

Дифракция электромагнитных волн на разрезе в R^3

Щербина В.А.

Харьковский Государственный Университет
61077, Украина, Харьков, пл. Свободы 4

Содержание

1. Вывод граничного уравнения	447
2. Осесимметричная задача. Граничное уравнение и его разрешимость	450

Аннотация

В работе квазистационарная задача дифракции на гладком идеально проводящем экране (разрез в R^3) S сводится к решению граничного псевдодифференциального уравнения первого порядка, эквивалентного уравнению Фредгольма второго рода в пространстве $L^2(S)$. В осесимметричном случае доказана однозначная разрешимость граничного уравнения.

1. Вывод граничного уравнения

В работе даётся полный вывод и подробное исследование граничного псевдодифференциального уравнения первого порядка, позволяющего численно промоделировать решение задачи о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах в R^3 .

Рассматривается квазистационарная задача дифракции "первичного" поля $E_0(x, t) = E_0(x)e^{-i\omega t}$ в вакууме на гладкой идеально проводящей поверхности, удовлетворяющей двум требованиям:

1. область $\Omega = R^3 \setminus S$ связна,
2. $S \in \Sigma$, где Σ – гладкая замкнутая поверхность.

Сразу заметим, что S может состоять из конечной совокупности непересекающихся фрагментов, и что задача легко обобщается на случай, когда второе условие на S заменяется более общим, позволяющим рассматривать дифракцию на совокупности экранов и тел с гладкой поверхностью.

Наконец, следует отметить, что требование гладкости S вполне можно заменить условием кусочной гладкости, когда речь идёт о прикладных аспектах предлагаемой ниже модели.

Итак, пусть задано поле $E_0(x)$, и

$$\Delta E_0(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0(x) = F(x), \quad x \in R^3.$$

Наличие идеально проводящего экрана S порождает в области $\Omega = R^3 \setminus S$ поле $E(x) = E_0(x) + E_1(x)$, где возмущение $E_1(x)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta E_1(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E_1(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$(\nabla, E_1(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$E_1(x) \times n(x) = -E_0(x) \times n(x), \quad (3)$$

$$x \in S, \quad n(x) - \text{нормаль к } S,$$

$$E_1(x) = \frac{e^{i\omega|x|/c}}{|x|} \left[c_0 \left(\frac{x}{|x|} \right) + O \left(\frac{1}{|x|} \right) \right] \quad (4)$$

при $|x| \rightarrow \infty$

Физический смысл этих условий общеизвестен.

Для решения задачи (1-4) мы используем параметрическое представление вида

$$E_1(x) = \nabla \times \int_S \left[j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - K j(y) \right] \frac{\exp[ip|x-y|]}{|x-y|} ds_y. \quad (5)$$

Здесь $p = \frac{\omega}{c}$, j – псевдовекторное поле на S , касательное к S , и

$$K j(y) = k_1(y)(j(y), \tau_1(y))\tau_1(y) + k_2(y)(j(y), \tau_2(y))\tau_2(y),$$

где $\tau_i(y)$ – орт направления, отвечающего главной кривизне $k_i(y)$ поверхности S в точке y .

Представленное в таком виде поле $E_1(x)$ автоматически удовлетворяет условиям (1), (2), (4), а условие (3) порождает псевдодифференциальное уравнение

$$\int_S^* \left[j(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} - K j(y) \frac{\partial}{\partial n(x)} - (n(x), j(y)) \nabla_x \frac{\partial}{\partial n(y)} + (n(x), K j(y)) \nabla_x \right] \times \frac{\exp[ip|x-y|]}{|x-y|} dS_y = f(x), \quad x \in S. \quad (6)$$

Символ \int^* означает предельное значение интеграла при $\epsilon \rightarrow 0$, если в выражении $\frac{\exp[ip|x-y|]}{|x-y|}$ заменить $x \rightarrow x_\epsilon = x + \epsilon n(x)$.

