заряженными частицами со спином нуль. Естественно, возникает вопрос о расширении этого подхода на заряженные и нейтральные частицы со спином и, в частности, на нейтральные фермионы со спином $1/2$. К числу последних относятся нейтрино и нейтроны, играющие важную роль в физических процессах, связанных с образованием Вселенной и ее свойствами. Известно, что нейтральные фермионы могут взаимодействовать электромагнитным образом благодаря наличию у них аномального магнитного момента. Если FSTWF подход является универсальным подходом к описанию электромагнитных взаимодействий, он должен допускать обобщение на заряженные и нейтральные фермионы. Кажется естественным искать ответ на поставленный вопрос в направлении суперсимметризации FSTWF подхода, поскольку суперсимметрия является универсальным механизмом для введения спиновых степеней свободы. Решению этой задачи и посвящается данная работа.

В **первом разделе** работы кратко описан подход FSTWF и приведены основные результаты статьи [5].

Во **втором разделе** проводится суперсимметризация оригинальной FSTWF электродинамики посредством перехода от пространства Минковского $x^\mu$ к суперпространству $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, содержащему дополнительные грассмановы спинорные координаты $\theta^\alpha$ и $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. При этом заряженные скалярные частицы FSTWF подхода заменяются на заряженные суперчастицы, а $\delta$-образный релятивистский потенциал, содержащий $\delta(s_0^2)$, — на суперсимметричные киральные потенциалы с $\delta(s_L^2)$ и $\delta(s_R^2)$. Кроме фотонного поля рассматриваемая теория теперь содержит поля фотино, построенные из спинорных координат $\theta^\alpha$, $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ и удовлетворяющие уравнению Дирака. Показано также, что оригинальное представление FSTWF [5] для поля фотона расширяется за счет добавок, связанных с присутствием грассмановых степеней свободы. В результате предлагаемого расширения уравнения Максвелла и Дирака записываются в виде суперполевого волнового уравнения для предпотенциала с суперполевым током, обобщающим электромагнитный FSTWF ток.

В **третьем разделе** строится функционал действия для заряженных суперчастиц, который в точности воспроизводит все интегральные представления для потенциалов и токов, предложенные в разделе 2. Показано, что предложенный функционал действия является суперсимметричным обобщением действия [5] и в пределе нулевых значений спинорных грассмановых переменных совпадает с ним.

В **четвертом разделе** проводится обобщение FSTWF подхода на нейтральные частицы со спином $1/2$. Это обобщение проходит вдоль линии, развитой в разделе 3 с той лишь разницей, что с самого начала в теории постулируется наличие единственной константы с размерностью длины. Предполагается, что эта константа связана с величиной аномального магнитного момента частицы со спином $1/2$. Предлагается суперсимметричный интеграл действия для нейтральных фермионов, взаимодействующих посредством их аномальных магнитных моментов (АММ). Этот интеграл действия в пределе нулевых значений для грассмановых переменных обращается в нуль.

В **пятом разделе** рассматривается общий случай, отвечающий взаимодействующим фермионам, несущим как электрический заряд, так и АММ. Для указанного случая также строится суперсимметричный интеграл действия, являющийся суперпозицией интегралов действия из разделов 3 и 4. Предлагаемое действие восстанавливает симметрию между зарядами и аномальными магнитными моментами частиц как равноправными константами электромагнитного взаимодействия. Эта симметрия является проявлением упущенной в рамках стандартного подхода возможности расширения известного принципа минимальности электромагнитных взаимодействий на случай заряженных или нейтральных фермионов, обладающих АММ.

В **шестом разделе** рассматривается новый расширенный принцип минимальности в рамках стандартной полевой теории спинорных частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем. Показано, что в низшем приближении по степеням $v/c$ обобщенный принцип минимальности воспроизводит неминимальный паулиевский член в уравнении Дирака, описывающий вклад АММ спинорной частицы. При этом возникает возможность интерпретации спинорных грассмановых координат как псевдоклассических волновых функций нейтральных фермионов, которые взаимодействуют с супермультиплетом Максвелла посредством их АММ. Новой характерной чертой таких взаимодействий является естественное возникновение нейтральных токов и токовой структуры лагранжиана взаимодействий. Интересным моментом является наличие в лагранжиане двухточечных вершин, указывающих на возможность нейтриннофотинных осциляций с вершинной константой пропорциональной АММ нейтрино.

В **Заключении** обсуждаются возможности дальнейшего развития суперсимметризованного FSTWF подхода и его применения в теории поля и космологии.

В **Приложении** для удобства собраны использованные в работе сведения из спинорной алгебры и суперсимметричной калибровочной теории.

## 2. Теория Фоккера-Шварцшильда-Тетроде-Уилера-Фейнмана

В основе теории FSTWF, как известно, лежит вариационный принцип Фоккера, т.е. принцип экстремальности действия

$$S_{FSTWF} = \sum_A m_A \int d\tau_A \sqrt{\dot{x}_A^2} + \sum_{\substack{A,B\\A<B}} e_A e_B \int d\tau_A \int d\tau_B\, \dot{x}_A^{\mu} \dot{x}_{B\mu} \delta(s^2_{0\,AB}), \quad (1)$$

где $x^{\mu}_A(\tau_A)$ — мировая координата частицы $A$, $e_A$ — ее электрический заряд, $m_A$ — масса, $\delta(s^2_{0\,AB})$ — $\delta$-функция Дирака, аргумент которой $s^2_{0\,AB}$ — квадрат релятивистского интервала между частицами $A$ и $B$.

Без ограничения общности можно перейти к обсуждению взаимодействия двух частиц $(e_1, m_1, x^{\mu}(\eta))$ и $(e_2, m_2, y^{\mu}(\tau))$. Тогда действие (1) можно переписать в виде

$$S_{FSTWF} = m_1 \int d\eta \sqrt{\dot{x}^2} + m_2 \int d\tau \sqrt{\dot{y}^2} d\tau + e_1 e_2 \int d\eta \int d\tau\, \dot{x}^{\mu} \dot{y}_{\mu} \delta(s_0^2), \quad (2)$$

где $\eta$ и $\tau$ — параметры собственного времени вдоль траектории рассматриваемых частиц. Варьируя действие (2) по координате $x^{\mu}$ и фиксируя репараметризационную инвариантность условием $\dot{x}^2 = 1$, получим для первой (пробной) частицы уравнения движения Лоренца

$$m_1 \ddot{x}^{\mu} = -e_1 \dot{x}_{\nu} v^{\nu\mu}, \quad (3)$$

где $v^{\mu\nu} = \partial^{\mu} a^{\nu} - \partial^{\nu} a^{\mu}$ — напряженность электромагнитного поля

$$a^{\mu}(x) = e \int d\tau\, \dot{y}^{\mu}(\tau) \delta(s_0^2), \quad (4)$$

которое генерируется частицей-источником $(e_2, m_2, y(\tau))$[1]. Покажем, что представление (4) автоматически удовлетворяет условию лоренцевой калибровки

$$\partial_{\mu} a^{\mu} = 0. \quad (5)$$

Для проверки (5) удобно переписать $a^{\mu}$ (4) следующим образом

$$a^{\mu}(x) = -e \int d\tau \frac{ds_0^{\mu}}{d\tau} \delta(s_0^2), \quad (6)$$

тогда

$$\partial_{\mu} a^{\mu}(x) = -e \int d\tau \frac{ds_0^{\mu}}{d\tau} \partial_{\mu} \delta(s_0^2) = e \int d\tau \frac{ds_0^{\mu}}{d\tau} 2 s_{0\mu} \frac{d}{d(s_0^2)} \delta(s_0^2) = e \int d(s_0^2) \delta'(s_0^2) = e\delta(s_0^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Дифференцируя представление (4), используя тождество Дирака [13]

$$\Box \delta(s_0^2) = -4\pi \delta^4(s_0^{\mu}) \quad (7)$$

и условие (5), получим вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_{\mu} v^{\mu\nu}(x) = -4\pi j^{\nu}(x), \quad (8)$$

где токи в правых частях определяются хорошо известными выражениями

$$j^{\mu}(x) = e \int d\tau\, \dot{y}^{\mu} \delta^{(4)}(s_0). \quad (9)$$

Первая пара уравнений Максвелла является очевидным следствием антисимметричности тензора $v^{\mu\nu}$

$$\partial^{\mu} v^{\nu\rho} + \partial^{\nu} v^{\rho\mu} + \partial^{\rho} v^{\mu\nu} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (8) переписывается в форме безмассового уравнения Клейна-Гордона с источником

$$\Box a_{\mu}(x) = \tilde{j}_{\mu}(x). \quad (11)$$

Его решение представляется в виде

$$a_{\mu}(x) = \int d^4 y\, G(x, y) \tilde{j}_{\mu}(y), \quad (12)$$

[1] Везде, где это не может привести к недоразумению, будем опускать индекс “2” у заряда и других характеристик частицы-источника в выражениях для полей, генерируемых этой частицей. Кроме того, если не указано обратного, операторы дифференцирования действуют на координаты пробной частицы.

где $G(x, y)$ — функция Грина, которая в безмассовом случае имеет простой вид

$$\Box G(x,y) = \delta^{(4)}(x^\mu - y^\mu) \equiv \delta^{(4)}(s_0^\mu) \;\Rightarrow$$
$$G(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\delta(s_0^2). \qquad (13)$$

Если теперь в выражение (12) подставить явный вид электромагнитного тока (9) $\tilde{j}_\mu = -4\pi j_\mu$ и явный вид функции Грина (13), то, как и следовало ожидать, после интегрирования получим выражение (4) для потенциала $a_\mu(x)$.

С учетом представления (4), член, описывающий взаимодействие в действии (2), может быть переписан в хорошо известной форме действия для частицы во внешнем электромагнитном поле

$$S_{int} = e_1 \int d\eta\, \dot{x}^\mu a_\mu. \qquad (14)$$

Подобная форма записи функционала действия окажется особенно полезной при построении суперсимметричных аналогов действия (2).

# 3. Поля и токи заряженной суперчастицы в подходе FSTWF

Для описания заряженной суперчастицы расширим пространство Минковского $x^\mu$ до суперпространства $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot\alpha})$, вводя в качестве дополнительных грассмановых координат частиц вейлевские спиноры $\theta^\alpha$ и $\bar{\theta}_{\dot\alpha}$.

Основные этапы построения теории будем проводить на примере двух суперчастиц: суперчастицы с массой $m_1$, зарядом $e_1$, координатами $z^M = (x^\mu(\eta), \theta^\alpha(\eta), \bar{\theta}_{\dot\alpha}(\eta))$, находящейся в точке наблюдения и суперчастицы-источника с характеристиками $m_2$, $e_2$, $\zeta^M = (y^\mu(\tau), \xi^\alpha(\tau), \bar{\xi}_{\dot\alpha}(\tau))$ соответственно.

Преобразования суперсимметрии [14, 15]

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}, \quad \delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha,\ \delta\bar{\theta}_{\dot\alpha} = \bar{\epsilon}_{\dot\alpha};\\ \delta y^\mu &= i\xi\sigma^\mu\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\xi}, \quad \delta\xi^\alpha = \epsilon^\alpha,\ \delta\bar{\xi}_{\dot\alpha} = \bar{\epsilon}_{\dot\alpha} \end{aligned} \qquad (15)$$

"перемешивают" обычные (бозонные) и грассмановы (фермионные) координаты каждой частицы. Поэтому, роль дифференциальных элементов мировой линии суперчастицы играют, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии (15), формы Картана

$$\begin{aligned} d\eta\,\omega_\eta^M &\equiv (d\eta\,\omega_\eta^\mu,\ d\eta\,\dot{\theta}^\alpha,\ d\eta\,\dot{\bar{\theta}}_{\dot\alpha}),\\ d\tau\,\omega_\tau^M &\equiv (d\tau\,\omega_\tau^\mu,\ d\tau\,\dot{\xi}^\alpha,\ d\tau\,\dot{\bar{\xi}}_{\dot\alpha}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_\eta^\mu &= \dot{x}^\mu - i(\dot{\theta}\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\dot{\bar{\theta}}),\\ \omega_\tau^\mu &= \dot{y}^\mu - i(\dot{\xi}\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\dot{\bar{\xi}}). \end{aligned} \qquad (16)$$

Суперсимметризацию теории FSTWF удобно начать с построения суперсимметричного обобщения для электромагнитного потенциала $a^\mu$ (4). Соответствующий функционал действия и уравнения движения системы суперчастиц будут получены в п.3.

