

Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках

Варшавская Н.А., Гандель Ю.В.
Харьковский Государственный Университет
61077, Украина, Харьков, пл. Свободы 4
e-mail: gandel@ilt.kharkov.ua

Содержание

1. Введение	455
2. Задача дифракции электромагнитной волны на ограниченной решетке	456
2.1. Постановка задачи	456
2.2. Парные интегральные уравнения	457
2.3. Сингулярные интегральные уравнения	457
2.4. Дискретные математические модели	458
2.5. Алгоритм для численного анализа математических моделей	458
2.6. Поля в дальней зоне	459
3. Задача дифракции электромагнитной волны на решетке с предканторовым множеством элементов на периоде	460
3.1. Постановка задачи	460
3.2. Парные ряды Фурье	460
3.3. Сингулярные интегральные уравнения	461
3.4. Дискретная математическая модель	462
4. Некоторые результаты численного эксперимента	463

Аннотация

Построены дискретные математические модели дифракции плоской монохроматической волны на идеально проводящей бесконечно тонкой предканторовой ограниченной решетке и на периодической многоэлементной решетке с предканторовым множеством лент на периоде. Изложение основано на разработанных одним из авторов численно-аналитическом методе, позволившем свести все рассматриваемые задачи дифракции к сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков и его последующем численном решении методом дискретных особенностей (МДО).

1. Введение

Предканторовыми множествами отрезков называем системы отрезков $L^{(n)}(0, l)$, полученные по принципу построения канторова множества на n -ом шаге [1]: $L^{(0)}(0, l) = (0, l)$, $L^{(1)}(0, l) = (0, \frac{l}{3}) \cup (\frac{2l}{3}, l)$, $L^{(2)}(0, l) = (0, \frac{l}{9}) \cup (\frac{2l}{9}, \frac{l}{3}) \cup (\frac{2l}{3}, \frac{7l}{9}) \cup (\frac{8l}{9}, l)$ и т.д.

Выберем декартову систему координат так, чтобы решетка лежала в плоскости xOy , а ось Ox была параллельна ребрам лент.

Предканторовой решеткой назовем множе-

ство точек

$$\Pi^{(n)}(0, l) = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x \in R, y \in L^{(n)}(0, l), z = 0 \right\}.$$

Рассматриваются задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей предканторовой решетке и на периодической решетке с предканторовым множеством элементов на периоде.

Изучаются плоские задачи дифракции в случае, когда зависимость электромагнитных полей от вре-

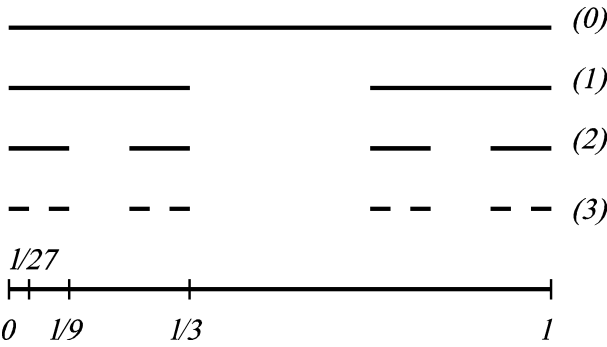


Рис. 1. Предканторовы множества $L^{(1)}(0, l)$, $L^{(2)}(0, l)$, $L^{(3)}(0, l)$.

мени дается множителем $\exp(-i\omega t)$, так что электромагнитное поле описывается двумя векторными полями

$$\vec{E} = \vec{E}(y, z), \quad \vec{H} = \vec{H}(y, z).$$

В этом случае векторная задача дифракции (для уравнений Максвелла) сводится к двум скалярным задачам (для уравнения Гельмгольца), а именно:

- случай E -поляризации

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0), \quad \vec{H} = (0, H_y, H_z)$$

и для единственной отличной от нуля составляющей вектора электрического поля $E_x = u(y, z)$ приходим к внешней задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца;

- случай H -поляризации

$$\vec{E} = (0, E_y, E_z), \quad \vec{H} = (H_x, 0, 0)$$

и для единственной отличной от нуля составляющей вектора электрического поля $H_x = u(y, z)$ имеем внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца.