Чтобы прояснить физический смысл представления (5), найдём векторный потенциал $A(x)$, отвечающий полю $E_1(x)$. Для этого преобразуем поверхностный интеграл (5) к виду

$$\int J(y) \frac{\exp[ip|x-y|]}{|x-y|} d^3y,$$

где "ток" $J(y)$ представляет собой некоторое распределение, носитель которого принадлежит \bar{S} .

Гладкость поверхности Σ означает, что для любого $x \in \Sigma$ существует окрестность, для точек которой $y \in \Sigma$ можно ввести гладкую параметризацию вида

$$y = \hat{y}(u) = x + u + f(u)n(x), \quad (7)$$

где u – проекция вектора $y - x$ на плоскость T_x , касательную к Σ в точке x . Если в качестве базисных в плоскости T_x векторов выбрать $\tau_1(x), \tau_2(x)$, направление которых отвечает главным кривизнам $k_1(x)$ и $k_2(x)$ поверхности Σ , и $n(x) = \tau_1(x) \times \tau_2(x)$, то $f(u) = \frac{1}{2} [k_1(x)u_1^2 + k_2(x)u_2^2] + O(|u|^3)$. Под $K(x)$ в дальнейшем мы будем понимать тензор второго ранга на многообразии Σ , который в нашем специальном базисе $\tau_1(x), \tau_2(x)$ имеет вид

$$K(x) = \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 \\ 0 & k_2(x) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в случае произвольного выбора базиса на T_x $f(u) = \frac{1}{2}(K(x)u, u) + O(|u|^3)$ и $K_{mn}(x) = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial u_m \partial u_n}$.

Введем в окрестности Σ гладкую криволинейную систему координат

$$y = y(u, h) = \hat{y}(u) + hn(\hat{y}(u)) = \hat{y}(u) + h\hat{n}(u). \quad (8)$$

В рассмотренной выше окрестности $x \in \Sigma$

$$n(\hat{y}(u)) = \left[\frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial u_2} \right] / \left| \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial u_2} \right| = \frac{n(x) - \nabla f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}} = n(x) - K(x)u + O(|u|^2) \quad (9)$$

Криволинейные координаты (u, h) не являются, вообще говоря, ортогональными во всей окрестности Σ , но $\left(\frac{\partial y(u, h)}{\partial u_k}, \frac{\partial y(u, h)}{\partial h} \right) = 0$, и $\left(\frac{\partial y(u, 0)}{\partial u_1}, \frac{\partial y(u, 0)}{\partial u_2} \right) = 0$. Заметим, однако, что в важном для приложений случае, когда Σ – поверхность вращения, координаты (u, h) ортогональны, а в качестве координатной сетки на Σ можно взять систему параллелей и меридианов, где $u_1 \in [0, 2\pi)$ – угловой параметр, отвечающий смещению вдоль параллели, а u_2 – длина дуги меридиана.

В случае, когда сама S – поверхность вращения, координаты u_1 и u_2 пробегают некоторую совокупность цилиндров $[0, 2\pi) \times (0, L_k)$, отвечающих компонентам связности S .

Вернемся теперь к представлению (5) и перейдём в интеграле по S от переменных x к переменным (u, h) .

Из равенств (8), (9) следует, что в окрестности любого $x \in \Sigma$

$$\frac{\partial y(u, h)}{\partial u_k} = (I - hK(x))\tau_k(x) + O(|u|).$$

Поскольку $\frac{\partial y(u, h)}{\partial u_k} \perp \hat{n}(u)$, то элемент объема в системе координат (u, h) имеет вид

$$d^3y = \left| \frac{\partial y(u, h)}{\partial u_1} \times \frac{\partial y(u, h)}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 dh = \left[1 - Sp\hat{K}(y)h + DetK(\hat{y})h^2 \right] d^2udh,$$

где $\hat{y} \in \Sigma$ и u лежат на одном перпендикуляре к Σ .