В суперсимметричных калибровочных теориях [15] роль потенциала (калибровочной связности) $a^\mu$ играет набор суперполей $A^M(x,\theta,\bar\theta) = (A^\mu, A^\alpha, \bar{A}_{\dot\alpha})$, который называют суперсвязностью. Суперпотенциалы $A^\mu, A^\alpha, \bar{A}_{\dot\alpha}$, называемые компонентами суперсвязности, как и в обычных калибровочных теориях, удлиняют суперсимметричные ковариантные производные

$$\nabla^M = D^M + eA^M. \qquad (17)$$

Векторная и спинорные компоненты производной $D^M$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu,\\ D_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\rho\bar{\theta})_\alpha\partial_\rho,\\ \bar{D}_{\dot\alpha} &\equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}} - i(\theta\sigma^\rho)_{\dot\alpha}\partial_\rho. \end{aligned} \qquad (18)$$

Суперсимметричные удлиненные производные $\nabla^M\varphi$ (17) инвариантны относительно $U(1)$-калибровочных преобразований суперполя $\varphi$

$$\varphi' = e^{-ie\Lambda}\varphi, \qquad (19)$$

если при этих преобразованиях суперсвязности $A_M$ преобразуются по закону

$$A'_M = A_M + iD_M\Lambda. \qquad (20)$$

Калибровочно инвариантные напряженности, отвечающие физическим полям, возникают в теории как компоненты 2-формы кривизны, соответствующей связностям $A_M$

$$F_{MN} = D_M A_N - (-1)^{MN} D_N A_M - T_{MN}{}^R A_R, \qquad (21)$$

где $T_{MN}{}^R$ — тензор кручения, все компоненты которого, кроме $T_{\alpha\dot\beta}{}^\mu \sim \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}$, в случае плоского суперпространства равны нулю. Выражения для компонент формы $F_{MN}$ (21) приведены в Приложении.

После разложения компонент $F_{MN}$ (117) в ряд по степеням $\theta^\alpha$ и $\bar{\theta}_{\dot\alpha}$ получим значительное количество, так называемых, компонентных полей, большую часть которых необходимо устранить. Для устранения излишних, нефизических полей из $F_{MN}$ воспользуемся стандартными связями [15]

$$F_{\alpha\beta} = F_{\dot\alpha\dot\beta} = 0, \qquad (22)$$
$$F_{\alpha\dot\beta} = 0, \qquad (23)$$

которые сужают выбор интегральных представлений для $A_M$. Приступим теперь к построению искомых интегральных представлений для спинорных потенциалов $A^\alpha$ и $\bar{A}_{\dot\alpha}$, удовлетворяющих связям (22) и (23).

Для этого, в первую очередь, перейдем от обычного релятивистского интервала $s_0^\mu$ к интервалу

$$s^\mu = x^\mu - y^\mu - i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\bar{\theta}), \tag{24}$$

инвариантному относительно преобразований суперсимметрии (15), и его спинорным партнерам — суперсимметричным интервалам $\Delta^\alpha$ и $\bar{\Delta}_{\dot\alpha}$

$$\Delta^\alpha = \theta^\alpha - \xi^\alpha, \quad \bar{\Delta}_{\dot\alpha} = \bar{\theta}_{\dot\alpha} - \bar{\xi}_{\dot\alpha}. \tag{25}$$

Инварианты $s^\mu$, $\Delta^\alpha$, $\bar{\Delta}_{\dot\alpha}$ и формы Картана (16), которые обобщают скорости частиц $\dot{x}^\mu$ и $\dot{y}^\mu$, можно использовать для построения суперсвязностей в форме, аналогичной (4).

Для получения связностей $A^\alpha$ и $\bar{A}_{\dot\alpha}$, автоматически удовлетворяющих связям (22), удобно перейти от обычных координат $z^M$ и $\zeta^M$ к киральным наборам координат

$$\begin{aligned} z_L^\mu &= \left(x_L^\mu \equiv x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta^\alpha\right), \\ z_R^\mu &= \left(x_R^\mu \equiv x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta},\ \bar{\theta}_{\dot\alpha}\right); \\ \zeta_L^\mu &= \left(y_L^\mu \equiv y^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\xi},\ \xi^\alpha\right), \\ \zeta_R^\mu &= \left(y_R^\mu \equiv y^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\xi},\ \bar{\xi}_{\dot\alpha}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Поскольку произвольная функция $f$ киральных координат также является киральной

$$D^\alpha f(x_R, \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{D}_{\dot\alpha} f(x_L, \theta) = 0,$$

связям (22) легко удовлетворить, если искать представление для спинорных потенциалов в виде киральных функций

$$D_\alpha A_\beta(x_R, \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{A}_{\dot\beta}(x_L, \theta) = 0. \tag{27}$$

В терминах координатных наборов из (26) легко построить киральные векторные интервалы

$$\begin{aligned} s_L^\mu &= x_L^\mu - y_R^\mu - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} &= s^\mu + i\Delta\sigma^\mu\bar{\Delta}, \\ s_R^\mu &= x_R^\mu - y_L^\mu + 2i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} &= s^\mu - i\Delta\sigma^\mu\bar{\Delta}. \end{aligned} \tag{28}$$

Очевидное свойство этих интервалов $s_L^\mu\Big|_{\Delta=0} = s_R^\mu\Big|_{\Delta=0} = s^\mu$ дает возможность использовать их в качестве аргументов $\delta$-функций ($\delta(s_L^2)$ и $\delta(s_R^2)$) в интегральных представлениях типа (4) для суперполей $A^M = (A^\mu, A^\alpha, \bar{A}_{\dot\alpha})$.

С учетом вышесказанного, представление для $A_\alpha$ будем искать в виде

$$A_\alpha(x_R, \bar{\theta}) = e\int d\tau\, \hat{\mathcal{K}}_\alpha(\bar{\Delta}, \omega_\tau^\mu, \dot{\xi}^\alpha, \dot{\bar{\xi}}_{\dot\alpha})\delta(s_R^2), \tag{29}$$

причем каждое слагаемое ядра $\hat{\mathcal{K}}_\alpha$ содержит какую либо из “скоростей” $\omega_\tau^\mu$, $\dot{\xi}^\alpha$, $\dot{\bar{\xi}}_{\dot\alpha}$ и линейно по ней. Ядро $\hat{\mathcal{K}}_\alpha$, вообще говоря, является оператором и может содержать $\partial_\mu$ в любой степени. Используя нильпотентность алгебры грассмановых спиноров и размерные соображения, получим для $\hat{\mathcal{K}}_\alpha$ только две подходящие комбинации инвариантов: $\omega_{\tau\mu}(\sigma^\mu\bar{\Delta})_\alpha$ и $\dot{\xi}_\alpha\bar{\Delta}\bar{\Delta} \equiv \dot{\xi}_\alpha\bar{\Delta}_{\dot\beta}\bar{\Delta}^{\dot\beta 2}$. С учетом определения операции комплексного сопряжения для спинорных потенциалов: $\bar{A}_{\dot\alpha} = -(A_\alpha)^*$, получим

$$\begin{aligned} A_\alpha(x_R, \bar{\theta}) &= e\int d\tau\big(\omega_{\tau\mu}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar{\Delta}^{\dot\alpha} + \\ &\qquad 2i\dot{\xi}_\alpha\bar{\Delta}\bar{\Delta}\big)\delta(s_R^2), \\ \bar{A}_{\dot\alpha}(x_L, \theta) &= -e\int d\tau\big(\omega_{\tau\mu}\Delta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} - \\ &\qquad 2i\dot{\bar{\xi}}_{\dot\alpha}\Delta\Delta\big)\delta(s_L^2). \end{aligned} \tag{30}$$

Выбор относительных коэффициентов в $\hat{\mathcal{K}}_\alpha$ связан с выбором калибровки и оправдывается ходом дальнейших рассуждений.

Оставшуюся связь (23) легко удовлетворить, если выбрать представление для $A_\mu$ в виде

$$A_\mu = -\frac{i}{4}\tilde{\sigma}^{\dot\alpha\alpha}_\mu\left(D_\alpha\bar{A}_{\dot\alpha} + \bar{D}_{\dot\alpha}A_\alpha\right). \tag{31}$$

После подстановки (30) в представление (31) получим

$$\begin{aligned} A_\mu = -ie\int d\tau\Big\{ &\frac{1}{2}\omega_{\tau\mu}\left[\delta(s_L^2) + \delta(s_R^2)\right] + \\ &i\big[\Delta\sigma_\mu\dot{\bar{\xi}}\delta(s_L^2) - \dot{\xi}\sigma_\mu\bar{\Delta}\delta(s_R^2)\big] + \\ &\frac{i}{2}\omega_{\tau\nu}\left[\Delta\sigma^\nu\tilde{\sigma}_\mu\sigma^\rho\bar{\Delta}\partial_\rho\delta(s_L^2) - \right. \\ &\left.\Delta\sigma^\rho\tilde{\sigma}_\mu\sigma^\nu\bar{\Delta}\partial_\rho\delta(s_R^2)\right] + \Delta\Delta\dot{\bar{\xi}}\tilde{\sigma}_\mu\sigma^\nu\bar{\Delta}\partial_\nu\delta(s_L^2) + \\ &\Delta\sigma^\nu\tilde{\sigma}_\mu\dot{\xi}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\partial_\nu\delta(s_R^2)\Big\} \end{aligned} \tag{32}$$

Нетрудно проверить, что векторная связность $A_\mu$ (32) удовлетворяет суперполевому обобщению условия лоренцевой калибровки

$$\partial_\mu A^\mu(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \tag{33}$$

Выполнение этого условия легко проверить, если в (32) выразить $\delta(s_L^2)$ и $\delta(s_R^2)$ через $\delta(s^2)$ и ее производные

$$\begin{aligned} \delta(s_L^2) &= \delta(s^2) + \\ &\qquad i\Delta\sigma^\mu\bar{\Delta}\partial_\mu\delta(s^2) + \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar{\Delta}\bar{\Delta}\Box\delta(s^2) \\ \delta(s_R^2) &= \delta(s^2) - \\ &\qquad i\Delta\sigma^\mu\bar{\Delta}\partial_\mu\delta(s^2) + \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar{\Delta}\bar{\Delta}\Box\delta(s^2) \end{aligned} \tag{34}$$

[2] Все соглашения, касающиеся формы записи используемых выражений, совпадают с соглашениями принятыми в [15] и приведены в Приложении.

Тогда, после несложных преобразований двух последних членов в (32), векторный суперпотенциал примет вид

$$A_\mu = -ie\int d\tau\Big\{\omega_{\tau\mu} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\omega^\nu_\tau(\Delta\sigma^\rho\bar\Delta)\partial^\lambda + i(\Delta\sigma_\mu\dot{\bar\xi}) - i(\dot\xi\sigma_\mu\bar\Delta) + \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\omega^\nu_\tau(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box) + \Big[\Delta\Delta(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_{\mu\rho}\bar\Delta) + (\dot\xi\sigma_{\mu\rho}\Delta)\bar\Delta\bar\Delta\Big]\partial^\rho\Big\}\delta(s^2). \quad (35)$$

Лоренцева калибровка (33) не полностью фиксирует калибровочное суперполе $A_\mu$ (35) и остаточная калибровочная симметрия

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + i\partial_\mu G,\\ A'_\alpha &= A_\alpha + iD_\alpha G,\\ \bar A'_{\dot\alpha} &= \bar A_{\dot\alpha} + i\bar D_{\dot\alpha} G \end{aligned} \quad (36)$$

описывается действительным скалярным суперполем $G(x,\theta,\bar\theta)$, ограниченным условиями

$$\Box G = 0, \quad D^\alpha D_\alpha G = 0, \quad \bar D_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha} G = 0. \quad (37)$$

Полученные представления (30), (32) для потенциалов $A_M$ таковы, что построенные из них компоненты $F_{MN}$ удовлетворяют связям (22) и (23). Тогда, с учетом тождеств Бьянки (118), все ненулевые компоненты $F_{MN}$ (117) выражаются через киральные спинорные суперполя $W^\alpha$ и $\bar W_{\dot\alpha}$ [15]

$$F_{\mu\alpha} = i\sigma_{\mu\alpha\dot\beta}\bar W^{\dot\beta}, \quad F_{\mu\dot\alpha} = iW^\beta\sigma_{\mu\beta\dot\alpha}, \quad F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\bar D\tilde\sigma_{\mu\nu}\bar W - D\sigma_{\mu\nu}W), \quad (38)$$

которые, в свою очередь, ограничены дополнительными условиями

$$D_\alpha\bar W_{\dot\alpha} = \bar D_{\dot\alpha}W_\alpha = 0, \quad D^\alpha W_\alpha - \bar D_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha} = 0. \quad (39)$$

Отметим, что последнее условие играет в рассматриваемой здесь теории ту же роль, что первая пара уравнений Максвелла (10) в обычной электродинамике.

