

# Возбуждение кильватерных полей в диэлектрическом волноводе

Р.Н. Кочергов, И.Н. Онищенко, Г.В.Сотников

Институт Плазменной Электроники и Новых Методов Ускорения  
Национального Научного Центра "Харьковский Физико-Технический Институт"

310108 г.Харьков-108, ул. Академическая 1  
Тел.(0572) 35-66-23, E-mail: kochergov@kipt.kharkov.ua

## Содержание

1. Введение	499
2. Возбуждение заданным сгустком	500
3. Результаты численного анализа	501
4. Заключение	502

## Аннотация

Исследование кильватерных полей, возбуждаемых в диэлектрическом волноводе релятивистскими электронными сгустками представляет интерес как для высокоградиентного ускорения заряженных частиц, так и для генерирования СВЧ-излучения. В представленной работе теоретически и численно исследованы процессы возбуждения кильватерных полей в цилиндрическом диэлектрическом волноводе. Рассмотрены как линейная, так и нелинейная стадии процесса. Показано, что при больших значениях диэлектрической проницаемости  $\epsilon_d \sim 10$  многомодовое рассмотрение (50 гармоник) приводит к сосредоточению электрического поля в последовательности узких пиков разной полярности, следующих вдоль оси системы с периодом, соответствующим длине волны первой гармоники, а амплитуда результирующего поля во много раз превышает амплитуду основной моды. Учет смещения частиц в возникающих полях приводит к уменьшению амплитуды возбуждаемого поля и уширению пиков. Кроме того, радиальное смещение частиц ограничивает эффективную длину замедляющей системы, т.к. частицы сгустка достигают стенок волновода.

## 1. Введение

Использование кильватерных полей, возбужденных в диэлектрике последовательностью электронных сгустков, для высоко-градиентного ускорения заряженных частиц предложено и исследовано в [1-3]. В последнее время [4] кильватерные поля рассматриваются как эффективное средство для генерирования СВЧ излучения в плазменно-наполненных клистронах. В представленной работе теоретически исследован процесс возбуждения кильватерных полей в диэлектрическом волноводе, численными методами проанализированы как линейная, так и нелинейная стадии процесса. В работах [2,3] отмечено два существенных момента. Во первых, при возбуждении кильватерных полей регуляр-

ной последовательностью сгустков поля от отдельных сгустков складываются когерентно. Во вторых [3], для одного сгустка многомодовое рассмотрение приводит к сосредоточению возбуждаемого СВЧ-излучения в последовательность узких пиков разной полярности с амплитудами, намного превышающими поле при одномодовом рассмотрении.

В Разд.2 статьи получены аналитические выражения для величины кильватерного поля, возбуждаемого отдельным электронным сгустком в цилиндрическом диэлектрическом волноводе. Для плоской геометрии подобная задача была рассмотрена в работе [3]. Численный анализ кильватерных полей для линейной и нелинейной стадий процесса представлен в Разд.3. В Разд.4 коротко изложены основные результаты представленной работы.

## 2. Возбуждение заданным сгустком

Исследуемая замедляющая структура представляет собой диэлектрическую трубу, окруженную металлическим кожухом радиуса  $b$  и имеющую вдоль оси вакуумный канал радиуса  $a$ . Пусть вдоль вакуумного канала распространяется электронный трубчатый сгусток радиуса  $r_0$  и протяженностью  $\Delta z$  со скоростью  $v_0$ . Сначала найдем поле для бесконечно тонкого трубчатого пучка, плотность заряда которого определяется выражением

$$\rho = -(eN_0/2\pi r_L v_{zL})\delta(r - r_L)\delta(t - t_L),$$

где  $e$ -заряд электрона,  $N_0$  -число электронов в сгустке,  $r_L(t_0, r_0, z)$ ,  $t_L(t_0, r_0, z)$ ,  $v_{zL}(t_0, r_0, z)$  - лагранжевы координаты и скорости сгустка,  $t_0$  - время входа частиц сгустка в систему. Чтобы получить выражения для всех компонент электромагнитного поля ТМ волны, используем уравнения Максвелла, причем поперечным током  $j_r$  пренебрегаем. После несложных преобразований получаем следующую систему уравнений для Фурье-компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \tilde{E}_z + (\varepsilon\omega^2/c^2 - k_z^2)\tilde{E}_z &= -(4\pi i/\omega) \times \\ &\times (\varepsilon\omega^2/c^2 - k_z^2)j_z; \\ \tilde{E}_r &= (ik_z/(\varepsilon\omega^2/c^2 - k_z^2))\partial\tilde{E}_z/\partial r; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tilde{H}_{\varphi} = \omega\varepsilon/ck_z\tilde{E}_r;$$