Запишем теперь цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \int_S \left[j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - K(y)j(y) \right] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} dS_y = \\ & \int \delta(h) \left[1 - Sp\hat{K}(u)h + Det\hat{K}(u)h^2 \right] \times \\ & \left[\hat{j}(u) \frac{\partial}{\partial h} - \hat{K}(u)\hat{j}(u) \right] \frac{e^{ip|x-y(u,h)|}}{|x-y(u,h)|} d^2 u dh = \\ & - \int \left[\hat{j}(u)\delta'(h) + \hat{K}(u)\hat{j}(u)\delta(h) \right] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^2 u dh = \\ & - \int \left[1 + Sp\hat{K}(u)h \right] \left[\hat{j}(u)\delta'(h) + \right. \\ & \left. \hat{K}(u)\hat{j}(u)\delta(h) \right] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y = \\ & - \int \left[\hat{j}(u)\delta'(h) + \hat{K}_1(u)\hat{j}(u)\delta(h) \right] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y \end{aligned}$$

Здесь $\hat{j}(u) = j(\hat{y}(u))$, $\hat{K}(u) = K(\hat{y}(u))$, $\hat{K}_1(u) = \hat{K}(u) - Sp\hat{K}(u)I$, и в двух последних строчках мы вновь вернулись к переменным y_k , $k = 1, 2, 3$, рассматривая (u, h) как функции от y . В итоге представление (5) принимает вид

$$E_1(x) = - \int [\nabla \times M(y)] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y, \quad (5')$$

где распределение

$$M(y) = j(\hat{y})\delta'(h(y)) + K_1(\hat{y})j(\hat{y})\delta(h(y)) \quad (10)$$

является аналогом плотности вектора намагниченности, которая и порождает рассеянное поле $E_1(x)$. Плотность "тока", наведенного на S падающим полем $E_0(x)$, представляется, таким образом, в виде $J(y) = -\nabla \times M(y)$.

С физической точки зрения представление (5), (5') выглядит более естественным, чем обычно используемое [1] выражение для E_1 через поверхностные токи, когда $H_1(x) = \frac{1}{c} \nabla \times \int j(y) \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y$ и

$$\begin{aligned} E_1(x) = \frac{i}{p} \nabla \times H_1 = \frac{i}{\omega} \left[\nabla(\nabla \cdot \int j(y) \times \right. \\ \left. \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y) + p^2 \int j(y) \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} d^3 y \right]. \end{aligned}$$

Одно дело молекулярные токи, отвечающие за намагниченность (\cdot) , и другое – макроскопический ток $j(y)$ на идеально проводящем экране.

Покажем, что специальный вид намагниченности (\cdot) в представлении (5), (5') однозначно определяется краевым условием (3).

Прежде всего отметим, что падающее поле $E_0(x)$ гладко в окрестности S и, следовательно, предельные значения $n(x) \times E_1(x \pm 0n(x))$ должны

быть одинаковы и равны гладкой на S функции $E_0(x) \times n(x)$. При этом достаточно проверить непрерывность тангенциальной составляющей поля E_1 , представленного в виде (5), для стационарного случая, когда $\omega = 0$, поскольку ядра $\frac{e^{ip|x-y|} - 1}{|x-y|}$, $\frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|} - 1}{|x-y|}$ и $\frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|} - 1}{|x-y|}$ при $x = \hat{x} + \varepsilon n(\hat{x})$ имеют суммируемую мажоранту $\frac{C}{|\hat{x} - y|}$, а $j(y)$ во всех дальнейших построениях будет достаточно регулярной функцией от y .

Итак, для $x_\varepsilon = x \pm \varepsilon n(x)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n(x) \times \left[\nabla \times \int_S j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x_\varepsilon - y|} dS_y \right] = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S j(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{1}{|x_\varepsilon - y|} dS_y + \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S (n(x), j(y)) \nabla_x \frac{(x_\varepsilon - y, n(y))}{|x_\varepsilon - y|^3} dS_y = \\ & - \int_S^* j(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{1}{|x - y|} dS_y + \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S (n(x), j(y)) \left[\frac{n(y)}{|x_\varepsilon - y|^3} dS_y - \right. \\ & \left. 3 \frac{(x_\varepsilon - y, n(y))(x_\varepsilon - y)}{|x_\varepsilon - y|^5} \right] dS_y \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным свойством нормальной производной потенциала двойного слоя [2], имеющей одинаковые предельные значения для гладкого $j(y)$, обращающегося в нуль на краю S . Что касается второго слагаемого, то, как видно из записи, нам достаточно исследовать предельные значения выражений