Разложение суперполей $W_\alpha$ и $\bar W^{\dot\alpha}$ в ряд по степеням $\theta^\alpha$, $\bar\theta_{\dot\alpha}$ дает набор компонентных полей максвелловского супермультиплета. Это разложение удобно выразить в киральных переменных (26) в форме наиболее общего решения уравнений (39)

$$W_\alpha(x_L,\theta) = -i\lambda_\alpha(x_L) + \Big\{\delta^\beta_\alpha D(x_L) - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\tilde\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta\left[\partial_\mu v_\nu(x_L) - \partial_\nu v_\mu(x_L)\right]\Big\}\theta_\beta + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}(x_L),$$

$$\bar W^{\dot\alpha}(x_R,\bar\theta) = i\bar\lambda^{\dot\alpha}(x_R) + \Big\{\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}D(x_R) + \frac{i}{2}(\tilde\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\left[\partial_\mu v_\nu(x_R) - \partial_\nu v_\mu(x_R)\right]\Big\}\bar\theta^{\dot\beta} - \bar\theta\bar\theta\tilde\sigma^{\dot\alpha\alpha\mu}\partial_\mu\lambda_\alpha(x_R). \quad (40)$$

Получим теперь интегральные представления для полей $W^\alpha$ и $\bar W^{\dot\alpha}$ (40). Из (38), с учетом (27), имеем

$$\begin{aligned} W^\alpha &\equiv \frac{i}{4}F_{\mu\dot\alpha}\tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} = \frac{1}{8}\bar D_{\dot\beta}\bar D^{\dot\beta}A^\alpha + \frac{i}{2}\partial^{\dot\alpha\alpha}\bar A_{\dot\alpha},\\ \bar W^{\dot\alpha} &\equiv \frac{i}{4}\tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}F_{\mu\alpha} = -\frac{1}{8}D^\beta D_\beta\bar A^{\dot\alpha} + \frac{i}{2}\partial^{\dot\alpha\alpha}A_\alpha, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\partial^{\dot\alpha\alpha} \equiv \tilde\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\partial_\mu$. После подстановки в (41) выражений (30) найдем искомое представление для $W^\alpha$

$$W^\alpha = e\int d\tau\Big\{-i\dot\xi^\alpha\left[1 + 2i\Delta\sigma^\rho\bar\Delta\partial_\rho + \Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\Box\right]\delta(s_R^2) + \frac{i}{2}\omega_{\tau\mu}\Delta^\alpha\partial^\mu\left[\delta(s_L^2) - \delta(s_R^2)\right] - i\omega_{\tau\mu}(\Delta\sigma^{\mu\nu})^\alpha\partial_\nu\left[\delta(s_L^2) + \delta(s_R^2)\right] - \Delta\Delta\left[(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma^\nu)^\alpha\partial_\nu\delta(s_L^2) - \frac{1}{2}\omega_{\tau\mu}(\bar\Delta\tilde\sigma^\mu)^\alpha\Box\delta(s_R^2)\right]\Big\}. \quad (42)$$

Интегральное представление для $\bar W^{\dot\alpha}$ легко получить, учитывая соотношение $\bar W^{\dot\alpha} = (W^\alpha)^*$. Для перехода к $\delta(s^2)$ воспользуемся соотношениями (34)

$$W^\alpha = -ie\int d\tau\Big\{\dot\xi^\alpha + i\dot\xi^\alpha\Delta\sigma^\mu\bar\Delta\partial_\mu + \frac{1}{4}\dot\xi^\alpha\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\Box + \omega_{\tau\mu}\Big[2(\Delta\sigma^{\mu\nu})^\alpha\partial_\nu - \frac{i}{2}\Delta\Delta(\bar\Delta\tilde\sigma_\nu)^\alpha\left(\partial^\mu\partial^\nu - \eta^{\mu\nu}\Box\right)\Big] - i\Delta\Delta(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_\mu)^\alpha\partial^\mu\Big\}\delta(s^2). \quad (43)$$

Суперполя $W^\alpha$ и $\bar W_{\dot\alpha}$ естественно использовать для построения суперсимметричного обобщения электромагнитного тока (9)

$$-4\pi\mathcal{J} = D^\alpha W_\alpha + \bar D_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha} = i\partial^{\dot\alpha\alpha}\left(\bar D_{\dot\alpha}A_\alpha - D_\alpha\bar A_{\dot\alpha}\right). \quad (44)$$

Правая часть этого выражения после подстановки представлений для суперпотенциалов $A^\alpha$ и $\bar A_{\dot\alpha}$ из (30) может быть переписана в форме $\Box\Phi(x,\theta,\bar\theta)$, где $\Phi$ — скалярное действительное суперполе. Отметим, что выбор относительных коэффициентов в (30) был сделан, исходя из требования представимости тока в виде д'Аламбериана от некоторого скалярного суперполя, то есть так, чтобы выполнялось соотношение

$$i\partial^{\dot\alpha\alpha}\left(\bar D_{\dot\alpha}A_\alpha - D_\alpha\bar A_{\dot\alpha}\right) = \Box\Phi(x,\theta,\bar\theta). \quad (45)$$

Этот результат нетрудно проверить, если переписать представления (30) в форме

$$\begin{aligned} A_\alpha &= e\int d\tau\left[-\frac{ds_{R\mu}}{d\tau}(\sigma^\mu\bar\Delta)_\alpha - 2i\dot\xi_\alpha\bar\Delta\bar\Delta\right]\delta(s_R^2),\\ \bar A_{\dot\alpha} &= -e\int d\tau\left[\frac{ds_{L\mu}}{d\tau}(\Delta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} - 2i\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha}\Delta\Delta\right]\delta(s_L^2), \end{aligned} \quad (46)$$

аналогичной выражениям (6) в FSTWF электродинамике. Действительно, единственный член, который не представляется в форме $\Box\Phi$ после подстановки (46) в (44), то есть является аналогом члена $\partial^\mu\partial_\nu a^\nu$, имеет вид

$$ie\int d\tau\left[-\frac{ds_{R\mu}}{d\tau}\bar{D}_{\dot\alpha}(\sigma^\mu\bar\Delta)_\alpha\right]\delta(s_R^2) = ie\int d\tau\frac{ds_{R\mu}}{d\tau}(-2)\partial^\mu\delta(s_R^2) = -2ie\int d\tau\frac{ds_R^2}{d\tau}\delta'(s_R^2) = 0.$$

Тогда, после подстановки (30) в соотношение (45), получим интегральное представление для суперполя $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$ в виде

$$\Phi = -2e\int d\tau\Big\{\omega_\tau^\mu\Delta\sigma_\mu\bar\Delta\left[\delta(s_L^2)+\delta(s_R^2)\right] + 2i\dot\xi\Delta\bar\Delta\bar\Delta\delta(s_R^2) - 2i\Delta\Delta\dot{\bar\xi}\bar\Delta\delta(s_L^2)\Big\} = -4e\int d\tau\Big[\omega_\tau^\mu\left(\Delta\sigma_\mu\bar\Delta\right) + i(\dot\xi\Delta)\bar\Delta\bar\Delta - i\Delta\Delta(\dot{\bar\xi}\bar\Delta)\Big]\delta(s^2). \quad (47)$$

Учет фундаментального свойства интервала (28)

$$\Box\delta(s^2) = -4\pi\delta^{(4)}(s^\nu) \quad (48)$$

вместе с представлением (47) позволяет переписать уравнение (44) в форме суперполевого волнового уравнения

$$\Box\Phi(x,\theta,\bar\theta) = -4\pi\mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta) \quad (49)$$

с суперполевым током $\mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta)$, определяемым выражением

$$\mathcal{J} = -2e\int d\tau\Big\{\omega_\tau^\mu(\Delta\sigma_\mu\bar\Delta)\left[\delta^{(4)}(s_L^\nu)+\delta^{(4)}(s_R^\nu)\right] + 2i(\dot\xi\Delta)\bar\Delta\bar\Delta\delta^{(4)}(s_R^\nu) - 2i\Delta\Delta(\dot{\bar\xi}\bar\Delta)\delta^{(4)}(s_L)\Big\} = -4e\int d\tau\Big[\omega_\tau^\mu(\Delta\sigma_\mu\bar\Delta) + i(\dot\xi\Delta)\bar\Delta\bar\Delta - i\Delta\Delta(\dot{\bar\xi}\bar\Delta)\Big]\delta^{(4)}(s^\nu). \quad (50)$$

Волновое уравнение (49) можно рассматривать как безмассовое уравнение Клейна-Гордона, которое является суперсимметричным обобщением уравнения (11). Тогда, соответствующая суперсимметричная функция Грина определяется как решение уравнения

$$\Box G(x,\theta,\bar\theta,y,\xi,\bar\xi) = \delta^{(4)}(s^\mu)\delta^{(2)}(\Delta^\alpha)\delta^{(2)}(\bar\Delta_{\dot\alpha}), \quad (51)$$

откуда находим, что

$$G(z,\zeta) \equiv G(x,\theta,\bar\theta,y,\xi,\bar\xi) = -\frac{1}{4\pi}\delta(s^2)\delta^{(2)}(\Delta^\alpha)\delta^{(2)}(\bar\Delta_{\dot\alpha}). \quad (52)$$

С учетом этого представления, скалярное суперполе $\Phi$ может быть получено из выражения для тока $\mathcal{J}$ (50) после интегрирования по суперобъему вместе с суперсимметричной функцией Грина (52)[3]

$$\Phi(z) \equiv \Phi(x,\theta,\bar\theta) = \int d^8\zeta\, G(z,\zeta)\mathcal{J}(\zeta) = \int d^4y\, d^2\xi\, d^2\bar\xi\, G(x,\theta,\bar\theta,y,\xi,\bar\xi)\mathcal{J}(y,\xi,\bar\xi).$$

Это рассуждение показывает, что поле $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$ может рассматриваться как суперполевое обобщение электромагнитного потенциала (4). Соответственно, уравнение (49) можно считать суперполевым обобщением уравнения Максвелла (8) в лоренцевой калибровке, а поле $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$ имеющим смысл предпотенциала $V(x,\theta,\bar\theta)$ [15], вычисленного в калибровке

$$\left\{DD,\bar D\bar D\right\}V = 0 \;\Rightarrow V(x,\theta,\bar\theta) = \frac{1}{4}\Phi(x,\theta,\bar\theta). \quad (53)$$

Интерпретация поля $\Phi$ как предпотенциала $V$ становится очевидной, если принять во внимание соотношения

$$W_\alpha = -\frac{1}{16}\bar D\bar D D_\alpha\Phi, \quad \bar W_{\dot\alpha} = -\frac{1}{16}DD\bar D_{\dot\alpha}\Phi. \quad (54)$$

После разложения в ряд по степеням $\theta$ выражения (53) и перехода к обозначениям (40) для компонентных полей максвелловского супермультиплета получим набор соотношений, фиксирующих калибровку

$$\begin{array}{rcl} \partial^{\dot\alpha\alpha}\chi_\alpha(x) &=& i\bar\lambda^{\dot\alpha}(x), \\ \partial^{\dot\alpha\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha}(x) &=& -i\lambda^\alpha(x), \\ \Box C(x) &=& -D(x), \\ M(x) &=& N(x) = 0, \\ \partial_\mu v^\mu(x) &=& 0 \end{array} \quad (55)$$

для компонентных полей $\chi,\bar\chi,C,M,N,v$ предпотенциала $V(x,\theta,\bar\theta)$. Теперь с помощью выражений (56) можно записать компонентное разложение этого суперполя в виде

$$V(x,\theta,\bar\theta) = \frac{1}{4}\Phi(x,\theta,\bar\theta) = -\Box^{-1}D - \theta^\alpha(\partial^{-1})_{\alpha\dot\beta}\bar\lambda^{\dot\beta} - i\bar\theta_{\dot\alpha}(\partial^{-1})^{\dot\alpha\beta}\lambda_\beta - (\theta\sigma_\rho\bar\theta)v^\rho + \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha} - \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\lambda_\alpha + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D. \quad (56)$$

Сравнивая разложение предпотенциала $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$ (47) по степеням $\theta$ с разложением (56), получим

[3] Это верно для любых суперполей $\Phi$ и $\mathcal{J}$, подчиняющихся волновому уравнению $\Box\Phi = -4\pi\mathcal{J}$, лишь бы в интегральном представлении $\mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta)$ только $\delta$-функция зависела от $y^\mu$.