где для всех компонент поля величины

$$\tilde{F} = \int F e^{-ik_z z + i\omega t} dt dz,$$

$j_z = \rho v_{zL}$  - z-компоненты плотности тока, величина диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  в вакууме равна 1, в диэлектрической среде -  $\varepsilon_d$ ,  $\omega$  - частота колебаний,  $c$  - скорость света,  $k_z = \omega/v_{zL}$  - продольное волновое число.

Чтобы решить уравнение (1), разделим всю область волновода на три части  $I : r < r_L$ ,  $II : r_L < r < a$ ,  $III : a < r < b$ . Решения в этих областях имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z^I &= C_1 I_0(k_v r), \\ \tilde{E}_z^{II} &= C_2 I_0(k_v r) + C_3 K_0(k_v r), \\ \tilde{E}_z^{III} &= C_4 J_0(k_d r) + C_5 Y_0(k_d r). \end{aligned}$$

Здесь  $I_n, J_n, K_n, Y_n$  - модифицированная и обычная функции Бесселя, функция Макдональда и Вебера  $n$ -го порядка, соответственно, поперечное волновое число равно для вакуума  $k_v^2 = -\omega^2/v_{zL}^2\gamma_{zL}^2$  и  $k_d^2 = -\omega^2(\beta_{zL}^2\varepsilon_d - 1)/v_{zL}^2$  для диэлектрика,  $\beta_{zL} = v_{zL}/c$ ,  $\gamma_{zL}^{-2} = 1 - \beta_{zL}^2$ . Константы  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) необходимо найти из граничных условий, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{E}_z^{II}}{\partial r} \right|_{r_L} - \left. \frac{\partial \tilde{E}_z^I}{\partial r} \right|_{r_L} &= -\frac{2iN_0\omega}{v_{zL}^2\gamma_{zL}^2 t_L} e^{i\omega t_L} \\ \tilde{E}_z^{II} \Big|_{r_L} - \tilde{E}_z^I \Big|_{r_L} &= 0 \\ \tilde{E}_z^{III} \Big|_a - \tilde{E}_z^{II} \Big|_a &= 0 \\ \frac{1}{k_v^2} \left. \frac{\partial \tilde{E}_z^{III}}{\partial r} \right|_a - \frac{\varepsilon_d}{k_d^2} \left. \frac{\partial \tilde{E}_z^{II}}{\partial r} \right|_a &= 0 \\ \tilde{E}_z^{III} \Big|_b &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

После определения  $C_i$  и обратного преобразования Фурье для бесконечно тонкого сгустка получим:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{4eN_0}{a^2} \sum_s \frac{I_0(k_{vs}r)I_0(k_{vs}r_L)}{I_0^2(k_{vs}a)} E_s^{-1} \times \\ &\times \Theta(t - t_L) \cos(t - t_L)\omega_s \\ E_r &= i\frac{4eN_0}{a^2\gamma_{zL}} \sum_s \frac{I_1(k_{vs}r)I_0(k_{vs}r_L)}{I_0^2(k_{vs}a)} E_s^{-1} \times \\ &\times \Theta(t - t_L) \cos(t - t_L)\omega_s \end{aligned} \quad (3)$$

$$H_{\varphi} = \beta_{zL}\varepsilon_d E_r,$$

где  $\omega_s$  - собственная частота, удовлетворяющая дисперсионному уравнению  $D(\omega_s) = 0$ .

