

Нелинейная дрейфово-диссипативная структура с температурными и непотенциальными возмущениями в плазме. III

Водяницкий А.А.

ИТФ ННЦ Харьковский физико-технический институт

e-mail: vodyanitskii@kipt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 14 февраля 2001 года.

Содержание

1. Введение	225
2. Основное уравнение для волн с учетом температурных возмущений	227
2.1. Уравнение гармонического баланса	227
2.2. Нелинейные члены уравнений и нормальные функции	230
3. Линейные и нелинейные пороги возбуждения волн, включая температурные возмущения	233
3.1. Исследование пороговых соотношений в терминах градиентных величин	234
3.2. Линейные магнитные пороги	238
3.3. Сведения о нелинейных порогах	242
4. Универсальный уровень амплитуды доминирующей волны	243
4.1. Плазма низкой плотности и высокой температуры, $q_k < 1$	244
4.2. Большие значения параметра q_k	246
4.3. Объяснение универсального уровня амплитуды	248
Приложение А. Нелинейные матричные элементы. Квадратичные матричные элементы	249
Приложение Б. Нелинейное самовоздействие дрейфовых волн	251

Abstract

Drift-dissipation (DD) instability of non-uniform plasma in known experiments is identified with its linear threshold theory. Abnormal wave convection of the plasma, which considerably surpasses its classical outflow, is also measured. However, stimulated by experiments various theoretical models overlooked the phenomena of abnormal plasma flow, which was called to explain that instability. This and previous works (see refs. in the text) devoted to construction of nonlinear theory of the DD instability, which is coordinated with recovery of anomalous wave plasma and thermal electron convection. Generalization of asymptotic decomposition represents some kind of regularization of the perturbation theory. The normal functions, connecting, for example, amplitudes of wave fluctuations of electric potential with amplitudes of density fluctuations, include dissipative parts (i.e. influence of electron-ion friction responsible for instability of drift waves), which result in a phase difference between them and, as result, in abnormal wave convection of plasma. Convection of electron heat is similarly investigated. Correlation between failure of phases and abnormal convection is proved to be true by experiment. Nonlinear DD structure, studied in a series of done works, includes drift waves unstable in the linear theory, their fading maximum harmonics and zero-frequency modes, which are the beatings of unstable waves. As a result of research of stability of nonlinear stationary modes it is received, that owing to strong nonlinear connection of unstable waves by means of zero-frequency modes, these modes together with some drift waves fade. The dominant drift wave, which is stabilized by of energy in the maximum harmonics, survives. A wave vector of the dominant wave grows together with the after-threshold parameter, which could be represented as the external magnetic field (effect of reorganization of waves). This has essential influence on the coefficient of the plasma convection which changes in oscillating fashion depending on confining magnetic field at given gradient after-threshold. The serious deviation of the threshold frequency of DD instability from the linear law of a dispersion (with respect to the azimuthal component of the wave number), accounting for perturbations of

electron temperature and also for non-potential nature of the equations, which does not have an initial form for possessing vortices solutions, allows one to refuse research of excitation of whirlwinds. Research of the influence non-potential property on excitation of DD structures at final $\beta \leq \nu_{ei}/\omega_{He}$ gives an opportunity to carry over results on non-linear DD structures and anomalous flow to studies of the role of boundary oscillations and drift waves inside the core of thermonuclear plasma under magnetic confinement.