интегральные представления для всех компонентных полей супермультиплета Максвелла: электромагнитного поля $v^\mu(x)$, спинорного поля фотино $\lambda^\alpha(x)$ и вспомогательного поля $D(x)$. Представление для максвелловского поля $v_\mu(x)$ удобно рассматривать как нулевой член в разложении суперпотенциала $A_\mu(x,\theta,\bar\theta)$ (35)

$$v_\mu(x) = iA_\mu\Big|_{\theta=0} = e\int d\tau\Big\{\dot y_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\dot y^\nu(\xi\sigma^\rho\bar\xi)\partial^\lambda + \Big[\xi\xi(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_{\mu\rho}\bar\xi) + (\dot\xi\sigma_{\mu\rho}\xi)\bar\xi\bar\xi\Big]\partial^\rho + \frac14\xi\xi\bar\xi\bar\xi\dot y^\nu\big(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\big)\Big\}\delta(s_0^2). \quad (57)$$

Для нахождения интегрального представления спинорного поля фотино $\lambda^\alpha(x)$ воспользуемся представлением (42) для суперполевой напряженности $W^\alpha$

$$\lambda^\alpha(x) = iW^\alpha\Big|_{\theta=0} = e\int d\tau\Big\{\dot\xi^\alpha - i\dot\xi\xi(\bar\xi\tilde\sigma_\mu)^\alpha\partial^\mu + \frac{i}{2}\xi\xi(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_\mu)^\alpha\partial^\mu - \frac12\dot\xi^\alpha\xi\xi\bar\xi\bar\xi\Box + \dot y_\mu\Big[-2(\xi\sigma^{\mu\nu})^\alpha\partial_\nu + \frac{i}{2}\xi\xi(\bar\xi\tilde\sigma_\nu)^\alpha\big(\partial^\mu\partial^\nu - \eta^{\mu\nu}\Box\big)\Big]\Big\}\delta(s_0^2). \quad (58)$$

Представление для $\bar\lambda_{\dot\alpha}$, очевидно, определяется как комплексно сопряженное к (58) $\bar\lambda_{\dot\alpha} = (\lambda_\alpha)^*$. Наконец, интегральное представление поля $D(x)$ получим из нулевого члена компонентного разложения поля $\Phi$

$$D(x) = -\frac14\Box\Phi\Big|_{\theta=0} = e\int d\tau\Big[\dot y_\mu(\xi\sigma^\mu\bar\xi) - i\xi\xi(\dot{\bar\xi}\bar\xi) + i(\dot\xi\xi)\bar\xi\bar\xi\Big]\Box\delta(s_0^2). \quad (59)$$

Поля $v^\mu$ (57) и $\lambda^\alpha$ (58) удовлетворяют уравнениям Максвелла и Вейля с токами

$$\begin{aligned} \Box v^\mu(x) &= -4\pi j^{(2)\mu}(x), \\ \partial^\mu v_\mu(x) &= 0, \\ \partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha}(x) &= -4\pi j^{(1)}_\alpha(x), \\ \partial^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha(x) &= -4\pi\bar j^{(1)\dot\alpha}(x), \end{aligned} \quad (60)$$

а вспомогательное поле удовлетворяет условию $D(x) = -4\pi j^{(0)}$. Указанные уравнения следуют из компонентного разложения суперполевого уравнения (49) после подстановки в него представления (47) и использования компонентного разложения для супертока $\mathcal{J}$, записанного в виде

$$\mathcal{J} = -4j^{(0)} + 4\theta^\alpha j^{(1)}_\alpha - 4\bar\theta_{\dot\alpha}\bar j^{\dot\alpha(1)} - 4(\theta\sigma_\rho\bar\theta)j^{(2)\rho} - 2i\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}j^{(1)}_\alpha + 2i\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar j^{(1)\dot\alpha} + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box j^{(0)}. \quad (61)$$

Интегральные представления компонент этого токового мультиплета могут быть выписаны после сравнения разложения (61) с интегральным представлением для $\mathcal{J}$ (50). В результате для векторной компоненты $j^{(2)}_\mu(x)$ супертока $\mathcal{J}$ (50) получим интегральное представление

$$j^{(2)}_\mu = e\int d\tau\Big\{\dot y_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\dot y^\nu(\xi\sigma^\rho\bar\xi)\partial^\lambda + \frac14\xi\xi\bar\xi\bar\xi\dot y^\nu\big(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\big) + \big[\xi\xi(\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_{\mu\rho}\bar\xi) + (\dot\xi\sigma_{\mu\rho}\xi)\bar\xi\bar\xi\big]\partial^\rho\Big\}\delta^{(4)}(s_0), \quad (62)$$

которое обобщает представление для электромагнитного тока (9) в подходе FSTWF. Полученный ток, очевидно, является сохраняющимся: $\partial^\mu j^{(2)}_\mu = 0$.

Интегральное представление для спинорной компоненты $j^{(1)}_\alpha$ супертока $\mathcal{J}$ (50) имеет вид

$$j^{(1)}_\alpha = e\int d\tau\Big\{\dot y_\mu\Big[(\sigma^\mu\bar\xi)_\alpha - \frac{i}{2}\xi_\alpha\bar\xi\bar\xi\partial^\mu - i(\sigma^{\mu\rho}\xi)_\alpha\bar\xi\bar\xi\partial_\rho\Big] + i\dot\xi_\alpha\bar\xi\bar\xi - \frac12(\sigma^\rho\dot{\bar\xi})_\alpha\xi\xi\bar\xi\bar\xi\partial_\rho\Big\}\delta^{(4)}(s_0). \quad (63)$$

Выражение для комплексно-сопряженного тока $\bar j^{(1)}_{\dot\alpha} = (j^{(1)}_\alpha)^*$ получается аналогично.

Результат проведенной суперсимметризации потенциалов $v_\mu$ оказывается нетривиальным уже в простейшем, статическом случае, когда $\dot{\mathbf{y}} = \dot\xi = \dot{\bar\xi} = 0$. В этом случае скалярная $v_0$ и векторная $\mathbf{v}$ компоненты 4-потенциала $v_\mu$ (57), при закреплении репараметризационной инвариантности условием $y_0 = \tau$, имеют вид

$$\begin{aligned} &v_0 = \frac{e}{r} + e\pi\xi_0^2\bar\xi_0^2\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \\ &\mathbf{v} = e\frac{[\mathbf{\Sigma}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{\Sigma} = (\xi_\mathbf{0}\sigma\bar\xi_\mathbf{0}), \quad \xi^\alpha_\mathbf{0} = \xi^\alpha\Big|_{\tau=\mathbf{x_0}}. \end{aligned} \quad (64)$$

Последнее из уравнений (64) показывает, что грассмановы переменные описывают вклад магнитного момента заряженной частицы-источника в векторный потенциал $\mathbf{v}$. Это хорошо согласуется с общепринятой интерпретацией грассмановых переменных как переменных, которые описывают спиновые степени свободы частицы в классическом пределе $\hbar\mapsto 0$. Из первого уравнения (64) мы видим, что скалярный потенциал $v_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle v_0 = -4\pi\left[\frac{e}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{r}+\mathbf{\Sigma}) + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2}}\delta^{(\mathbf{3})}(\mathbf{r}-\mathbf{\Sigma})\right]. \quad (65)$$

Это уравнение показывает, что поправка (64) к закону Кулона вызвана “размазыванием” электрического заряда $e$ частицы по области пространства с размерами порядка комптоновской длины волны частицы. Это "размазывание" классической траектории связано с эффектом рождения пар ("Zitterbewegung"-эффект) [16], который не исчезает в пределе $\hbar \mapsto 0$, поскольку в этом пределе остается вклад спиновых степеней свободы, описываемых грассмановыми переменными.

## 4. Действие системы заряженных суперчастиц

Обобщение на суперпространство функционала действия системы заряженных частиц (1) начнем с выбора действия свободной суперчастицы в виде [17]

$$S_{free} = \frac{1}{2}\int d\eta\Big(\frac{\omega_\eta^\mu \omega_{\eta\mu}}{g_\eta} + g_\eta m_1^2\Big), \qquad (66)$$

где $g_\eta$ — айнбайн на мировой траектории суперчастицы, играющий роль множителя Лагранжа.

Для описания взаимодействия двух заряженных суперчастиц будем использовать суперсимметричное обобщение действия для частицы во внешнем электромагнитном поле (14)

$$S_{int} = ie_1 \int d\eta\, \omega_\eta^M A_M \quad \equiv \quad ie_1 \int d\eta\big(\omega_\eta^\mu A_\mu + \dot\theta^\alpha A_\alpha + \dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}\bar A^{\dot\alpha}\big). \quad (67)$$

Это действие напоминает предложенное Лузанной и Милевски [18] действие для $N=2$ суперчастицы во внешнем поле, но мы будем рассматривать его с учетом представлений (30) и (32), то есть в терминах мировых координат и скоростей суперчастиц. Отметим, что общий множитель $i$ делает действие (67) действительным. Необходимость введения этого множителя вызвана тем, что в рамках принятых соглашений $v_\mu = iA_\mu|_{\theta=0}$.

После варьирования полного лагранжиана

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}, \qquad (68)$$

определяемого выражениями (66) и (67) получим уравнения движения заряженной суперчастицы во внешних полях $U(1)$-калибровочного супермультиплета

$$\begin{aligned} (g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu})^\cdot &= -ie_1\omega_\eta^M F_{M\mu}, \\ g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha &= \frac{1}{2}e_1\omega_\eta^M F_{M\alpha}, \\ g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= -\frac{1}{2}e_1\omega_\eta^M F_{M\dot\alpha}, \\ \omega_\eta^\mu\omega_{\eta\mu} &= m^2 g_\eta^2. \end{aligned} \qquad (69)$$

Для случая массивной частицы эти уравнения упрощаются выбором калибровки $mg_\eta = 1$, эквивалентной условию $\omega_\eta^\mu\omega_{\eta\mu} = 1$. В случае безмассовой частицы ($m=0$) — выбором калибровки $\dot g_\eta = 0$ и условием светоподобия мировой траектории частицы $\omega_\eta^\mu\omega_{\eta\mu} = 0$.

При выводе уравнений (69) мы предполагали, что поля $A_M$ не зависят от набора скоростей $(\omega_\eta, \dot\theta, \dot{\bar\theta})$ пробной частицы. Это подтверждается явным видом представлений (30) и (32) для потенциалов $A_M$. Подставив эти представления в (67), получим функционал действия двух взаимодействующих заряженных суперчастиц

$$\begin{aligned} S_{int} = ie_1e_2 \int d\eta \int d\tau \Big\{ \dot\theta^\alpha \Big[\omega_{\tau\mu}(\sigma^\mu\bar\Delta)_\alpha(1 - \\ i\Delta\partial\bar\Delta) + 2i\dot\xi_\alpha\bar\Delta\bar\Delta\Big] + \Big[\omega_{\tau\mu}(\Delta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(-1 - \\ i\Delta\partial\bar\Delta) + 2i\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha}\Delta\Delta\Big]\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha} + \omega_\eta^\mu\Big[\omega_\tau^\nu(-i\eta_{\mu\nu} + \\ i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(\Delta\sigma^\rho\bar\Delta)\partial^\lambda - \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\eta_{\mu\nu}\Box) - \dot\xi\sigma_\mu\bar\Delta + \\ \Delta\sigma_\mu\dot{\bar\xi} + i\big(\dot\xi\sigma_\mu\bar\Delta + \Delta\sigma_\mu\dot{\bar\xi}\big)\Delta\partial\bar\Delta\Big]\Big\}\delta(s^2), \end{aligned} \quad (70)$$

который, очевидно, зависит только от координат $z^M$, $\zeta^M$ и скоростей $\omega_\eta^M$, $\omega_\tau^M$ этих частиц в суперпространстве. Легко проверить, что полученное действие симметрично относительно перестановок частиц, поэтому оно может быть записано для системы произвольного числа заряженных суперчастиц

$$S_{FSTWF} = \sum_A \frac{1}{2}\int d\eta_A \left(\omega_{A\eta}^\mu \frac{\omega_{A\eta\mu}}{g_{A\eta}} + g_{A\eta}m_A^2\right) + \sum_{\substack{A,B \\ A<B}} ie_A \int d\eta_A\, \omega_{A\eta}^M A_{B\,M}, \quad (71)$$

где $A_{B\,M}$ — потенциалы, получаемые из представлений (30) и (35) после выполнения подстановки $(\tau, \xi, \bar\xi, y) \mapsto (\eta_B, \theta_B, \bar\theta_B, x_B)$. Таким образом, задача обобщения действия (1) на суперчастицы решена.