$$\begin{aligned} D(\omega_s) &= \varepsilon_d k_{vs} \frac{B}{A} - k_{ds} \frac{I_1(k_{vs}a)}{I_0(k_{vs}a)}; \\ E_s &= \varepsilon_d - \frac{4\varepsilon_d}{\pi^2 k_d^2 a^2 A^2} - \frac{\varepsilon_d B^2}{A^2} - \left( 1 - \frac{I_1^2(k_{vs}a)}{I_0^2(k_{vs}a)} \right); \end{aligned}$$

$$B = J_1(k_d a)Y_0(k_d b) - J_0(k_d a)Y_1(k_d b);$$

$$A = J_0(k_d a)Y_0(k_d b) - J_0(k_d a)Y_0(k_d b).$$

Чтобы найти кильватерное поле релятивистского трубчатого сгустка конечной длины необходимо, используя выражение  $N_0 = I(r_0, t_0)/e dt$ , проинтегрировать поле (3) по времени влета частиц  $t_0$ . Здесь  $I(r_0, t_0)$  - ток пучка при  $r = r_0, z = 0, t = t_0$ . При линейном подходе в выражении (3) делается замена  $t_L \rightarrow z/v_0 + t_0$  и, если распределение плотности заряда сгустка имеет вид ступеньки, электрическое поле за сгустком имеет вид:

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{4I}{a^2} \sum_s \frac{I_0(k_{vs}r)I_0(k_{vs}r_0)}{I_0^2(k_{vs}a)} \Theta\left(t - \frac{z}{v_0}\right) \\
 &\quad \times \frac{\sin(\omega_s t_*/2) \cos(t - z/v_0 - t_*/2) \omega_s}{E_s \omega_s / 2} \\
 E_r &= i \frac{4I}{a^2 \gamma_{zL}} \sum_s \frac{I_1(k_{vs}r)I_0(k_{vs}r_0)}{I_0^2(k_{vs}a)} \Theta\left(t - \frac{z}{v_0}\right) \\
 &\quad \times \frac{\sin(\omega_s t_*/2) \cos(t - z/v_0 - t_*/2) \omega_s}{E_s \omega_s / 2},
 \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t_*$  - протяженность пучка.

### 3. Результаты численного анализа

Дальнейшее рассмотрение производится с помощью численных методов. На рис.1 показаны возбуждаемые заданным релятивистским электронным сгустком продольное и поперечное электрические поля (4) для следующего набора параметров:  $b = 3.5$ ,  $a = 1.1$ ,  $\gamma_0 = 5$ ,  $r_0 = 1.0$ ,  $r = 1.0$ ,  $\Delta z = 1.7$ ,  $\varepsilon_d = 10.0$ .

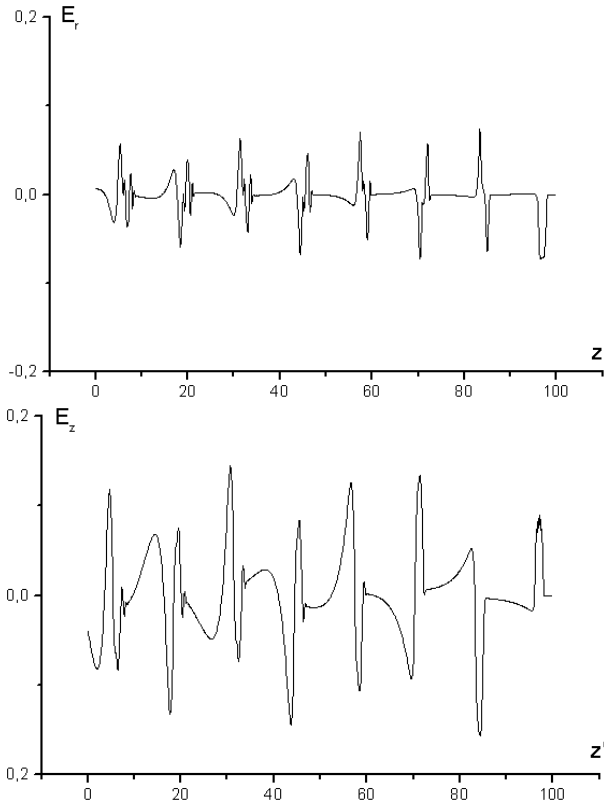


Рис. 1. Поперечное и продольное электрические поля, возбуждаемые в цилиндрическом диэлектрическом волноводе релятивистским электронным сгустком, движущимся вдоль оси системы с постоянной скоростью  $v'_0$ ,  $\gamma_0 = 5$ ,  $\varepsilon_d = 10$ ,  $t' = 100$ .