1. Введение

В работах [6] и [7], опубликованных в одном из предыдущих выпусков журнала, было проведено исследование нелинейной стадии дрейфово-диссипативной неустойчивости неоднородной замагниченной плазмы малого газокинетического давления в пренебрежении возмущениями электронной температуры. В условиях малого газокинетического давления плазмы по сравнению с давлением магнитного поля уравнение для возмущений продольной компоненты электромагнитного потенциала отщепляется от остальных уравнений и эволюция дрейфовых волн рассматривается в приближении потенциального электрического поля. Остальные пренебрежения контролируются малыми значениями приводимых ниже параметров плазмы и являются удовлетворительными в большинстве встречающихся в природе неоднородных плазм, неустойчивых благодаря воздействию таких диссипативных факторов как продольное электронно-ионное трение и исследуемая далее продольная электронная теплопроводность. В термоядерных ловушках воздействие этих диссипативных факторов, возбуждающих дрейфово-диссипативную неустойчивость, существенно в периферийных, с пониженной температурой, областях плазмы, сопрягающихся с областями высокой температуры. При этом остается нерешенной проблема краевых колебаний, ответственными за повышенный уход тепла и частиц плазмы и решения для которых непрерывно сшиваются с волновыми решениями горячей плазмы. Оставляя в стороне изложение комплекса проблем, возникающих при исследовании устойчивости и нелинейной эволюции удерживаемых в сложных конфигурациях магнитного поля плазм, укажем на роль и место, в проблеме удержания магнитным полем, нелинейных стационарных режимов дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы*.

Наличие ансамбля дрейфовых возбуждений обязано своим существованием градиентам плотности и температуры плазмы, а также градиентам удерживающего и создаваемого токами магнитных полей. Благодаря неравновесности плазмы могут возникнуть ее

* Отметим также, что для проблемы термоядерного синтеза принципиально важными являются исследования структуры турбулентных температурных возмущений в "коре" плазмы современных термоядерных ловушек [8].

бездиссипативные неустойчивости. К самым опасным из них в традиционной схеме магнитного удержания плазмы относится желобковая неустойчивость (разбиение плазмы на желобки, расположенные вдоль магнитного поля, и аномально быстрая утечка ее из удерживаемого объема). Сразу же отметим, что эта неустойчивость будет стабилизирована эффектами конечного ларморовского радиуса ионов [4] и диссипацией в виде поперечной вязкости ионов. Уже это избавляет от необходимости использования в простых магнитных системах сложной конфигурации магнитного поля с перекошенностью магнитных силовых линий (shear'ом). Однако, наличие многих диссипативных факторов, характерных для плазмы такой плотности, служит спусковым механизмом для возбуждения целого ряда диссипативных неустойчивостей, а именно: дрейфово-диссипативная, токовая диссипативная, токовая конвективная, дрейфово-температурная, резистивная перестановочная и другие. При этом необходимо рассматривать как потенциальные, так и вихревые электромагнитные поля в плазме. Последний случай — возбуждения с вихревыми электромагнитными полями — характерен для плазмы высокого давления с $\beta > \nu_{ei}/\omega_{He}$, где $\beta = 4\pi n T_e / H^2$ — отношение кинетического к магнитному давлению. n — плотность плазмы, T_e — температура электронов, ν_{ei} — частота электрон-ионных столкновений, $\omega_{He} = eH/m_e c$ — гирочастота электронов, H — магнитное поле.

Влияние на устойчивость плазмы эффектов конечного β , а также возмущений электронной температуры является основным предметом исследования настоящей работы. (Условия равновесия или медленного по сравнению с периодами неустойчивости эволюционного движения плазмы выполнены). Учитываются следующие дестабилизирующие факторы в двухкомпонентной электронно-ионной плазме: продольное электрон-ионное трение и электронная теплопроводность, кубичные ангармонизмы поперечной ионной столкновительной вязкости. Возмущениями продольного движения ионов и ионной температуры вместе с коэффициентами ионной теплопроводности и продольной ионной вязкости пренебрегаем в силу малости отношения квадрата тепловой скорости ионов v_{Ti}^2 к квадрату продольной фазовой скорости волны $(\omega_*/k_{||})^2$:

$$\sigma_i = \left(\frac{k_{||} v_{Ti}}{\omega_*} \right)^2 \ll 1.$$

Невозмущенная температура ионов, однако, учитывается (например, в токовой функции ионов и коэффициентах ионной вязкости — см. далее). Основным стабилизирующим диссипативным фактором линейной теории является поперечная ионная столкновительная вязкость, выводящая плазменно-волновую систему на порог неустойчивости. Поперечное электронно-ионное трение, как известно, приводит к классической диффузии плазмы, но оказывает слабое стабилизирующее влияние на неустойчивость, не выводя на порог неустойчивости ни по одной из компонент волнового вектора.