Напомним, что после фиксации интегральных представлений для потенциалов $A_M$ в виде (30) и (35), автоматически удовлетворяются связи (22), (23) и, следовательно, все напряженности $F_{MN}$ теории выражаются через спинорные суперполя $W^\alpha$, $\bar W_{\dot\alpha}$. Тогда уравнения движения (69) могут быть переписаны так, чтобы в правой части содержались только эти спинорные напряженности

$$\begin{aligned} (g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu})^\cdot &= \frac{i}{2}e_1\omega_\eta^\nu(\bar D\tilde\sigma_{\nu\mu}\bar W - D\sigma_{\nu\mu}W), \\ g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha &= \frac{i}{2}e_1\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\bar W)_\alpha, \\ g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= -\frac{i}{2}e_1\omega_{\eta\mu}(W\sigma^\mu)_{\dot\alpha}, \\ \omega_\eta^\mu\omega_{\eta\mu} &= m^2 g_\eta^2. \end{aligned} \qquad (72)$$

# 5. Принцип "действия на расстоянии" для нейтральных суперчастиц

Рассмотрим теперь суперчастицу, которая является электрически нейтральной, но обладает аномальным магнитным моментом $\mu$. Теория FSTWF не давала возможности описывать взаимодействие таких частиц. Физические эффекты, связанные с аномальным магнитным моментом, в стандартной теории описываются посредством добавления к лагранжиану спинорной частицы во внешнем поле членов вида $\mu v_{\mu\nu}(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$. Такие добавки получили в литературе название неминимальных. В этом названии подчеркивается сложность их геометрической интерпретации. Покажем, что обобщение подхода FSTWF на суперпространство дает возможность геометрического описания эффектов, связанных с АММ на псевдоклассическом уровне.

Построение обобщенной теории, как и в п.1, начнем с выбора набора связностей $A_M$ автоматически удовлетворяющих связям (22) и (23). При использовании киральных интервалов решение этой задачи опять сводится к нахождению ядра интегрального представления

$$A_\alpha(x,\theta,\bar\theta) = \mu\int d\tau\,\hat{\mathcal{K}}^{(\mu)}_\alpha(\bar\Delta,\omega^\mu_\tau,\dot\xi^\alpha,\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha})\delta(s_R^2), \quad (73)$$

где $\mu$ — константа размерности длины (при $\hbar = c = 1$), которой приписывается физический смысл АММ частицы. Требования к виду ядра $\hat{\mathcal{K}}^{(\mu)}_\alpha$ те же, что и для $\hat{\mathcal{K}}^{(e)}_\alpha$ (29), но размерность его, очевидно, должна быть другой, поскольку в представлении (73) участвует новая размерная константа $\mu$. Это ядро, в отличие от ядра $\hat{\mathcal{K}}^{(e)}_\alpha$ (см. (30)), будет содержать слагаемое с векторной производной

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \mu\int d\tau\left[\dot\xi_\alpha - i\dot{\bar\xi}^{\dot\alpha}\bar\Delta\bar\Delta\partial_{\alpha\dot\alpha}\right]\delta(s_R^2),\\ \bar A_{\dot\alpha} &= -(A_\alpha)^* = -\mu\int d\tau\big[\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha} + \\ &\quad i\dot\xi^\alpha\Delta\Delta\partial_{\alpha\dot\alpha}\big]\delta(s_L^2). \end{aligned} \quad (74)$$

Киральный характер полученных потенциалов (74) очевиден. Представление для векторной компоненты связности выберем, как и в п.2, так, чтобы удовлетворялись уравнения связи (23)

$$\begin{aligned} A_\mu = -\frac{i\mu}{2}\int d\tau\Big\{&\Big[\Delta\Delta\dot\xi\sigma^\nu\bar\Delta\,(2\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box) - \\ & i\left(\dot\xi\Delta + \dot{\bar\xi}\bar\Delta\right)\partial_\mu + 2i\left(\dot\xi\sigma_{\nu\mu}\Delta + \right.\\ &\left.\dot{\bar\xi}\tilde\sigma_{\mu\nu}\bar\Delta\right)\partial^\nu\Big]\delta(s_L^2) + \Big[\bar\Delta\bar\Delta\Delta\sigma^\nu\dot{\bar\xi}\,(2\partial_\mu\partial_\nu - \\ & \eta_{\mu\nu}\Box) + i\left(\dot\xi\Delta + \dot{\bar\xi}\bar\Delta\right)\partial_\mu - \\ & 2i\left(\Delta\sigma_{\nu\mu}\dot\xi + \bar\Delta\tilde\sigma_{\mu\nu}\dot{\bar\xi}\right)\partial^\nu\Big]\delta(s_R^2)\Big\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Далее перепишем это представление в более компактной форме, используя соотношение (34)

$$\begin{aligned} A_\mu = \mu\int d\tau\Big[&2\left(\dot\xi\sigma_{\nu\mu}\Delta - \bar\Delta\tilde\sigma_{\mu\nu}\dot{\bar\xi}\right)\partial^\nu - \\ &\frac{i}{2}\left(\Delta\Delta\dot\xi\sigma^\rho\bar\Delta + \bar\Delta\bar\Delta\Delta\sigma^\rho\dot{\bar\xi}\right)\times \\ &(\partial_\rho\partial_\mu - \eta_{\rho\mu}\Box)\Big]\delta(s^2). \end{aligned} \quad (76)$$

Выбор коэффициентов в (74) был продиктован тем, что он приводит к суперполям $A^\mu$, удовлетворяющим условию лоренцевой калибровки (33). Отметим, что, в отличие от зарядового случая, оба слагаемых в представлениях спинорных потенциалов (74) удовлетворяют условию (45). Более того, они приводят к одним и тем же выражениям для $W^\alpha$ и $\bar W_{\dot\alpha}$.

Таким образом, мы снова получили теорию, в которой выполняются связи (22) и (23), а остаточные калибровочные преобразования имеют вид преобразований (36), (37). Спинорные напряженности $W^\alpha$ и $\bar W_{\dot\alpha}$ получим, подставляя в (41) представление (74) для потенциалов $A^\alpha$ и $\bar A^{\dot\alpha}$

$$\begin{aligned} W^\alpha = -\mu\int d\tau\Big[&i\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}\delta(s_L^2) + \\ &\dot\xi^\alpha\Delta\Delta\Box\delta(s_R^2)\Big] = -\mu\int d\tau\Big[\dot\xi^\alpha\Delta\Delta\Box + \\ &\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha}\Big(i\partial^{\dot\alpha\alpha} + \bar\Delta^{\dot\beta}\Delta^\beta\partial^{\dot\alpha\alpha}\partial_{\dot\beta\beta} + \\ &\frac{i}{4}\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\partial^{\dot\alpha\alpha}\Box\Big)\Big]\delta(s^2), \\ \bar W^{\dot\alpha} = (W^\alpha)^*.& \end{aligned} \quad (77)$$

После подстановки выражений для спинорных потенциалов (74) в соотношение (44) получим волновое уравнение (49), в котором поле $\Phi$ имеет смысл предпотенциала, вычисленного в калибровке (53)

$$\begin{aligned} \Phi = 4V = -4\mu\int d\tau&\left[\dot\xi\Delta\delta(s_R^2) + \dot{\bar\xi}\bar\Delta\delta(s_L^2)\right] = \\ -2\mu\int d\tau\big[&2(\dot\xi\Delta + \dot{\bar\xi}\bar\Delta) + i\big(\Delta\Delta\dot\xi\sigma^\mu\bar\Delta - \\ &\bar\Delta\bar\Delta\Delta\sigma^\mu\dot{\bar\xi}\big)\partial_\mu\big]\delta(s^2). \end{aligned} \quad (78)$$

Используя тождества (48), легко найти интегральное представление для суперполевого тока $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta) = -4\mu\int d\tau&\left[\dot\xi\Delta\delta^{(4)}(s_R) + \right.\\ &\left.\dot{\bar\xi}\bar\Delta\delta^{(4)}(s_L)\right] = -2\mu\int d\tau\Big[2(\dot\xi\Delta + \dot{\bar\xi}\bar\Delta) + \\ & i\left(\Delta\Delta\dot\xi\sigma^\mu\bar\Delta - \bar\Delta\bar\Delta\Delta\sigma^\mu\dot{\bar\xi}\right)\partial_\mu\Big]\delta^{(4)}(s). \end{aligned} \quad (79)$$

Суперток $\mathcal{J}$ (79) и предпотенциал $V$ (78) легко интерпретировать на языке функций Грина, поскольку для них выполняется условие, указанное в сноске на странице 309. Представление предпотенциала в форме (78) фиксирует калибровку, определяемую соотношениями (53), (56), поэтому для нахождения интегральных представлений компонентных полей и токов можно воспользоваться разложениями (56) и (61). В результате получим искомые интегральные представления для полей и токов максвелловского супермультиплета, обобщающие FSTWF представления (4) и (9) на случай нейтральных фермионов

$$v_\nu = \mu \int d\tau \Big[ -2i \left( \dot{\xi}\sigma_{\mu\nu}\xi - \bar{\xi}\tilde{\sigma}_{\nu\mu}\dot{\bar{\xi}} \right) \partial^\mu + \frac{1}{2} \left( \xi\xi\dot{\xi}\sigma^\rho\bar{\xi} + \bar{\xi}\bar{\xi}\xi\sigma^\rho\dot{\bar{\xi}} \right) (\eta_{\rho\nu}\Box - \partial_\rho\partial_\nu) \Big] \delta(s_0^2), \quad (80)$$

$$\lambda^\alpha = \mu \int d\tau \Big[ -i\dot{\xi}^\alpha\xi\xi\Box + \dot{\bar{\xi}}_{\dot{\alpha}} \partial^{\dot{\alpha}\alpha} + i\xi^\beta\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\dot{\beta}\beta} + \frac{1}{4}\xi\xi\bar{\xi}\bar{\xi}\partial^{\dot{\alpha}\alpha}\Box) \Big] \delta(s_0^2), \quad (81)$$

$$D = -\frac{1}{2}\mu \int d\tau \Big[ 2(\dot{\xi}\xi + \dot{\bar{\xi}}\bar{\xi}) + i(\xi\xi\dot{\xi}\sigma^\mu\bar{\xi} - \bar{\xi}\bar{\xi}\xi\sigma^\mu\dot{\bar{\xi}})\partial_\mu \Big] \Box\delta(s_0^2). \quad (82)$$

$$j_\nu^{(2)} = \mu \int d\tau \Big[ -2i \left( \dot{\xi}\sigma_{\mu\nu}\xi - \bar{\xi}\tilde{\sigma}_{\nu\mu}\dot{\bar{\xi}} \right) \partial^\mu + \frac{1}{2} \left( \xi\xi\dot{\xi}\sigma^\rho\bar{\xi} + \bar{\xi}\bar{\xi}\xi\sigma^\rho\dot{\bar{\xi}} \right) (\eta_{\rho\nu}\Box - \partial_\rho\partial_\nu) \Big] \delta^{(4)}(s_0), \quad (83)$$

$$j_\alpha^{(1)} = \mu \int d\tau \Big[ i\dot{\bar{\xi}}^{\dot{\alpha}}\bar{\xi}\bar{\xi}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} - \dot{\xi}_\alpha \big( 1 - i\xi\partial\bar{\xi} + \frac{1}{4}\xi\xi\bar{\xi}\bar{\xi}\Box \big) \Big] \delta^{(4)}(s_0). \quad (84)$$

Эти поля и токи, очевидно, подчиняются уравнениям Максвелла и Дирака (60).

Перейдем к нахождению уравнений движения системы нейтральных суперчастиц.