В случае ограниченной решетки полное поле в обоих случаях ищем в виде суммы падающего под углом α поля

$$u^{\text{пад}} = e^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)},$$

k – волновое число, и рассеянного поля $u = u(y, z)$, которое представим в виде

$$u = \begin{cases} u^+, & z > 0, \text{ "над" решеткой} \\ u^-, & z < 0, \text{ "под" решеткой} \end{cases}$$

В случае периодической решетки изучается задача дифракции плоской волны $u^{\text{пад}} = \exp(-ikz)$ (ортогонально падающей на плоскость решетки). Здесь рассеянное поле – периодическая функция координаты y :

$$u(y + 2l, z) \equiv u(y, z).$$

2. Задача дифракции электромагнитной волны на ограниченной решетке

2.1. Постановка задачи

Задача нахождения рассеянного поля в случае E -поляризации приводит к краевой задаче Дирихле и в случае H -поляризации к краевой задаче Неймана.

Функции u^\pm удовлетворяет следующим условиям:

1. уравнению Гельмгольца $\Delta u^\pm + k^2 u^\pm = 0$, соответственно $z > 0$ и $z < 0$;
2. граничному условию:

$$u^+ \Big|_{z=0} = u^- \Big|_{z=0} = -e^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L$$

в случае E -поляризации,

$$\frac{\partial u^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u^-}{\partial z} \Big|_{z=0} = ik \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L$$

в случае H -поляризации,

где $L = \bigcup_{q=1}^m (a_q, b_q) \equiv L^{(n)}(0, l)$;

3. условиям сопряжения:

$$u^+ \Big|_{z=0} = u^- \Big|_{z=0}, \quad y \in CL$$

и

$$\frac{\partial u^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u^-}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad y \in L \equiv R \setminus L;$$

4. условию излучения Зоммерфельда на бесконечности;
5. условию Майкснера на ребре.

Решения уравнения Гельмгольца u^\pm ищем соответственно при $z > 0$ и $z < 0$ в виде:

$$u^\pm(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} c^\pm(\lambda) e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda) z} \frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)};$$

в случае E -поляризации,

$$u^\pm(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} c^\pm(\lambda) e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda) z} d\lambda,$$

в случае H -поляризации, где

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2},$$

и для выполнения условия излучения выбираем ту ветвь радикала, для которой $Re \gamma \geq 0, Im \gamma \leq 0$.

2.2. Парные интегральные уравнения

Рассматриваемые краевые задачи естественно приводят к парным интегральным уравнениям [2]: в случае E -поляризации

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)} = -e^{iky \sin \alpha}, & y \in L \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, & y \in CL, \end{cases}$$

где $c(\lambda) \equiv c^+(\lambda) \equiv c^-(\lambda)$, $\lambda \in R$ подлежит определению,

в случае H -поляризации

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{i\lambda y} \gamma(\lambda) d\lambda = ik \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}, & y \in L \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, & y \in CL, \end{cases}$$

где $c(\lambda) \equiv -c^+(\lambda) \equiv c^-(\lambda)$, $\lambda \in R$ подлежит определению.

2.3. Сингулярные интегральные уравнения

Введем в рассмотрение новые неизвестные функции

- $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{iy\lambda} d\lambda$ в случае E -поляризации;
- $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda c(\lambda) e^{iy\lambda} d\lambda$ в случае H -поляризации;

для выполнения условия на ребре будем рассматривать функции F в классе функций, сужение которых на интервалы (a_q, b_q) представляется в виде

$$F(x) \Big|_{(a_q, b_q)} = \frac{V_q(x)}{\sqrt{(x-a_q)(b_q-x)}} \quad a_q < x < b_q, \quad q = 1, \dots, m,$$

где $V_q(x)$, $x \in [a_q, b_q]$ непрерывные по Гельдеру функции.

Введем отображения

$$s_p(t) = \frac{b_p - a_p}{2} t + \frac{b_p + a_p}{2} : (-1, 1) \mapsto (a_p, b_p), \quad p = 1, \dots, m$$

Обозначим $v_p(t) = F(s_p(t)) \sqrt{1-t^2}$, $t \in (-1, 1)$.

В работе [2] выведены сингулярные интегральные уравнения первого рода для искомым функции $v_p(t)$, через которые по простым формулам выражаются функции $c(\lambda)$, $\lambda \in R$ и рассеянные поля $u^\pm(r, \varphi)$.