$$\begin{aligned} & \left(\tau_k(x), \int_S (n(x), j(y)) \left[\frac{n(y)}{|x_\varepsilon - y|^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. 3 \frac{(x_\varepsilon - y, n(y))(x_\varepsilon - y)}{|x_\varepsilon - y|^5} \right] dS_y \right) = \\ & \int_S \frac{(n(x), j(y))(n(y), \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^3} dS_y - \\ & 3 \int_S \frac{(n(x), j(y))(x - y, n(y))(x - y, \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^5} dS_y + \\ & 3\varepsilon \int_S \frac{(n(x), j(y))(n(x), n(y))(x - y, \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^5} dS_y \end{aligned}$$

В двух первых интегралах предел $\varepsilon \rightarrow 0$ существует и не зависит от знака перед ε . Предел третьего слагаемого совпадает при любом $\delta > 0$ с

$$\mp 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{S \cap K_\delta(x)} \frac{(n(x), j(y))(n(x), n(y))}{|x_\varepsilon - y|^2} \times \frac{(x - y, \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^3} dS_y$$

где

$$K_\delta(x) = \{y : |y - x| < \delta\},$$

но

$$(x - y, \tau_k(x)) = -u_k,$$

$$\begin{aligned} (n(x), j(y)) &= (n(x) - n(y), j(y)) = (K(x)u, j(y)) + \\ &O(|u|^2) = (K(x)u, j(x)) + O(|u|^2) = \\ &(u, K(x)j(x)) + O(|u|^2) \\ |x_\varepsilon - y|^2 &= |u|^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon O(|u|^2). \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned} \mp 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{S \cap K_\delta} \frac{(n(x), j(y))(x - y, \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^5} dS_y = \\ \pm 3 \int \frac{u_k(u, K(x)j(x))}{(|u|^2 + 1)^{5/2}} d^2u = \\ \pm 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\infty \frac{\rho^3 d\rho}{(1 + \rho^2)^{5/2}} (\tau_k(x), K(x)j(x)) = \\ \pm 2\pi (\tau_k(x), K(x)j(x)). \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\tau_k(x), n(x) \times \left(\nabla \times \int_S K(y)j(y) \times \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{|x_\varepsilon - y|} dS_y \right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_S (\tau_k(x), K(y)j(y)) \times \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial n(x)} \frac{1}{|x_\varepsilon - y|} dS_y - \int_S (n(x), K(y)j(y)) \times \right. \\ \left. \frac{(y - x_\varepsilon, \tau_k(x))}{|x_\varepsilon - y|^3} dS_y \right\} = \mp 2\pi (\tau_k(x), K(x)j(x)) + \\ \int_S \left\{ \frac{(\tau_k(x), K(y)j(y))(y - x, n(x))}{|x - y|^3} - \right. \\ \left. \frac{(n(x), K(y)j(y))(y - x, \tau_k(x))}{|x - y|^3} \right\} dS_y \end{aligned}$$

Этот результат позволяет подвести итог предварительному исследованию граничного уравнения (6), полученного как следствие параметрического представления (5) для рассеянного поля $E_1(x)$.

Показано что уравнение (6) можно записать в форме

$$\int_S^* P_x j(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{1}{|x - y|} dS_y + \sum_{n=1}^2 \int_S R_m(x, y) j_m(y) dS_y = E_0(x) \times n(x). \quad (11)$$

Здесь P_x – оператор проектирования на касательную к S в точке x плоскость T_x , а функции $(\tau_k(x), R_m(x, y)) = O\left(\frac{1}{|x - y|}\right)$.

Оператор L , отвечающий первому слагаемому в левой части (11), симметричен в $L^2(S)$ и, как можно показать, удовлетворяет, при сделанных относительно S предположениях, оценке вида $(L_S j, j) > \delta \|j\|^2$, $\delta > 0$.