Число учитываемых мод в выражении (4) равно 50. Здесь использовались безразмерные переменные  $t'_L = t_L c/a$ ,  $r'_L = r_L/a$ ,  $z' = z/a$ ,  $\vec{v}'_L = \vec{v}_L/c$ . Из рисунка видно, что, как и в работе [3], многомодовое рассмотрение при больших значениях приводит к сосредоточению электрического поля в узких, периодически расположенных пиках.  $E_r$ ,  $E_z$  нормализованы на величину  $4eN_0/a^2$  и вычисляются при  $r' = 0.5$  и  $r' = 0.01$  соответственно. Суммарное электрическое поле приблизительно в десять раз превышает амплитуду основной гармоники, сосредоточение поля в пиках вызывается равномерным распределением собственных частот ( $\omega_s = \omega_0(n + 1/2)$ ,  $n$ -целое) при больших значениях величины  $\varepsilon_d$ . Помимо этого, увеличение  $\varepsilon_d$  приводит к увеличению количества мод, имеющих амплитуды одного порядка, т.е. вносящих заметный вклад в суммарное поле. Все вышесказанное показывает необходимость принимать во внимание большое количество собственных мод, возбуждаемых в рассматриваемой структуре. Ширина пиков порядка длины сгустка, частота их следования соответствует частоте основной возбуждаемой гармоники.

Учет смещений частиц в возбуждаемых ими кильватерных полях вносит ряд существенных особенностей в наблюдаемую картину. Для анализа самосогласованной динамики сгустков в возбуждаемом поле мы используем уравнения движения частиц сгустка:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt_L}{dz} &= \frac{1}{v_{zL}} \\
 \frac{dr_L}{dz} &= \frac{v_{rL}}{v_{zL}} \\
 \frac{d\vec{v}_L}{dz} &= \frac{e}{mv_{zL}} \left(1 - \frac{\vec{v}_L^2}{c^2}\right) \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}_L}{c} \times \vec{H} - \frac{\vec{v}_L}{c^2} (\vec{v}_L \vec{E})\right]
 \end{aligned} \quad (5)$$

Ненулевые компоненты электрического и магнитного поля в правой части уравнения определяются выражениями (3). Набор  $\omega_s$  не меняется,  $N_0$  определяется выражением  $4e^2 N_0/mc^2 a = 1$ , значения остальных параметров указаны ранее.

Предполагается, что первоначально распределение частиц однородно,  $v_{zL} = v_0$ ,  $v_{rL} = 0$ . Поперечная сила, действующая на частица всегда направлена от оси, поэтому сгусток быстро достигает стенок, ограничивая эффективную длину волновода. Применение трубчатых сгустков с малым радиусом позволяет существенно увеличить эффективную длину волновода. В представленной работе выбран  $r'_0 = 0.01$ .

Рис. 2 демонстрирует  $E_z$  для  $t' = 40$  и  $t' = 52$ . Нелинейные эффекты появляются при  $z' \sim 30$ . Видно, что пики становятся шире и ниже, причиной чего является увеличение длины сгустка. Средняя энергия сгустков для указанных моментов времени равна 2.68 и 2.39 соответственно, т.е. энергетические

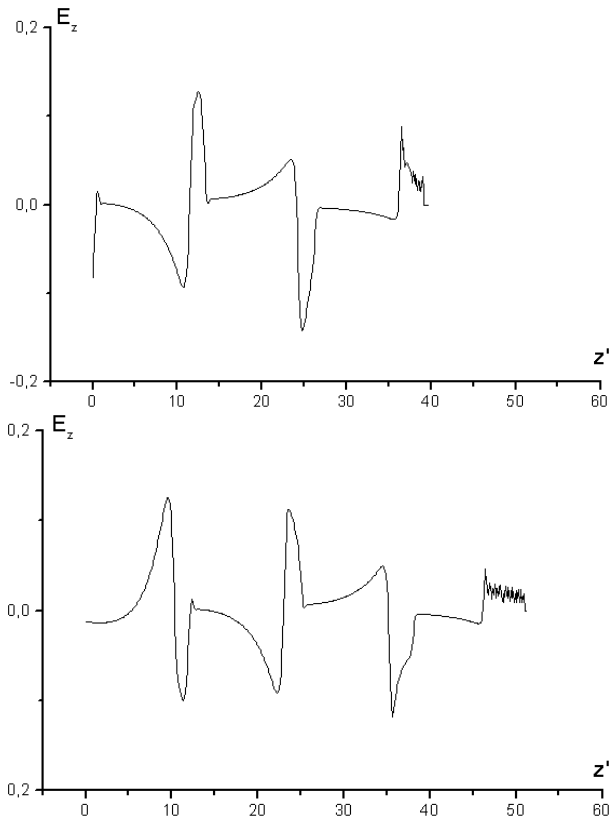


Рис. 2. Продольные электрические поля, возбуждаемые в цилиндрическом диэлектрическом волноводе релятивистским электронным сгустком, движущимся вдоль оси системы с начальной скоростью  $v_0$  с учетом торможения частиц в возникающих полях,  $\gamma_0 = 5$ ,  $\varepsilon_d = 10$ ,  $t' = 40$  и  $t' = 52$ .