Остановимся несколько подробнее на одной из самых опасных, как считается, — дрейфово-диссипативной неустойчивости неоднородной плазмы, приводящей к аномально усиленной диффузии плазмы. Эта неустойчивость была призвана объяснить повышенную утечку плазмы поперек магнитного поля, описываемую коэффициентом диффузии Бома:

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{cT}{eH}$$

Оценочные формулы давали возможность получить коэффициент диффузии Бома и использовали результат линейной теории для максимального инкремента, приблизительно равного дрейфовой частоте

$$\Omega_{ne} = \frac{cT}{eH} K_y \frac{d}{dx} \ln n_0(x)$$

Здесь $n_0(x)$ — неоднородная плотность плазмы, T — температура электронов, H — внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси z , K_y — компонента волнового вектора вдоль оси y , c и e — скорость света и заряд электрона.

Дисперсию дрейфовой волны определяют следующие факторы: электрический дрейф, задающий линейную зависимость от азимутальной компоненты волнового вектора, поперечная инерция ионов, вводимая посредством параметра $b_\kappa = K_\perp^2 \rho_{ie}^2$, где $K_\perp^2 = K_x^2 + K_y^2$; $\rho_{ie}^2 = T_e / (m_i \omega_{Hi}^2)$; $\omega_{Hi} = eH / (m_i c)$; m_i — масса ионов. Основную зависимость частоты дрейфовой волны

$$\omega = \Omega_{ne} / (1 + (1 + t_i) b_\kappa)$$

компонент волнового вектора определяет электрический дрейф в выражении для Ω_{ne} и поперечная инерция ионов, вводимая параметром магнитного поля b_κ . Выражение для частоты получается в качестве приближенного нуля дисперсионной функции (см. ниже), в которую включены, помимо перечисленных эффектов, еще и эффекты конечного давления и непотенциальности дрейфовых колебаний, инерции электронного тепла, продольной электронной теплопроводности и поперечной ионной столкновительной вязкости. В силу действия указанных эффектов дисперсионная функция зависит от продольного волнового числа $K_z = nk_{||0}$

и описывает, кроме электронной дрейфовой ветви, также и ионную дрейфовую ветвь, альфвеновскую ветвь колебаний и энтропийную моду, связанную с переносом электронного тепла.

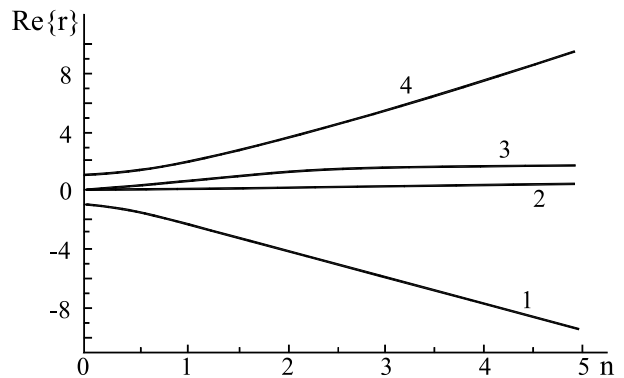


Рис. 1. Реальная часть частоты различных ветвей колебаний в неоднородной плазме в зависимости от безразмерного продольного волнового числа n . $\beta = 0.001$; $t = 1$; $g_\kappa = 4.0$; $y_\kappa = 40$; $b_\kappa = 0.01$; $\omega_{Te} = 0$.