Будем использовать кинетическую часть функционала действия в виде (66). При построении $S_{int}$ необходимо учесть размерный характер константы взаимодействия $\mu$. Действие $S_{int}$ будет иметь правильную размерность, если использовать в нем "свертку" обобщенных скоростей пробной частицы не с потенциалами, а с напряженностями полей [4]. Характерными суперполевыми напряженностями теории являются спинорные поля $W^\alpha$ и $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$, поэтому действие естественно выбрать в виде

$$S_{int} = -\mu_1 \int d\eta \left( \dot{\theta}^\alpha W_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right). \quad (85)$$

После подстановки в (85) представлений (77) получим действие системы двух взаимодействующих нейтральных суперчастиц

$$S_{int\ 12} = \mu_1\mu_2 \int d\eta \int d\tau \Big[ \left( \dot{\theta}\dot{\xi}\Delta\Delta + \dot{\bar{\theta}}\dot{\bar{\xi}}\bar{\Delta}\bar{\Delta} \right) \Box + \left( \dot{\bar{\xi}}\partial\dot{\theta} + \dot{\bar{\theta}}\partial\dot{\xi} \right) \Delta\partial\bar{\Delta} + i \left( \dot{\bar{\xi}}\hat{\partial}\dot{\theta} - \dot{\bar{\theta}}\hat{\partial}\dot{\xi} \right) \left( 1 + \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar{\Delta}\bar{\Delta}\Box \right) \Big] \delta(s^2), \quad (86)$$

которое, очевидно, симметрично относительно перестановок частиц и может быть легко переписано для системы произвольного числа частиц

$$S^{(\mu)} = \sum_A S_{free\ A} + \sum_{\substack{A,B \\ A<B}} S_{int\ AB}. \quad (87)$$

Варьирование этого действия даст уравнения движения пробной нейтральной суперчастицы в поле системы нейтральных суперчастиц-источников

$$\begin{aligned}
(g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu})^\cdot &= -\mu_1 \left( \dot{\theta}^\alpha \partial_\mu W_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right), \\
g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar{\theta}})_\alpha &= \frac{i}{2}\mu_1 \left[ \omega_\eta^\mu \partial_\mu W_\alpha + \dot{\theta}^\beta (D_\beta W_\alpha + D_\alpha W_\beta) \right], \\
g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\dot{\theta}\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} &= -\frac{i}{2}\mu_1 \left[ \omega_\eta^\mu \partial_\mu \bar{W}_{\dot{\alpha}} + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\beta}} (\bar{D}^{\dot{\beta}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\beta}}) \right], \\
\omega_\eta^\mu \omega_{\eta\mu} &= m^2 g_\eta^2.
\end{aligned} \quad (88)$$

В этих уравнениях поля $W^\alpha$ и $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ подчиняются принципу суперпозиции и определяются представлением (77) для каждой частицы-источника. Уравнения (88), подобно уравнениям движения, приведенным в п.3, позволяют описать как массивный $mg_\eta = 1$, так и безмассовый ($\omega_\eta^\mu \omega_{\eta\mu} = 0$) $\dot{g}_\eta = 0$ случай.

# 6. Действие для системы заряженных суперчастиц с аномальным магнитным моментом в обобщенном FSTWF подходе

В предыдущих разделах работы были получены выражения для полей, генерируемых заряженной или нейтральной суперчастицей-источником, построены функционалы действия и выведены уравнения движения для систем таких суперчастиц. Предполагалось, что нейтральная частица имеет аномальный магнитный момент, а заряженная — нет. Возникает вопрос о возможности воздействия нейтральных частиц с АММ на заряженные и наоборот. Очевидно, решение этой задачи позволит также описывать взаимодействие заряженных частиц, обладающих АММ.

[4] Аналогичная ситуация имеет место и при описании взаимодействий спиновой частицы посредством ее АММ [19].

Для решения поставленной задачи в терминах полей достаточно воспользоваться принципом суперпозиции. Тогда на заряженную частицу будут воздействовать поля $F_{MN}$, построенные на суперпотенциалах $A^{(e)M}$ (30), (32) и $A^{(\mu)M}$ (74), (76)

$$A^M = A^{(e)M} + A^{(\mu)M}, \tag{89}$$

а на частицу с АММ те же поля будут воздействовать непосредственно через напряженности $W^{(e)}$ (43) и $W^{(\mu)}$ (77)

$$W^\alpha = W^{(e)\alpha} + W^{(\mu)\alpha}, \quad \bar{W}^{\dot\alpha} = (W^\alpha)^*. \tag{90}$$

Полное действие $S_{int}$ может быть получено как сумма действий (70) и (86) после замены в них напряженностей $W^\alpha$, $\bar{W}_{\dot\alpha}$ и потенциалов $A^M$ на соответствующие величины (90) и (89), учитывающие вклад как от заряженных частиц-источников, так и от частиц с АММ

$$\begin{aligned} S_{int} = i\int d\eta \left[e_1\omega^N_\eta A_N + i\mu_1(\dot\theta^\alpha W_\alpha + \dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha})\right] = \\ i\int d\eta \Big[e_1\omega^\nu_\eta A_\nu + \dot\theta^\alpha(e_1A_\alpha + i\mu_1 W_\alpha) + \\ \dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}(e_1\bar{A}^{\dot\alpha} + i\mu_1\bar{W}^{\dot\alpha})\Big]. \end{aligned} \tag{91}$$

Уравнения движения системы суперчастиц произвольного типа получим, варьируя действие (91) вместе со свободным действием (66)

$$\begin{aligned} (g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu})^{\cdot} =& -ie\omega^M_\eta F_{M\mu} - \mu\Big(\dot\theta^\alpha\partial_\mu W_\alpha + \\ & \dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}\partial_\mu\bar{W}^{\dot\alpha}\Big) \\ g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha =& \frac{1}{2}e\omega^M_\eta F_{M\alpha} + \frac{i}{2}\mu\left[\omega^\nu_\eta\partial_\nu W_\alpha + \right. \\ & \dot\theta^\beta(D_\beta W_\alpha + D_\alpha W_\beta) + \\ & \left.\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}(\bar{D}^{\dot\alpha}W_\alpha + D_\alpha\bar{W}^{\dot\alpha})\right], \\ g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} =& -\frac{1}{2}e\omega^M_\eta F_{M\dot\alpha} - \frac{i}{2}\mu\big[\omega^\nu_\eta\partial_\nu\bar{W}_{\dot\alpha} + \\ & \dot\theta^\beta(D_\beta\bar{W}_{\dot\alpha} + \bar{D}_{\dot\alpha}W_\beta) + \\ & \dot{\bar\theta}_{\dot\beta}(\bar{D}^{\dot\beta}\bar{W}_{\dot\alpha} + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\beta})\big] \\ \omega^\mu_\eta\omega_{\eta\mu} =& m^2g^2_\eta. \end{aligned} \tag{92}$$

После учета связей (22), (23) и перехода от $F_{MN}$ к спинорным суперполям $W^\alpha$ и $\bar{W}_{\dot\alpha}$, эти уравнения переписываются в виде

$$\begin{aligned} (g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu})^{\cdot} =& \frac{i}{2}e\omega^\nu_\eta(\bar{D}\tilde\sigma_{\nu\mu}\bar{W} - D\sigma_{\nu\mu}W) - \\ & \dot\theta^\alpha\Xi_{\mu\alpha} - \bar\Xi_{\mu\dot\alpha}\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}, \\ g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha =& \frac{i}{2}\left[\omega^\mu_\eta\Xi_{\mu\alpha} + \right. \\ & \left.\mu\dot\theta^\beta(D_\beta W_\alpha + D_\alpha W_\beta)\right], \\ g^{-1}_\eta\omega_{\eta\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} =& -\frac{i}{2}\left[\omega^\mu_\eta\bar\Xi_{\mu\dot\alpha} + \right. \\ & \left.\mu\dot{\bar\theta}_{\dot\beta}(\bar{D}^{\dot\beta}\bar{W}_{\dot\alpha} + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\beta})\right], \\ \omega^\mu_\eta\omega_{\eta\mu} =& m^2g^2_\eta, \end{aligned} \tag{93}$$

где $\Xi$, $\bar\Xi$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Xi_{\mu\alpha} &\equiv e(\sigma_\mu\bar{W})_\alpha + \mu\partial_\mu W_\alpha, \\ \bar\Xi_{\mu\dot\alpha} &\equiv e(W\sigma_\mu)_{\dot\alpha} + \mu\partial_\mu\bar{W}_{\dot\alpha}. \end{aligned}$$

Уравнения (92) и (93), подобно уравнениям движения, приведенным в п.3 и п.4, позволяют описать случаи массивной и безмассовой пробной частицы.

Полное действие $S_{int}$ (91) может быть переписано без участия полевых переменных, в терминах одних мировых суперкоординат частиц, если подставить в (91) интегральные представления для полей $W^\alpha$, $\bar{W}_{\dot\alpha}$ (90) и $A^M$ (89), взяв их из предыдущих разделов работы. Полученное действие будет симметричным относительно перестановок частиц и поэтому может быть записано сразу для системы суперчастиц

$$\begin{aligned} S_{int} = \sum_{\substack{A,B\\A<B}} S^{(ee)}_{int\ AB} + S^{(\mu\mu)}_{int\ AB} + \\ S^{(e\mu)}_{int\ AB} + S^{(\mu e)}_{int\ AB}. \end{aligned} \tag{94}$$

Выражения для $S^{(ee)}_{int\ AB}$ и $S^{(\mu\mu)}_{int\ AB}$ совпадают с выражениями (70) и (85) соответственно и описывают взаимодействия типа "заряд-заряд" и "АММ-АММ". Приведем здесь явный вид выражений для $S^{(e\mu)}_{int\ AB}$ и $S^{(\mu e)}_{int\ AB}$, которые описывают взаимодействия "заряд-АММ"

$$\begin{aligned} S^{(e\mu)}_{int\ 12} = e_1\mu_2\int d\eta\int d\tau\Big[2i\omega_{\eta\mu}(\dot\xi\sigma^{\nu\mu}\Delta - \\ \bar\Delta\tilde\sigma^{\mu\nu}\dot{\bar\xi})\partial_\nu + \frac{1}{2}\omega^\mu_\eta(\Delta\Delta\dot\xi\sigma^\rho\bar\Delta + \bar\Delta\bar\Delta\Delta\sigma^\rho\dot{\bar\xi})(\partial_\rho\partial_\mu - \\ \eta_{\rho\mu}\Box) + i(\dot\theta\dot\xi + \dot{\bar\theta}\dot{\bar\xi})\Delta\partial\bar\Delta + \frac{i}{4}(\dot\theta\dot\xi - \dot{\bar\theta}\dot{\bar\xi})\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\Box + \\ \bar\Delta\bar\Delta\dot\theta\partial\dot{\bar\xi} + \Delta\Delta\dot\xi\partial\dot{\bar\theta}\Big]\delta(s^2), \end{aligned}$$

$$S^{(\mu e)}_{int\ 12} = \mu_1 e_2 \int d\eta \int d\tau \Big[ 2i\omega_{\tau\mu}(\Delta\sigma^{\nu\mu}\dot\theta + \dot{\bar\theta}\tilde\sigma^{\mu\nu}\bar\Delta)\partial_\nu + \frac{1}{2}\omega^\mu_\tau(\Delta\Delta\bar\Delta\tilde\sigma^\rho\dot\theta + \bar\Delta\bar\Delta\dot{\bar\theta}\tilde\sigma^\rho\Delta)\times (\partial_\mu\partial_\rho - \eta_{\mu\rho}\Box) + i(\dot\theta\dot\xi - \dot{\bar\theta}\dot{\bar\xi})\Delta\partial\bar\Delta + i(\dot\theta\dot\xi - \dot{\bar\theta}\dot{\bar\xi})\times (1 + \frac{1}{4}\Delta\Delta\bar\Delta\bar\Delta\Box) + \Delta\Delta\dot{\bar\xi}\partial\dot\theta + \bar\Delta\bar\Delta\dot{\bar\theta}\partial\dot\xi\Big]\delta(s^2).$$

## 7. Обобщенный принцип минимальности электромагнитных взаимодействий

Выражение (91) для действия $S_{int}$ генерирует новое представление для действия суперсимметричной электродинамики в терминах мировых координат заряженных частиц с АММ. Действие (91), в действительности, содержит в себе расширение стандартного минимального принципа, используемого для описания электромагнитных взаимодействий. Это видно уже из того, что "заряды" $e \equiv e_1$ и $i\mu \equiv \mu_1$ занимают в $S_{int}$ симметричное положение. Если в слагаемых, которые содержат спинорные скорости $\dot\theta^\alpha$ и $\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}$, произвести перестановку этих зарядов и одновременную перестановку спинорных суперпотенциалов ($A^\alpha$, $\bar A_{\dot\alpha}$) со спинорными напряженностями ($W^\alpha$, $\bar W_{\dot\alpha}$), то действие $S_{int}$ не изменится. Указанная симметрия становится очевидной, если ввести двухкомпонентный "заряд" $q^\Lambda$ и "связность" $G^\Lambda_M$

$$\begin{aligned} q^\Lambda &= (e, i\mu), \\ G^\Lambda_M &= \begin{pmatrix} A_M \\ W_M \end{pmatrix}, \\ W_M &\equiv (0, W_\alpha, \bar W^{\dot\alpha}). \end{aligned} \tag{95}$$

Тогда действие (91) можно переписать в эквивалентной форме

$$S^{(e,\mu)}_{int} = i\int d\tau\, \omega^M_\tau q^\Lambda G^\Lambda_M. \tag{96}$$

Такая форма действия выражает принцип минимальности в суперпространстве $z^M$ для взаимодействий, определяемых зарядом $q^\Lambda$. Действительно, добавление $S_{int}$ (96) к свободному действию спинорных частиц $S_{free}$ (66) эквивалентно удлинению суперсимметричных производных $D_M = (\partial_\mu, D_\alpha, \bar D^{\dot\alpha})$

$$\begin{aligned} D_M \mapsto \tilde\nabla_M &= D_M + q^\Lambda G^\Lambda_M = \\ &D_M + eA_M + i\mu W_M. \end{aligned} \tag{97}$$

Такое удлинение не нарушает $U(1)$-инвариантность стандартной "длинной" производной

$$\nabla_M = D_M + eA_M, \tag{98}$$

поскольку к ней добавляются инвариантные относительно $U(1)$-калибровочных преобразований спинорные напряженности $(W_\alpha, \bar W^{\dot\alpha})$.