Самосопряженное расширение (по Фридрихсу) оператора L_S имеет ограниченный обратный на всем $L^2(S)$, и, следовательно, уравнение (11) после умножения на L_S^{-1} превращается в уравнение Фредгольма второго рода. Таким образом, вопрос о его разрешимости эквивалентен единственности решения.

2. Осесимметричная задача. Граничное уравнение и его разрешимость

Пусть разрез S – поверхность вращения вокруг оси e_3 в R^3 кривой L , уравнение которой задано параметрически: $z = z(s)$, $r = r(s)$ и $\dot{z}^2 + \dot{r}^2 = 1$. При этом поле $E_0(x) = f_1(r, z)(e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi) + f_2(r, z)e_3$ в цилиндрической системе координат.

Поскольку в этом случае вектор $E_0(x)$ и $n(x)$ лежат в плоскости $\varphi = \cos t$, правая часть уравнения (6), (11')

$$n(x) \times E_0(x) = -\tau_1(x) f(s), \quad (12)$$

где $f(s) = \dot{r}(s)f_1(r(s), z(s)) + \dot{z}(s)f_2(r(s), z(s))$ и $\tau_1(x) = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi$ – орт касательной к параллели на поверхности S .

Мы, кроме того, обозначим $\tau_2(x) = \dot{r}(s)(\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2) + \dot{z}(s)e_3$, так что

$$n(x) = \tau_1 \times \tau_2 = \dot{z}(s)(\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2) - \dot{r}(s)e_3.$$

Из сказанного относительно разреза S и правой части (12) естественным образом следует, что ре-

нение граничного уравнения $j(y)$ следует искать в виде $j(y) = \tau_1 u(t)$.

Это позволяет существенно упростить уравнение (11') в одном из самых важных для приложений случаев.

Итак, умножим обе части уравнения (6) на $\tau_1(x)$ и перепишем его в новых обозначениях

$$\int_S^* \left[(j(y), \tau_1(x)) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} - (Kj(y), \tau_1(x)) \frac{\partial}{\partial n(x)} - (j(y), n(x)) \frac{\partial^2}{\partial n(y) \partial \tau_1(x)} + (Kj(y), n(x)) \frac{\partial}{\partial \tau_1(x)} \right] \frac{\exp[ip|x-y|]}{|x-y|} = -f(s). \quad (13)$$

На поверхности S

$$y = r(t)(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + z(t)e_3,$$

$$dS_y = r(t)d\theta dt,$$

$$(\tau_1(y), \tau_1(x)) = \cos(\varphi - \theta),$$

$$Kj(y) = k_1(t)u(t)\tau_1(y),$$

$$k_1(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{r(t)},$$

$$(j(y), n(x)) = u(t)(\tau_1(y), n(x)) = u(t) \sin(\varphi - \theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1(x)} = \frac{1}{r(s)} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$|x-y| = \{r^2(t) + r^2(s) - 2r(t)r(s) \cos(\varphi - \theta) + [z(t) - z(s)]^2\}^{1/2}.$$

Прежде, чем подставить эти выражения в левую часть равенства (13), заметим, что, поскольку подинтегральное выражение есть функция t, s и разности $\varphi - \theta$, то можно заменить $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ на $-\frac{\partial}{\partial \theta}$, положить затем $\varphi = 0$, и в слагаемых, содержащих множитель $-\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$, заменить его на $\cos \theta$ (выполнив интегрирование по частям). Как легко проверить, уравнение (13) примет окончательный вид

$$\int_0^{*L} Q(s,t)u(t)dt = f(s) \quad (14)$$

$$Q(s,t) = -r(t) \left[\dot{z}(s) \frac{\partial}{\partial r} - \dot{r}(s) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\dot{z}(s)}{r(s)} \right] \times$$

$$\left[\dot{z}(t) \frac{\partial}{\partial \rho} - \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\dot{z}(t)}{r(t)} \right] \Psi(r, z, \rho, \zeta).$$

$$r = r(s), \quad z = z(s), \quad \rho = r(t), \quad \zeta = z(t),$$

$$\Psi(r, z, \rho, \zeta) = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \times$$

$$\frac{\exp[ip\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + (z - \zeta)^2}]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + (z - \zeta)^2}}.$$