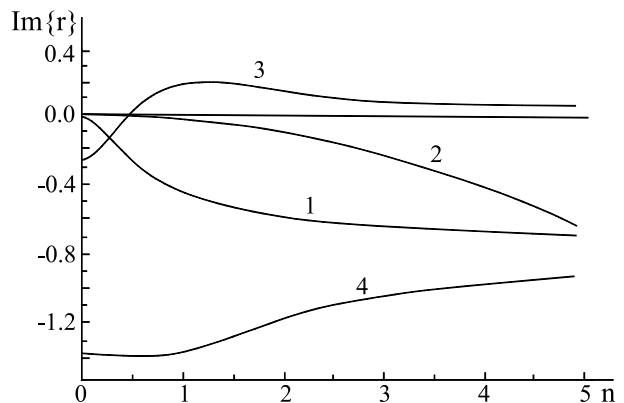


Рис. 2. Мнимая часть частоты различных ветвей колебаний в неоднородной плазме с диссипацией в зависимости от n . $\beta = 0.001$; $t = 1$; $g_\kappa = 4.0$; $y_\kappa = 40$; $b_\kappa = 0.01$; $\omega_{Te} = 0$.

Для выяснения физической ситуации приведем здесь результаты числовых расчетов дисперсии и устойчивости волн, которыми характеризуется исследуемая далее система. Дисперсионная функция (56) вместе с выражениями (57) и (58) после приведения к общему знаменателю содержит в числителе полином четвертой степени относительно комплексной безразмерной частоты $r = \omega / \Omega_{ne}$. Четыре корня этого полинома описывают четыре ветви колебаний неоднородной замагниченной плазмы и представлены на рис. 1 и 2 в виде вещественной и мнимой частей безразмерного параметра r , определяемого первой формулой из списка (59) и представляющего собой отношение частот — искомой к электронной дрейфовой. На рис. 1 кривые 1 и 4 являются при больших $n \sim K_z$ отрицательно и

положительно частотными ветвями альфвеновских волн, переходящими при малых K_z в электронную дрейфовую (частота $\text{Re } r$ положительна) и ионную дрейфовую ветви, соответственно. Кривая 3 описывает конвективную моду (при малых K_z), переходящую по мере роста K_z в электронную дрейфовую ветвь колебаний.

В настоящей работе исследуется нелинейная диссипативная структура и устойчивость волн, дисперсия линейной теории которых представлена кривой 3 в той ее части, где существенно отличие ее частоты от электронной дрейфовой частоты. В этой же части максимален инкремент неустойчивой в линейной теории дрейфовой волны, как мы ради краткости ее называем. Поведение инкремента дрейфовой волны в зависимости от аксиального компонента волнового числа изображено на рис. 2 кривой 3. Кривая 2 на обоих рисунках отражает устойчивую аperiодическую энтропийную моду. Представленная кривыми 1 и 4 альфвеновская ветвь устойчива при всех K_z .

2. Основное уравнение для волн с учетом температурных возмущений

2.1. Уравнение гармонического баланса

В качестве исходной системы уравнений, описывающей нелинейную теорию дрейфово-диссипативной неустойчивости, возьмем систему пяти уравнений: уравнений непрерывности ионов и электронов с проинтегрированными выражениями для поперечных скоростей; уравнения продольного движения электронов, в котором пренебрежено электронной инерцией, но выписываются термосила и как электростатическая, так и вихревая части электрического поля; уравнения для эволюции электронной температуры с учетом конвективного переноса тепла и слагаемых, представляющих адиабатическое и термосильное тепло, а также продольную теплопроводность; и уравнения для продольной компоненты векторного потенциала, следующего из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения.