При довольно слабых допущениях, предлагаемая процедура дополнительного удлинения стандартной ковариантной производной $\nabla_M$ является однозначной. Действительно, как известно из геометрии, символы Кристоффеля можно сдвигать на тензор кручения, расширяя, тем самым, исходное риманово пространство до пространства с ненулевым кручением. В рассматриваемой здесь суперсимметричной электродинамике тензорными объектами аналогичными кручению являются компоненты суперполевой напряженности $F_{MN}$. Поэтому при дополнительном удлинении производных $\nabla_M$

$$\begin{aligned} \nabla_M \mapsto \tilde\nabla_M &= \nabla_M + i\mu\tilde W_M = \\ &D_M + eA_M + i\mu\tilde W_M, \end{aligned} \tag{99}$$

естественно ограничится добавками, построенными из суперполевых компонент напряженности $F_{MN}$. Поскольку константа $\mu$ имеет размерность длины $L$, компоненты суперполя $\tilde W_M$ (99) должны иметь фиксированные размерности $[\tilde W_\mu] = L^{-2}$, $[\tilde W_\alpha] = L^{-3/2}$. Нетрудно убедиться, что из компонент $F_{MN}$ нельзя построить линейный по ним лоренцев вектор $\tilde W_\mu$ с размерностью $L^{-2}$. В то же время, свертка вида $F_{\mu\dot\alpha}\tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}$ дает инвариантное спинорное суперполе нужной размерности $L^{-3/2}$. Поэтому, в качестве $U(1)$- и суперсимметричного инварианта достаточно выбрать суперполе

$$\tilde W_M = \frac{i}{4}(0, -\sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}F^{\mu\dot\alpha}, \tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}F_{\mu\alpha}). \tag{100}$$

После учета связей (22) и (23) это суперполе будет эквивалентно спинорным напряженностям $W_\alpha, \bar W^{\dot\alpha}$ (40) и совпадет с суперполем $W_M$ (96) из действия (96).

Новые расширенные $U(1)$-инвариантные напряженности $G^\Lambda_{MN}$ строятся из $\tilde\nabla_M$ и $G^\Lambda_M$ по обычным правилам и выражаются с учетом (100) через $F_{MN}$

следующим образом

$$
\begin{aligned}
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\nu} =& eF_{\mu\nu},\\
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\alpha} =& eF_{\mu\alpha} + i\mu\partial_\mu \tilde{W}_\alpha = eF_{\mu\alpha}+\\
& \frac{1}{4}\mu\sigma_{\rho\alpha\dot\alpha}\partial_\mu F^{\rho\dot\alpha},\\
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\dot\alpha} =& eF_{\mu\dot\alpha} + i\mu\partial_\mu \bar{\tilde{W}}_{\dot\alpha} =\\
& eF_{\mu\dot\alpha} + \frac{1}{4}\mu\sigma_{\rho\alpha\dot\alpha}\partial_\mu F^{\rho\alpha},\\
q^\Lambda G^\Lambda_{\alpha\beta} =& eF_{\alpha\beta} + i\mu(D_\alpha \tilde{W}_\beta + D_\beta \tilde{W}_\alpha) =\\
& eF_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\mu\big(\sigma_{\mu\beta\dot\alpha}D_\alpha F^{\mu\dot\alpha}+\\
& \sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}D_\beta F^{\mu\dot\alpha}\big),\\
q^\Lambda G^\Lambda_{\dot\alpha\dot\beta} =& eF_{\dot\alpha\dot\beta} + i\mu(\bar D_{\dot\alpha} \bar{\tilde{W}}_{\dot\beta} + \bar D_{\dot\alpha} \bar{\tilde{W}}_{\dot\alpha}) =\\
& eF_{\dot\alpha\dot\beta} + \frac{1}{4}\mu\big(\sigma_{\mu\alpha\dot\beta}\bar D_{\dot\alpha} F^{\mu\alpha}+\\
& \sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}\bar D_{\dot\beta} F^{\mu\alpha}\big),\\
q^\Lambda G^\Lambda_{\alpha\dot\beta} =& eF_{\alpha\dot\beta} + i\mu(D_\alpha \bar{\tilde{W}}_{\dot\beta} + \bar D_{\dot\beta} \tilde{W}_\alpha) =\\
& eF_{\alpha\dot\beta} + \frac{1}{4}\mu\big(\sigma_{\mu\beta\dot\beta}D_\alpha F^{\mu\beta}+\\
& \sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}\bar D_{\dot\beta} F^{\mu\dot\alpha}\big).
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Варьируя полное действие, являющееся суммой $S_{int}$ (96) и $S_{free}$ (66)

$$
S = \frac{1}{2}\int d\eta\left[\frac{\omega^\mu_\eta \omega_{\eta\mu}}{g_\eta} + g_\eta m^2\right] + i\int d\eta\, \omega^M_\eta q^\Lambda G^\Lambda_M,
$$

получим уравнения движения пробной суперчастицы с зарядом $e$ и АММ $\mu$ во внешних полях суперсимметричной $U(1)$-калибровочной теории

$$
\begin{aligned}
(g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu})^{\cdot} &= -i\omega^M_\eta q^\Lambda G^\Lambda_{M\mu},\\
g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\sigma^\mu \dot{\bar\theta})_\alpha &= \frac{1}{2}\omega^M_\eta q^\Lambda G^\Lambda_{M\alpha},\\
g_\eta^{-1}\omega_{\eta\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= -\frac{1}{2}\omega^M_\eta q^\Lambda G^\Lambda_{M\dot\alpha},\\
\omega^\mu_\eta\omega_{\eta\mu} &= m^2 g^2_\eta.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Как уже отмечалось, для массивной частицы эти уравнения упрощаются выбором калибровки айнбайна $mg_\eta = 1$, эквивалентной условию $\omega^\mu_\eta\omega_{\eta\mu} = 1$, а для безмассовой — выбором калибровки $\dot g_\eta = 0$ и условием $\omega^\mu_\eta\omega_{\eta\mu} = 0$. После использования связей (22) и (23) выражения (96) и (102) будут описывать суперчастицу в полях максвелловского супермультиплета и могут быть переписаны в виде (91) и (93) соответственно.

Покажем теперь, что константа $\mu$ действительно имеет смысл АММ частицы. Ограничиваясь для простоты случаем нейтральных частиц ($e = 0$), взаимодействующих только с электромагнитным полем и учитывая первую пару уравнений Максвелла $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu v_{\rho\lambda} = 0$, запишем действие (96) в виде

$$
\begin{aligned}
S^{(e,\mu)}_{int}\Big|_{e=0} &= i\mu\int d\eta\left[(\dot\theta\sigma^{\mu\nu}\theta) - (\dot{\bar\theta}\tilde\sigma^{\mu\nu}\bar\theta)\right]v_{\mu\nu}+\\
&\frac{1}{2}\mu\int d\eta\left[\theta\theta(\dot\theta\sigma^\mu\bar\theta) + \bar\theta\bar\theta(\theta\sigma^\mu\dot{\bar\theta})\right]\partial^\rho v_{\rho\mu}.
\end{aligned}
\tag{103}
$$

В рассматриваемом здесь псевдоклассическом случае спиновые степени свободы частицы описываются грассмановыми спинорами $\theta_\alpha(\eta)$ и их производными $\dot\theta_\alpha(\eta)$. Поэтому можно рассматривать спиноры $\theta$ и $\dot\theta$ в качестве псевдоклассического аналога компонент волновой функции спинорной частицы. Объединим эти переменные в один дираковский биспинор $\psi$ и от матрицы $\sigma_{\mu\nu\,\alpha}{}^\beta$ перейдем к дираковскому оператору спина $\Sigma_{\mu\nu}$ [20, 21]

$$
\psi = \begin{pmatrix}\dot\theta_\alpha\\ \bar\theta^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],
\tag{104}
$$

где $\gamma_\mu$ — матрицы Дирака в вейлевском представлении (116). Тогда действие (103) перепишется в эквивалентной форме

$$
\begin{aligned}
S^{(e,\mu)}_{int}\Big|_{e=0} &= -\mu\int d\eta\,\big[(\bar\psi\Sigma_{\mu\nu}\psi)v^{\mu\nu}-\\
&\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}(\bar\psi_R\gamma_\mu\psi_R)(\bar\psi\Sigma_{\nu\rho}\psi)\partial^\sigma v_{\sigma\lambda}\big],
\end{aligned}
\tag{105}
$$

где $\psi_R$ ($\psi_L$) обозначает правые (левые) киральные компоненты спинора $\psi$

$$
\begin{aligned}
\psi_{\binom{R}{L}} &= \frac{1 \mp i\gamma_5}{2}\psi,\\
\bar\psi_{\binom{R}{L}} &= \bar\psi\frac{1 \mp i\gamma_5}{2},\\
\gamma_5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= \begin{pmatrix} -iI & 0\\ 0 & iI\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Первое слагаемое в (105) имеет вид паулиевского члена и, значит, константе $\mu$ можно приписать физический смысл АММ частицы, выраженного в магнетонах Бора. Второе слагаемое в (105), также содержащее в псевдоклассическом пределе матричный элемент оператора спина $(\bar\psi\Sigma_{\nu\rho}\psi)$ и отличное от нуля лишь в присутствии источников внешнего электромагнитного поля $v_\mu$, т.е. при $\partial^\lambda v_{\lambda\mu} \neq 0$, описывает релятивистские спиновые эффекты. Пользуясь псевдоскалярными тождествами Фирца [22], можно представить это слагаемое в эквивалентной форме в виде произведения токов $\mu\int d\tau(\bar\psi_R\gamma^\mu\psi_R)(\bar\psi\psi)\partial^\lambda v_{\lambda\mu}$.

Для обоснования рассмотренного выше перехода от спинорных координат суперпространства $\bar\theta^{\dot\alpha}$ и их производных $\dot\theta_\alpha$ к спинорным полям $\psi(x)$ (106) заметим, что аналогичный прием используется в теории $\sigma$-моделей при переходе от координат внутреннего однородного пространства к физическим полям [23]. При этом линейные реализации соответствующих групп симметрии заменяются на нелинейные. Здесь предполагается возможность обобщения такого перехода на пару $\begin{pmatrix}\dot\theta_\alpha\\ \bar\theta^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$, которую можно рассматривать как координату расслоенного пространства. Строгое обоснование такого обобщения предполагает построение соответствующей нелинейной реализации глобальной суперсимметрии, аналогичной [24], и является предметом отдельного рассмотрения. Тем не менее, для изучения возможных физических эффектов, связанных с расширением принципа минимальности, может оказаться полезным предварительное обсуждение результатов такого обобщения, проведенное ниже.