Детальный анализ ядра $Q(s, t)$ показывает, что оно представляет собой обобщенную функцию вида

$$Q(s, t) = R(s, t) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \ln[(s-t)^2 + 0], \text{ где } R(s, t) = R_1(s, t) + (s-t)^2 \ln|s-t| R_2(s, t). R_1(s, t), R_2(s, t) - \text{гладкие функции, и в случае, когда } u(0) = u(L) = 0,$$

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \ln[(s-t)^2 + 0] u(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L u'(t) \frac{t-s}{(s-t)^2 + \varepsilon^2} dt.$$

Стоящий справа интеграл представляет собой сингулярный в смысле Коши интеграл $\int_0^L P \frac{u'(t)}{t-s}$.

Покажем, что уравнение (14) имеет единственное решение при любом $f \in L^2((0, L))$.

Для этого, как было доказано выше, достаточно доказать его однозначную разрешимость.

Из выражения для $Q(s, t)$ в (14) получим равенство

$$Im \int_0^L \int_0^L Q(s,t)u(t)\overline{u(s)} dt ds = \frac{p}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\omega_q \left(\int_S \left[j(x) \frac{\partial}{\partial n(x)} - k_1(x)j(x) \right] e^{ip(x,q)} dS_x, \int_S \left[j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - k_1(y)j(y) \right] e^{ip(y,q)} dS_y \right), \quad (15)$$

поскольку интеграл по единичной сфере $S_1(0)$

$$\frac{p}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\omega_q e^{ip(x-y,q)} = \frac{\sin p|x-y|}{|x-y|}.$$

Таким образом, если $u \in L^2((0, L))$ – решение однородного уравнения (14), то для отвечающего ему $j(x) = u(s)\tau_1(x)$ выполняется равенство

$$\int_S \left[j(x) \frac{\partial}{\partial n(x)} - k_1(x)j(x) \right] e^{ip(x,q)} dS_x = 0$$

при $|q| = 1$.

Рассмотрим теперь векторное поле

$$A(x) = \int_S \left[j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - k_1(y)j(y) \right] \times \frac{\exp(ip|x-y|)}{|x-y|} dS_y. \quad (16)$$

Ясно, что $\Delta A(x) + p^2 A(x) = 0$ при $x \in \Omega$, и при достаточно большом $r = |x|$ справедливо разложение

$$A(x) = \frac{e^{ipr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(k)}{r^n}, \quad \text{где } k = \frac{x}{r}.$$

При этом

$$C_0(k) = \int_S \left[j(x) \frac{\partial}{\partial n(x)} - k_1(x) j(x) \right] e^{ip(x,q)} dS_x = 0.$$

Но

$$\Delta A(x) + p^2 A(x) = \frac{e^{ipr}}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\Delta_{\theta, \varphi} C_n + n(n+1)C_n \right] - ip2(n+1)C_{n+1} \right\} \frac{1}{r^n} = 0$$

и $C_0(k) = 0$ влечет за собой $C_n(k) = 0$ для всех n .

Но если поле $A(x) = 0$ при $r > R$, то, будучи аналитической функцией от x всюду в Ω (как видно из представления (16)), $A(x) \equiv 0$ в этой области. И поскольку скачок $A(x)$ на разрезе S равен $4\pi j(x)$, то $(Cu, u) = 0$ влечет равенство $u = 0$. Этим завершается доказательство однозначной разрешимости уравнения (14).

Список литературы

- [1] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах -М.: "Радиотехника" -1996. - 176 с.
- [2] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния -М.: "Мир" - 1987. - 311 с.
- [3] Shcherbina V.A. Mathematical models for electromagnetic scattering in R^3 // Coff. Proceed. Math. Methods in electromagnetic theory, Kharkov, Ukraine - 1998. - pp. 625-628.
- [4] Щербина В.А. Метод граничных интегральных уравнений для второй краевой задачи в области с разрезом // Теория функций, функциональный анализ и их приложения - Харьков: Выш. Шк. - 1988 - Вып. 50 - С 128-131.