Системы сингулярных интегральных уравнений рассматриваемых задач приводятся к виду: в случае E -поляризации

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_p(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & \sum_{q=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_q(t) K_{p,q}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ & - ik \sin \alpha e^{iks_p(t_0) \sin \alpha}, \end{aligned} \quad t_0 \in (-1, 1), \quad p = 1, \dots, m;$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \frac{b_p - a_p}{2} \int_{-1}^1 v_p(t) \ln |t - \tau_p| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & \sum_{q=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} v_q(t) P_{pq}(\tau_p, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -e^{iks_p(\tau_p) \sin \alpha}, \end{aligned} \quad \tau_p \in (-1, 1), \quad p = 1, \dots, m,$$

где τ_p – фиксированные точки,

$$P_{p,q}(\tau, t) = \begin{cases} \frac{i\pi}{2} \frac{b_q - a_q}{2} H_0^{(1)}(k|s_p(\tau) - s_q(t)|), & q \neq p \\ \frac{b_p - a_p}{2} \left[\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k|s_p(\tau) - s_p(t)|) + \right. \\ \left. - \frac{ik\pi}{2} \frac{b_q - a_q}{2} \times \ln |t - \tau| \right], & q = p; \\ \frac{b_p - a_p}{2} \left[\frac{1}{|s_p(t_0) - s_q(t)|} - \right. \\ \left. \frac{ik\pi}{2} H_1^{(1)}(k|s_p(t_0) - s_p(t)|) \times \right. \\ \left. \operatorname{sgn}(s_p(t_0) - s_p(t)) \right], & q = p; \end{cases}$$

в случае H -поляризации

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_p(t)}{t_0 - t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & \sum_{q=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_q(t) K_{pq}(t_0, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ & ik \cos \alpha e^{iks_p(t_0) \sin \alpha}, \end{aligned} \quad t_0 \in (-1, 1), \quad p = 1, \dots, m;$$

$$a_{s,j} = \begin{cases} M_{p,q}^{s-\mu_{p-1},j-\mu_{q-1}}, & s = \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p - 1, \\ & j = \mu_{q-1} + 1, \dots, \mu_q, p, q = 1, \dots, m; \\ N_{p,q}^j, & s = \mu_p, j = \mu_{q-1} + 1, \dots, \mu_q, p, q = 1, \dots, m; \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} -ik \sin \alpha e^{iks_p(t_{0,s-\mu_{p-1}}^{np}) \sin \alpha}, & s = \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p - 1, p = 1, \dots, m; \\ -e^{iks_p(\tau_p) \sin \alpha}, & s = \mu_p, p = 1, \dots, m; \end{cases}$$

в случае *H*-поляризации

$$a_{s,j} = \begin{cases} K_{p,q}^{s-\mu_{p-1},j-\mu_{q-1}}, & s = \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p - 1, \\ & j = \mu_{q-1} + 1, \dots, \mu_q, p, q = 1, \dots, m; \\ 1, & s = \mu_p, j = \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p, p = 1, \dots, m; \\ 0, & s = \mu_p, j \neq \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p, p = 1, \dots, m; \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} ik \cos \alpha e^{iks_p(t_{0,s-\mu_{p-1}}^{np}) \sin \alpha}, & s = \mu_{p-1} + 1, \dots, \mu_p - 1, p = 1, \dots, m; \\ 0, & s = \mu_p, p = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Обозначим $d = \frac{l}{2 \cdot 3^n}$; $r_1 = 1$, $r_{s+2j-1} = 2 \cdot 3^j - r_{2j-1+1-s}$, $s = 1, \dots, 2^{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Для $L = L^{(n)}(0, l)$ используем следующие значения параметров $m = 2^n$; $s_q(t) = d(t + r_q)$; $\frac{b_q - a_q}{2} = d$; $q = 1, \dots, 2^n$.

2.6. Поля в дальней зоне

Для поля u^\pm в произвольной точке (y, z) , соответственно при $z > 0$ или $z < 0$, имеем выражение непосредственно через решение соответствующего сингулярного интегрального уравнения – функцию $F(\xi)$ (пункт 2.3):

$$u^\pm(y, z) = \frac{1}{\pi} \int_L Q^\pm(y, z, \xi) F(\xi) d\xi, \quad (2.6.1)$$

где

- в случае *E*-поляризации

$$Q^\pm(y, z, \xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-\xi) \mp \gamma(\lambda)z} \frac{d\lambda}{\gamma(\lambda)}, \quad (2.6.2)$$

- в случае *H*-поляризации

$$Q^\pm(y, z, \xi) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\lambda\xi}}{2i\lambda} e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda)z} d\lambda. \quad (2.6.3)$$

Так что приближенные значения поля \tilde{u}^\mp могут быть вычислены по найденным значениям приближенных решений сингулярных интегральных уравнений (пункт 2.4) с использованием квадратурной формулы интерполяционного типа

$$\tilde{u}^\pm = \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2n_q} \sum_{j=1}^{n_q} Q^\pm(y, z, s_q(t_j^{n_q})) v_{q,j}. \quad (2.6.4)$$

Если же нас интересует "поле в дальней зоне" (при $kr \gg 1$, где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$), то можно избежать громоздких вычислений интегралов (2.6.2) и (2.6.3), асимптотику которых получаем методом стационарной фазы.