Рассмотрим ту часть действия (96), которая описывает электромагнитное взаимодействие частиц, обусловленное их АММ. Соответствующий лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}^{(\mu)}_{int}$, записанный в терминах дираковских спиноров $\psi_{\binom{R}{L}}$ (106) и $\Lambda_{\binom{R}{L}}$, которые описывают поле фотино

$$\Lambda_{\binom{R}{L}} = \frac{1\pm i\gamma_5}{2}\Lambda, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_\alpha\\ \bar\lambda^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \tag{107}$$

принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(\mu)}_{int} = \mu\Big\{ & i(\bar\Lambda_R\psi_L - \bar\psi_L\Lambda_R) - \bar\psi\psi)\big[D- \\ & j^\mu_R\partial^\lambda v_{\lambda\mu}\big] - M_{\mu\nu}\big[v^{\mu\nu} - j^\mu_R\partial^\nu D + i(\partial^\nu\Lambda_R\gamma^\mu\psi_R - \\ & \bar\psi_R\gamma^\mu\partial^\nu\Lambda_R)\big] + \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}M_{\rho\lambda}(\partial_\nu\bar\Lambda_R\gamma_\mu\psi_R + \\ & \bar\psi_R\gamma_\mu\partial_\nu\Lambda_R) - j^\mu_R(\partial_\mu\bar\Lambda_R\psi_L + \bar\psi_L\partial_\mu\Lambda_R) - \\ & \frac{i}{8}j^\mu_R j_{R\mu}(\Box\bar\Lambda_R\psi_L - \bar\psi_L\Box\Lambda_R)\Big\},\end{aligned} \tag{108}$$

где $M_{\mu\nu}$ и $j^\mu_R$ обозначают среднее спинового момента спинорной частицы и нейтральный векторный ток правых компонент биспинора $\psi$ (106) соответственно

$$M_{\mu\nu} = (\bar\psi\Sigma_{\mu\nu}\psi), \qquad j^\mu_R = (\bar\psi_R\gamma^\mu\psi_R). \tag{109}$$

В первую очередь заметим, что лагранжиан (108) имеет токовую структуру подобную токовой структуре лагранжиана электрослабых взаимодействий в низкоэнергетическом приближении и содержит дополнительные 2-х, 4-х и 6-ти фермионные контактные вершины, описывающие взаимодействие нейтральных суперчастиц и полей максвелловского супермультиплета. Особенностью данного лагранжиана является асимметрия между левыми и правыми состояниями биспинора $\psi$. Она, в частности, проявляется в том, что правые состояния формируют как свой нейтральный векторный ток $j^\mu_R$, так и нейтральный векторный ток, описывающий их переходы в фотино. Левые состояния суперчастиц формируют скалярные нейтральные токи (с пространственно-временной производной или без нее), описывающие их переходы в фотино. Различными являются также структуры вершин, соответствующих взаимодействию суперчастиц с электромагнитным током и вспомогательным полем $D$. Характерным является присутствие в лагранжиане (108) двухточечной вершины, отвечающей прямым переходам левых состояний в фотино. Из классических уравнений (102) видно, что левые состояния $\psi_L = \begin{pmatrix}\dot\theta_\alpha\\ 0\end{pmatrix}$ можно рассматривать как волновые функции нейтрино, если перейти от форм $\omega_{\tau\mu}$ к каноническим импульсам, а последние заменить на пространственно-временные производные. После такого перехода второе из уравнений (102) становится аналогичным уравнению Вейля, правая часть которого описывает электромагнитное взаимодействие нейтрино. Поэтому присутствие двухточечных вершин в лагранжиане (108) указывает на возможность нейтринно-фотинных осцилляций, имеющих электромагнитную природу.

Ясно, что рассмотренные здесь возможные следствия расширенного принципа минимальности являются лишь предварительными. Мы сочли уместным привести их здесь, чтобы показать, почему расширенный принцип минимальности заслуживает всестороннего изучения. Физически обоснованный и математически корректный путь описания этих эффектов состоит в квантовании псевдоклассического действия (96). Это позволит устранить нильпотентный характер псевдоклассических выражений, содержащих грассмановы переменные $\theta$ и $\dot\theta$, получить БРСТ заряд и определить пространство физических состояний рассматриваемой теории. Эта программа является темой отдельного исследования.

## 8. Заключение

Здесь мы предложили суперсимметричное обобщение FSTWF электродинамики заряженных бесспиновых частиц на случай заряженных частиц со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом. В результате FSTWF подход был расширен на поле фотино, несущее спин $1/2$, и скалярное поле максвелловского супермультиплета. Тем самым был пополнен список полей, к которым применим FSTWF подход, что позволяет надеяться на его возможную универсальность при построении других калибровочных полей из координат мировых линий взаимодействующих частиц, например цветных кварков.

В ходе построения суперсимметричного действия для взаимодействующих заряженных суперчастиц с АММ было предложено обобщение стандартного принципа минимального включения электромагнитного взаимодействия. Это обобщение не связано с особенностями FSTWF формулировки, имеет универсальный характер и может быть применено в стандартных полевых подходах, в частности, при построении суперсимметричной электродинамики Максвелла. Тем самым, удается расширить действие минимального принципа на описание электромагнитных взаимодействий, обусловленных наличием у полей материи аномального магнитного момента. Предварительное рассмотрение физических следствий применения расширенного принципа минимальности показывает важность рассмотрения обобщенной FSTWF формулировки электрослабых взаимодействий, в частности, построения полей $W$ и $Z$ калибровочных бозонов из мировых координат суперпространств с расширенной внутренней группой симметрии. Возможно, это приведет к альтернативному механизму генерации масс у векторных бозонов и вскроет нетривиальную роль нейтринно-фотинных взаимодействий.

Другое интересное обобщение состоит в применении суперсимметризованного FSTWF подхода к описанию динамики суперструн. Возможность такого обобщения на суперструны вытекает как из того, что суперчастицы являются нулевыми модами суперструн, так и из результатов Калба и Рамона [9] для бозонных струн.

Имеется также ряд интересных космологических применений развитого подхода, в частности, при решении проблемы скрытой массы, при описании нейтронных звезд и других объектов Вселенной с нетривиальной спиновой структурой.

Авторы благодарят Д. В. Волкова, Ю. А. Пересунько, А. П. Рекало и Ю. П. Степановского за обсуждение вопросов, затронутых в работе. Работа частично поддержана грантом RY9200 Международного Научного Фонда Сороса, грантами INTAS 93-127, 93-633, грантом INTAS и “Dutch Government Grant” 94-2317 и грантом Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

# 9. Приложения

Метрические и спинорные соглашения, соотношения спинорной алгебры:

$$\eta_{\mu\nu} \sim (-1,1,1,1);\ \varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1;\ \varepsilon_{0123} = 1; \tag{110}$$

$$\begin{aligned} \theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta, \qquad \theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta, \\ \theta\xi = \theta^\alpha\xi_\alpha = -\theta_\alpha\xi^\alpha = \xi^\alpha\theta_\alpha = \xi\theta \\ \bar\theta\bar\xi = \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha} = -\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\xi_{\dot\alpha} = \bar\xi_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} = \bar\xi\bar\theta; \end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned} \theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \quad \bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta. \\ \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} = -\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}D_\beta = D^\alpha. \end{aligned} \tag{112}$$

Сигма-матрицы — свойства, обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}; \\ \partial_{\alpha\dot\alpha} \equiv \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu, \\ \partial^{\dot\alpha\alpha} \equiv \tilde\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\partial_\mu. \end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\tilde\sigma^{\nu\dot\alpha\alpha} = -2\eta^{\mu\nu}, \\ \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\tilde\sigma^{\mu\dot\beta\beta} = -2\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}, \\ (\sigma^{(\mu}\tilde\sigma^{\nu)})_\alpha{}^\beta = -\eta^{\mu\nu}\delta^\beta_\alpha, \\ (\tilde\sigma^{(\mu}\sigma^{\nu)})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = -\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}, \\ (\sigma^{[\mu}\tilde\sigma^{\nu]})_\alpha{}^\beta \equiv 2\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta, \\ (\tilde\sigma^{[\mu}\sigma^{\nu]})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \equiv 2\tilde\sigma^{\mu\nu}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}. \end{aligned} \tag{115}$$

Матрицы Дирака в вейлевском базисе:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{116}$$

Компоненты калибровочной 2-формы кривизны $F_{MN}$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} =& \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ F_{\mu\alpha} =& \partial_\mu A_\alpha - D_\alpha A_\mu, \\ F_{\mu\dot\alpha} =& \partial_\mu \bar A_{\dot\alpha} - \bar D_{\dot\alpha} A_\mu, \\ F_{\alpha\beta} =& D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha, \\ F_{\dot\alpha\dot\beta} =& \bar D_{\dot\alpha}\bar A_{\dot\beta} + \bar D_{\dot\beta}\bar A_{\dot\alpha}, \\ F_{\alpha\dot\beta} =& D_\alpha \bar A_{\dot\beta} + \bar D_{\dot\beta}A_\alpha + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}A_\mu. \end{aligned} \tag{117}$$

Тождества Бьянки на компоненты 2-формы кривизны:

$$\begin{aligned} \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \\ D_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \\ \bar D_{\dot\alpha} F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\dot\alpha} + \partial_\nu F_{\dot\alpha\mu} = 0 \\ \partial_\mu F_{\beta\alpha} + D_\beta F_{\alpha\mu} - D_\alpha F_{\beta\mu} = 0 \\ \partial_\mu F_{\dot\beta\dot\alpha} + \bar D_{\dot\beta} F_{\dot\alpha\mu} - \bar D_{\dot\alpha} F_{\dot\beta\mu} = 0 \\ \partial_\mu F_{\dot\beta\alpha} + \bar D_{\dot\beta} F_{\alpha\mu} - D_\alpha F_{\mu\dot\beta} + \\ 2i\sigma^\rho_{\alpha\dot\beta} F_{\rho\mu} = 0 \\ D_\gamma F_{\beta\alpha} + D_\beta F_{\alpha\gamma} + D_\alpha F_{\gamma\beta} = 0 \\ \bar D_{\dot\gamma} F_{\beta\alpha} + D_\beta F_{\alpha\dot\gamma} + D_\alpha F_{\dot\gamma\beta} + \\ 2i\sigma^\rho_{\beta\dot\gamma} F_{\rho\alpha} + 2i\sigma^\rho_{\alpha\dot\gamma} F_{\rho\beta} = 0 \\ D_\gamma F_{\dot\beta\dot\alpha} + \bar D_{\dot\beta} F_{\dot\alpha\gamma} + \bar D_{\dot\alpha} F_{\gamma\dot\beta} + \\ 2i\sigma^\rho_{\gamma\dot\beta} F_{\rho\dot\alpha} + 2i\sigma^\rho_{\gamma\dot\alpha} F_{\rho\dot\beta} = 0 \\ \bar D_{\dot\gamma} F_{\dot\beta\dot\alpha} + \bar D_{\dot\beta} F_{\dot\alpha\dot\gamma} + \bar D_{\dot\alpha} F_{\dot\gamma\dot\beta} = 0, \end{aligned} \tag{118}$$

## Список литературы

[1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory* (Cambr. Univ. Press, New York, 1987).

[2] A. D. Fokker, Zeitschrift f́ur Physik **58**, 386 (1929), and Phisica **9**, 83 (1929); Physica **12**, 145 (1932).

[3] K. Schwarzschild, Ǵottinger Nachrichten **128**, 132 (1903).

[4] H. Tetrode, Zeitschrift f́ur Physik **10**, 317 (1922).

[5] J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Willey & Jons, NY, 1972)

[7] F. Hoyle and J. V. Narlikar, Proc. Roy. Soc. **A277**, No.1 (1964).

[8] F. Hoyle and J. V. Narlikar, Ann. Phys. **54**, 207 (1964).

[9] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. **D9**, 2273 (1974).

[10] P. van Nieuwenhuizen, Phys. Reports **68**, No.4 (1981).

[11] E. Gava, *Topological Amplitudes in String Theory*, in the Proceedings of the Workshop on Strings, Gravity and Related topics, ICTP, Trieste, 1994.

[12] M. Bershadsky, *Topological N=2 String Theory*, in the Proceedings of the Summer School in High Energy and Cosmology, ICTP, Trieste, 1994.

[13] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A167**, 148 (1938).

[14] Д. В. Волков, В. П. Акулов, Письма в ЖЭТФ **16**, 621 (1972).

[15] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity* (Prin. Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1983).

[16] А. С. Давыдов, *Квантовая механика* (М.: Физ. Мат. Гиз., 1963).

[17] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, Phys. Lett. **B65**, 471 (1976).

[18] L. Lusanna and B. Milevski, Nucl. Phys. **B247**, 396 (1984).

[19] А. А. Желтухин, ТМФ **64**, 500 (1985).

[20] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1969).

[21] Л. Б. Окунь, *Физика элементарных частиц* (М.: Наука, 1984).

[22] Ю. П. Степановский, УФЖ **XI**, 1991 (1966).

[23] Д.В. Волков, ЭЧАЯ **4**, 3 (1973).

[24] А. И. Пашнев, ТМФ **20**, 141 (1974).