потери  $\sim 60\%$ . Скорости частиц (квадраты), их радиусы (круги) и расположение по  $z'$  для  $t' = 40$  и  $t' = 52$  показаны на рис. 3.

При  $t' > 52$  частицы сгустка очень быстро достигают стенок волновода, т.е. радиальное движение частиц сгустка ограничивает эффективную длину волновода.

#### 4. Заключение

Кильватерное поле, возбуждаемое релятивистским электронным сгустком в цилиндрическом диэлектрическом волноводе с большим значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_d \sim 10$  представляет собой последовательность узких пиков разной полярности, следующих вдоль оси системы с периодом, соответствующим длине волны первой гармоники, и амплитудой результирующего поля во много раз превышающей амплитуду основной моды.

Учет смещения частиц в возникающих полях приводит к уменьшению амплитуды возбуждаемого поля и уширению пиков. Кроме того, радиальное смещение частиц ограничивает эффективную дли-

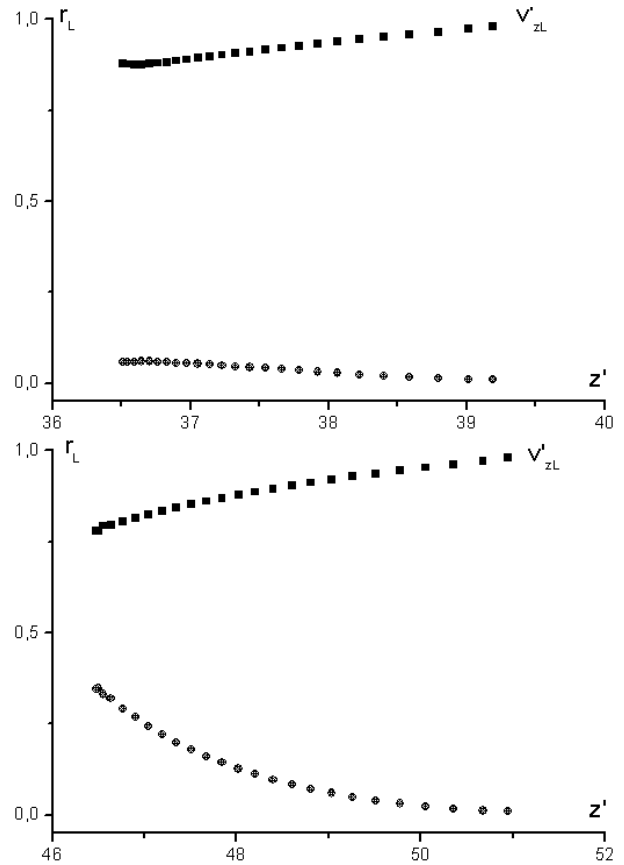


Рис. 3. Скорости частиц, их радиусы, расположения по  $z'$  для моментов времени  $t' = 40$  и  $t' = 52$ .

ну замедляющей системы, т.к. частицы достигают стенок волновода.

#### Список литературы

- [1] W.Gai, P.Schoessow, B.Cole, R.Konecny, J.Norem, J.Rosenzweig and J.Simpson. // Phys. Rev. Lett. - 1989. - V. 61, - N 24, - p.2756.
- [2] I.N.Onishchenko, V.A.Kiselev, A.K.Berezin, G.V.Sotnikov et al. // Proc. 1995 Particle Accelerator Conf., PAC'95(IEEE, 1995) - p. 782.
- [3] T.B.Zhang, J.L.Hirshfield, T.C.Marshall, B.Hafizi, and A.K.Ganguly // Proc. 1997 Particle Accelerator Conf., PAC'97.
- [4] J.A.Pasour et al. // Rev. Sci. Instrum. - 1997. - V. 68, - N 8. - p.3229.