Для наглядного описания поля в дальней зоне вводят диаграммы направленности

$$D(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{e^{i(kr - \pi/4)} / \sqrt{kr}}. \quad (2.6.5)$$

- В случае *E*-поляризации имеем

$$D(\varphi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_L F(\xi) e^{-ik\xi \cos \varphi} d\xi.$$

- В случае *H*-поляризации имеем

$$D(\varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sin \varphi \int_L F(\xi) \frac{1 - e^{-ik\xi \cos \varphi}}{\cos \varphi} d\xi.$$

Используя интерполяционные квадратурные формулы, получаем выражения для приближенных значений $\tilde{D}(\varphi)$ диаграмм направленности

- В случае *E*-поляризации:

$$\tilde{D}(\varphi) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2n_q} \sum_{j=1}^{n_q} v_{q,j} e^{iks_q(t_j^{n_q}) \cos \varphi}. \quad (2.6.6)$$

- В случае *H*-поляризации:

$$\tilde{D}(\varphi) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2n_q} \times \sum_{j=1}^{n_q} v_{q,j} \frac{1 - e^{-iks_q(t_j^{n_q}) \cos \varphi}}{\cos \varphi}. \quad (2.6.7)$$

Численный анализ рассеянного поля на базе построенной математической модели был проведен в широком диапазоне значений параметров задачи. Некоторые результаты приведены в пункте 4.

3. Задача дифракции электромагнитной волны на решетке с предканторовым множеством элементов на периоде

3.1. Постановка задачи

На решетку

$$\Pi_{2l}^{(n)} = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x \in R, y \in \bigcup_{m \in Z} L^{(n)}(-l + 2lm, l + 2lm), z = 0 \right\},$$

состоящую из периодически повторяющейся системы бесконечно тонких идеально проводящих лент, падает (ортогонально) плоская волна $u^{\text{пад}} = \exp(-ikz)$. Полное поле $u^{\text{полн}}$ ищем в виде:

- в случае E -поляризации

$$u^{\text{полн}} = E_x = \begin{cases} e^{-ikz} - e^{ikz} + u^+, & z > 0, \\ u^-, & z < 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

- в случае H -поляризации

$$u^{\text{полн}} = H_x = \begin{cases} e^{-ikz} + u^+, & z > 0, \\ e^{-ikz} + u^-, & z < 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

здесь

$$u^\pm(y + 2l, z) \equiv u^\pm(y, z), \quad z > 0 \text{ или } z < 0, \quad (3.1.3)$$

$2l$ – периодические функции по переменной y , которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца, соответствующим граничным условиям "на лентах", условиям сопряжения "на щелях", условиям "излучения" по переменной z и условиям на ребрах. Ищем $2l$ -периодические решения уравнения Гельмгольца в виде рядов Фурье по переменной y :

$$u^\pm = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^\pm e^{i\lambda_n y \mp \gamma(\lambda_n)z}, \quad z > 0 \text{ или } z < 0, \quad (3.1.4)$$

где $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, функция $\gamma(\lambda)$ определена в конце пункта 2.1, а коэффициенты C_n^\pm подлежат определению.

Вводя безразмерные переменные

$$\varkappa = \frac{kl}{\pi}, \quad \xi = \frac{\pi y}{l}, \quad \zeta = \frac{\pi z}{l},$$

перепишем (3.1.4) в виде

$$u^\pm \left(\frac{l}{\pi} \xi, \frac{l}{\pi} \zeta \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^\pm e^{in\xi \mp \gamma_n \zeta}, \quad \zeta > 0 \text{ или } \zeta < 0, \quad (3.1.5)$$

где $\gamma_n = \sqrt{n^2 - \varkappa^2}$, $Re\gamma_n \geq 0$, $Im\gamma_n \leq 0$.

Рассмотрение достаточно вести на периоде $\xi \in [-\pi, \pi]$.

Обозначим

$$CL = L^{(n)}(-\pi, \pi), \quad L = [-\pi, \pi] \setminus L^{(n)}(-\pi, \pi).$$

3.2. Парные ряды Фурье

- Случай E -поляризации

Граничные условия на идеально проводящих лентах и условия сопряжения на щелях в безразмерных переменных имеют вид:

$$u^+ \Big|_{\zeta=0} = u^- \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \xi \in CL, \quad (3.2.1)$$

$$u^+ \Big|_{\zeta=0} = u^- \Big|_{\zeta=0}, \quad \xi \in L, \quad (3.2.2)$$

$$-2i\varkappa + \frac{\partial u^+}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial u^-}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad \xi \in L. \quad (3.2.3)$$

Из (3.2.1) и (3.2.2) следует, что $u^+ \Big|_{\zeta=0} = u^- \Big|_{\zeta=0}$ для всех $\xi \in [-\pi, \pi]$, так что в (3.1.5) и условия сопряжения (3.2.3)

$$C_n^+ = C_n^- \equiv C_n, \quad n \in Z.$$

Подставляя представления (3.1.5) в граничное условие (3.2.1), приходим к парному ряду Фурье — парному сумматорному уравнению для определения неизвестных коэффициентов C_n , $n \in Z$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\xi} = 0, \quad \xi \in CL, \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \gamma_n e^{in\xi} = -i\varkappa, \quad \xi \in L. \quad (3.2.5)$$

Условие, которое обеспечивает единственность решения парного уравнения, вытекает из условия на ребре и будет сформулировано ниже в терминах однозначной разрешимости сингулярного интегрального уравнения эквивалентного парному уравнению (3.2.4-3.2.5).

• Случай H -поляризации

В этом случае граничные условия и условия сопряжения имеют вид (в безразмерных переменных)

$$\frac{\partial u^+}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial u^-}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = i\kappa, \quad \xi \in L, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial u^-}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad \xi \in L, \quad (3.2.7)$$

$$u^+ \Big|_{\zeta=0} = u^- \Big|_{\zeta=0}, \quad \xi \in L. \quad (3.2.8)$$

Из (3.2.6) и (3.2.7) следует, что $\frac{\partial u^+}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial u^-}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}$ для всех $\xi \in [-\pi, \pi]$, так что в (3.1.5)

$$C_n^+ = -C_n^- \equiv C_n, \quad n \in Z.$$

Для определения этих неизвестных коэффициентов подставим представления (3.1.5) в граничное условие (3.1.4) и условие сопряжения (3.2.6), таким образом, приходим к парному сумматорному уравнению

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\xi} = 0, \quad \xi \in L, \quad (3.2.9)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \gamma_n e^{in\xi} = -i\kappa, \quad \xi \in CL. \quad (3.2.10)$$

3.3. Сингулярные интегральные уравнения

В этом пункте парное сумматорное уравнение (3.2.4-3.2.5) сведено к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков методом предложенным и развитым в работах [3,4].

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$F(\xi) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} in C_n e^{in\xi}, \quad \xi \in [-\pi, \pi]. \quad (3.3.1)$$

Из (3.2.4) следует, что

$$F(\xi) = 0, \quad \xi \in CL \quad (3.3.2)$$

и, с учетом этого, из (3.3.1) выражаем все искомые коэффициенты кроме C_0 через $F(\xi)$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi in} \int_L F(\xi) e^{-in\xi} d\xi, \quad n \neq 0. \quad (3.3.3)$$

Для C_0 из (3.2.4) при $\xi = \pi$ получаем выражение $C_0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^{n-1} C_n$, подставляя в которое выражения для $C_n, n \neq 0$ (3.3.3), находим

$$C_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_L \xi F(\xi) d\xi. \quad (3.3.4)$$

Переходя к выводу сингулярного интегрального уравнения для искомой функции $F(\xi), \xi \in L$, перепишем уравнение (3.2.5) в виде

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n| C_n e^{in\xi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} [\gamma_n - |n|] C_n e^{in\xi} - i\kappa C_0 = -i\kappa \quad (3.3.5)$$

и выразим каждую из сумм, стоящих в левой части (3.3.5) через $F(\xi), \xi \in L$.

Используя представление (3.3.3) для коэффициентов $C_n, n \neq 0$, после несложных преобразований находим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} [\gamma_n - |n|] C_n e^{in\xi} = \frac{1}{\pi} \int_L G(\theta - \xi) F(\theta) d\theta, \quad (3.3.6)$$

где

$$G(\psi) = \kappa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n(\gamma_n + n)}.$$

Для выражения первой суммы в левой части уравнения (3.3.5) через $F(\xi), \xi \in L$, воспользуемся преобразованием Гильберта

$$(Hf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ctg \frac{\xi - x}{2} f(\xi) d\xi. \quad (3.3.7)$$

Применяя оператор H , из (3.3.1) с учетом (3.3.2) и, используя известные соотношения

$$H : e^{in\xi} \mapsto i \frac{|n|}{n} e^{inx}, \quad n \in Z, n \neq 0,$$

находим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n| C_n e^{in\xi} = -\frac{1}{2\pi} \int_L ctg \frac{\theta - \xi}{2} F(\theta) d\theta. \quad (3.3.8)$$

Подставляя выражения (3.3.8), (3.3.6) и (3.3.4) в уравнение (3.3.5), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $F(\xi), \xi \in L$:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)d\xi}{\xi-x} + \frac{1}{\pi} \int_L K(\xi-x)F(\xi)d\xi = i\kappa, x \in L \quad (3.3.9)$$

$$K(x) = \left(\frac{1}{2}ctg \frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) + G(x) + \frac{i\kappa}{2}x.$$

Множество L есть объединение непересекающихся отрезков

$$L = \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q), \quad -\pi < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_m < \beta_m < \pi.$$

Из уравнения (3.2.4) следует

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F(\xi)d\xi = 0, \quad q = 1, \dots, m. \quad (3.3.10)$$

При этих дополнительных условиях ищем решение сингулярного интегрального уравнения (3.3.9) в классе функций $F(\xi)$, $\xi \in L$, сужение которых на составляющие L отрезки представляются в виде:

$$F(\xi) \Big|_{(\alpha_q, \beta_q)} = \frac{V_q(\xi)}{\sqrt{(\xi - \alpha_q)(\beta_q - \xi)}}, \quad q = 1, \dots, m, \quad (3.3.11)$$

где $V_q(\xi)$, $\xi \in [\alpha_q, \beta_q]$ непрерывная по Гельдеру функция. При этом выполняются условия Майкнера на ребре. Далее, вводя как в пункте 2.3, отображения $S_p : (-1, 1) \mapsto (\alpha_p, \beta_p)$,

$$S_p(t) = \frac{\beta_p - \alpha_p}{2}t + \frac{\beta_p + \alpha_p}{2}, \quad p = 1, \dots, m$$

сводим сингулярное интегральное уравнение на системе отрезков (3.3.9) к системе сингулярных интегральных уравнений на отрезке $(-1, 1)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{q,p}(t_0, t)v_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = i\kappa, \quad q = 1, \dots, m, \quad (3.3.12)$$

где

$$K_{q,p}(t_0, t) = \begin{cases} \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \left[K(S_p(t) - S_q(t_0)) + \frac{1}{S_p(t) - S_q(t_0)} \right], & p \neq q; \\ \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} K(S_q(t) - S_q(t_0)), & p = q; \end{cases} \quad p, q = 1, \dots, m;$$

$$v_p(t) = \sqrt{1-t^2}F(S_p(t)), \quad p = 1, \dots, m,$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 \frac{v_q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q = 1, \dots, m. \quad (3.3.13)$$

Дискретизация системы сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями (задача (3.3.12)-(3.3.13)) проведена по МДО (см. пункт 2.4) [4,5], строгое обоснование примененного численного метода (МДО) дано в работах [6,7].

Замечание. Парное сумматорное уравнение (3.2.4)-(3.2.4) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений вида (3.3.12) с дополнительными условиями (3.3.13), если рассматривать парное уравнение на периоде $[0, 2\pi]$.

3.4. Дискретная математическая модель

Для вычисления амплитуды рассеянных и дифрагированных волн C_n^\pm , $|n| < \kappa$ в формуле (3.1.4), в предположении, что амплитуда падающего поля равна единице, воспользуемся формулами для C_n , выписанными в пункте 3.3, формулы (3.3.4) и (3.3.3).

Приближенные значения соответствующих амплитуд находим, используя приближенные значения $v_{p,j}$ решений $v_p(t)$ системы сингулярных интегральных уравнений (3.3.12) с дополнительными условиями (3.3.13) в узловых точках $t_j^{n_p}$, примененных (при дискретизации) квадратурных формул интерполяционного типа (см. пункт 2.4).

Имеем (для рассмотренного случая E -поляризации) дискретные модели формул комплексных амплитуд:

$$C_0 = \sum_{p=1}^m \frac{\alpha_p - \beta_p}{4n_p} \sum_{j=1}^{n_p} v_{p,j} S_p(t_j^{n_p}), \quad (3.4.1)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi n i} \sum_{p=1}^m \frac{\beta_p - \alpha_p}{2n_p} \sum_{j=1}^{n_p} v_{p,j} e^{-in S_p(t_j^{n_p})}, \quad 0 < |n| < \kappa, \quad (3.4.2)$$

(остальные слагаемые в (3.1.4), когда $|n| > \kappa$, экспоненциально убывают при $|z| \rightarrow +\infty$).

4. Некоторые результаты численного эксперимента

Ниже приведены диаграммы направленности рассеянного предканторовой решеткой $\Pi^{(N)}(0, l)$ поля плоской монохроматической волны, падающей под углом $\alpha = 45^\circ$, при $l = 1$.

Далее N – порядок предканторовой решетки, m – количество лент, k – волновое число, $Q = |\tilde{D}(\varphi)|$. Рисунки 2-3 случай E -поляризации. Рисунки 4-5 случай H -поляризации.

• случай E -поляризации

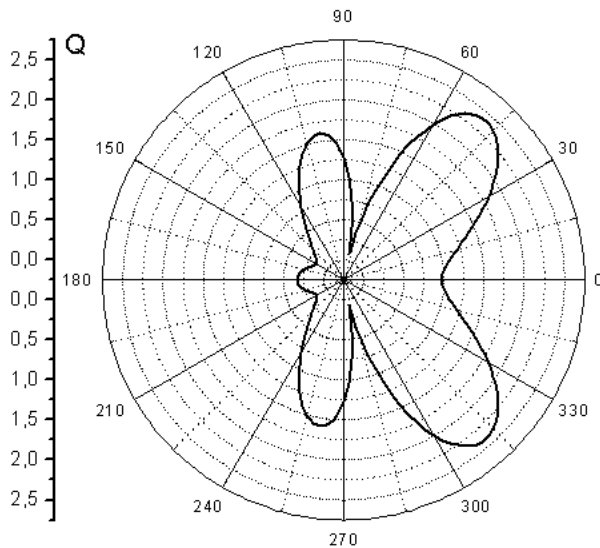


Рис. 2. $N = 5, m = 32, k = 10$.

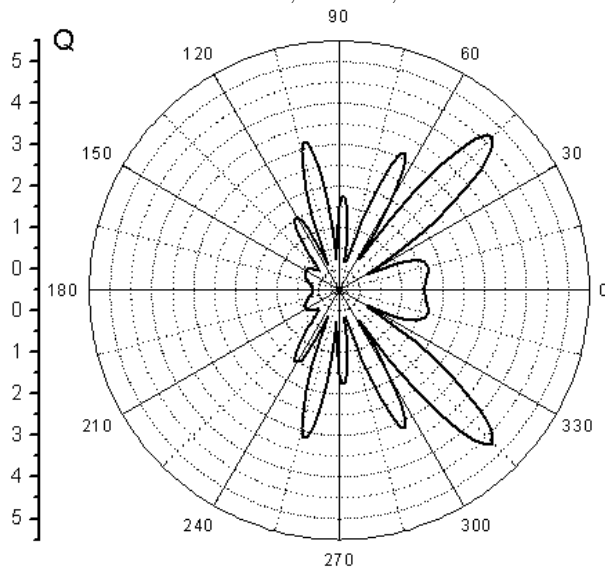


Рис. 3. $N = 5, m = 32, k = 30$.

На рисунках 6-7 приведены совмещенные графики модулей амплитуд рассеянных волн в случае ортогонально падающей на решетку $\Pi_{2l}^{(N)}$ с предканторовым множеством элементов на периоде при $l = 1$.

Предложенный в настоящей работе подход позволяет исследовать частотные характеристики предканторовых решеток в широком диапазоне значений параметров как решетки так и падающего поля.

• случай H -поляризации

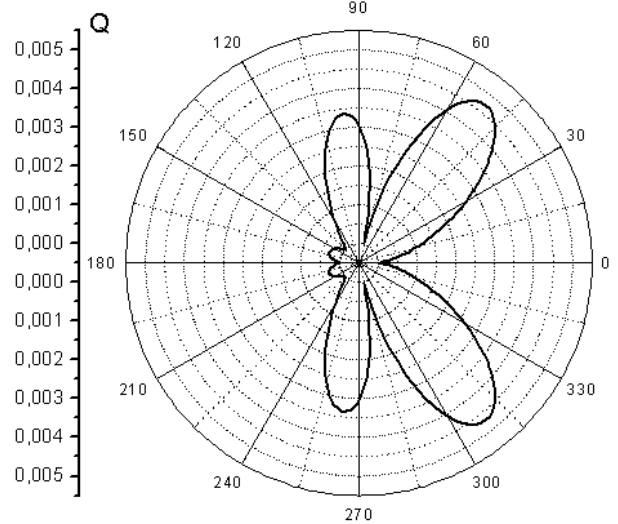


Рис. 4. $N = 5, m = 32, k = 10$.

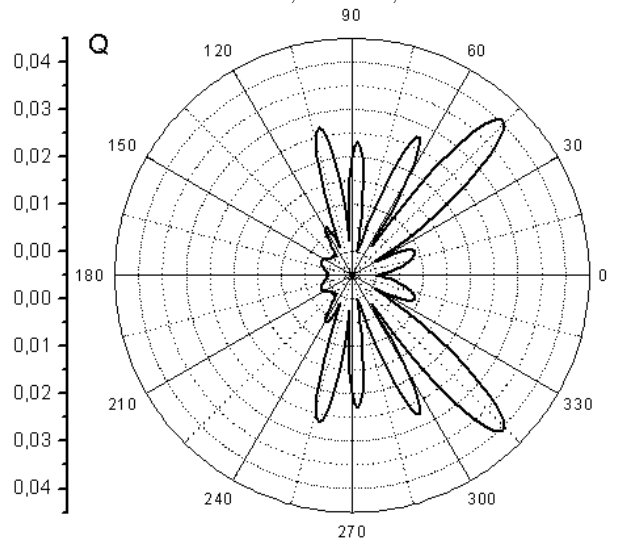


Рис. 5. $N = 5, m = 32, k = 30$.

• Модули амплитуд рассеянных волн, случай E -поляризации

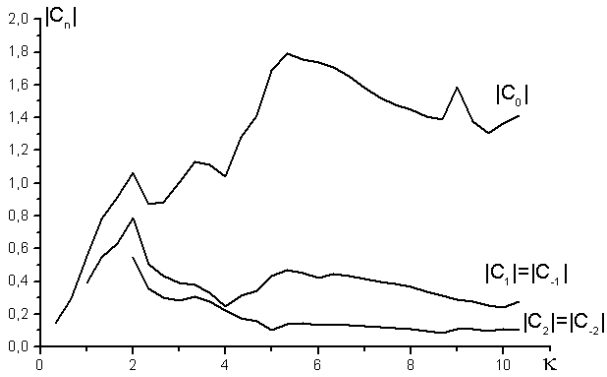


Рис. 6. Порядок предканторова множества на периоде $N = 3$.

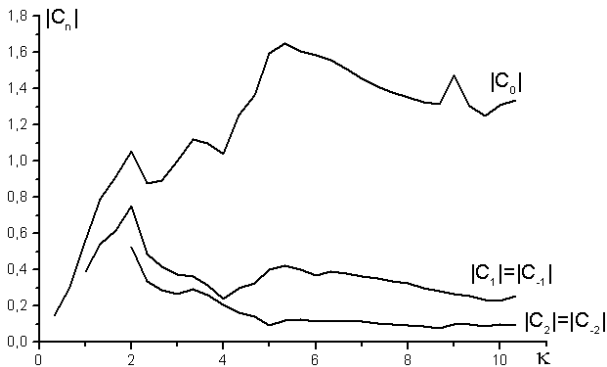


Рис. 7. Порядок предканторова множества на периоде $N = 4$.

[5] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях -М.: Наука. - 1985. - 256 с.

[6] Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн - Харьков. ХГУ. - 1992. - 145 с.

[7] Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Полянская Т.С. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции // Дифференциальные уравнения. - 1995. - Т. 31, N 9. - С. 1536-1541.

Список литературы

[1] Федер Е. Фракталы -М.: Мир. - 1991. - 260 с.

[2] Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках // Электромагнитные явления - Харьков: ИЭМИ. - 1998. - Т. 1, - N 2, -С. 220-232.

[3] Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функция, функциональный анализ и их приложения - Харьков: Вища школа. - 1982. - Вып. 38. - С. 15-18.

[4] Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики - М: Изд-во АН СССР. - 1986. - N 124. - С. 166-183.