Эти уравнения для плазмы представляют собой фрагмент системы уравнений двухкомпонентной гидродинамики, применимость которой и условия проведенных пренебрежений описаны в предыдущих работах цикла.

$$\partial_t \tilde{v} + \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} \tilde{v} + \exp(-\tilde{v}) \nabla_{\perp} \tilde{n} (\vec{v}_{i2} + v_D) = S, \quad (1)$$

$$\partial_t \tilde{v} + \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} \tilde{v} + \exp(-\tilde{v}) \left[\nabla_{\parallel} \tilde{n} v_{\parallel}^e + \nabla_{\perp} \tilde{n} \vec{v}_D \right] = S, \quad (2)$$

$$\tilde{n} u_{\parallel} = -\frac{\mu_e^{5/2}}{\alpha_0 y_{e0}} \left[\nabla_{\parallel} (\tilde{v} + B \tilde{\theta}_e) + \frac{1}{\mu_e} \nabla_{\parallel} \tilde{\psi} + \frac{\beta_k}{\mu_e} (\partial_t + \vec{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) a_{\parallel} \right], \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \left(\partial_t + \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} + v_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} \right) \tilde{\theta}_e + \nabla_{\parallel} v_{\parallel}^e + \beta_0 \exp(-\tilde{v}) \nabla_{\parallel} (\tilde{n} u_{\parallel}) = \frac{2}{7\pi^e} \nabla_{\parallel} \chi_{\parallel 0}^e \nabla_{\parallel} \times \exp \left(\frac{7}{2} \tilde{\theta}_e \right) + y_{e0} \frac{\alpha_0 \tilde{n}}{\mu_e^{5/2}} u_{\parallel}^2 + \frac{4}{3} 0.73 \tau_e \omega_* (v_{\parallel}^e)^2, \quad (4)$$

$$\Delta_{\perp} a_{\parallel} = -\tilde{n} u_{\parallel}, \quad (5)$$

где $\nabla_{\parallel} = \partial/\partial z$, $\nabla_{\perp} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y$, $\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2$. Уравнения записаны для пяти неизвестных безразмерных функций: логарифма плотности $\tilde{v}(\vec{r}, t) = \ln \tilde{n}$, продольной токовой скорости, равной продольной скорости электронов $u_{\parallel} = v_{\parallel}^e = k_{\parallel} V_{\parallel}^e / \omega_*$ в пренебрежении движением ионов, безразмерных электростатического и продольной компоненты векторного потенциала $\tilde{\psi}(\vec{r}, t) = e_e \varphi / T_{e0}$,

$$a_{\parallel}(\vec{r}, t) = A_{\parallel}(\vec{r}, t) c k_{\parallel 0} k_{\perp 0}^2 / (4\pi e_e n_{00} \omega_*)$$

и логарифма электронной температуры (в формулах будем использовать и обозначение для относительной температуры), $\theta_e \equiv \ln \mu_e = \ln T^e / T_{e0}$. Здесь плотность электронов и ионов \tilde{n} , температура электронов T^e , электростатический потенциал $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ и продольная компонента векторного потенциала A_{\parallel} — размерные величины.

Напомним, что при переходе к безразмерным переменным в качестве характерного времени выступала величина $2\pi/\omega_*$, где $\omega_* = c T_{e0} k_{\perp 0}^2 / e H_0$ — характерная градиентная частота; в качестве характерных пространственных масштабов приняты поперечный $L_{\perp} = 2\pi/k_{\perp 0}$ и продольный $L_{\parallel} = 2\pi/k_{\parallel 0}$ размеры плазмы. Приведем для справок входящие в систему уравнений слагаемые, представляющие собой вклад в уравнение непрерывности поперечных электрического дрейфа, ионной инерции и поперечной столкновительной вязкости ионов

$$\vec{v}_{\perp}^e = \vec{v}_E + v_L^e, \quad \vec{v}_E = -[\vec{h}, \nabla_{\perp} \psi], \quad \vec{h} = \vec{H}/H, \quad (6)$$

$$v_L^e = -[\vec{h}, \nabla_{\perp} \pi^e / \tilde{n}], \quad \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} = \tilde{\psi}'_y \partial_x - \tilde{\psi}'_x \partial_y,$$

$$\nabla_{\perp} \tilde{n} \vec{v}_{i2} = -b \left\{ \nabla_{\perp} (\tilde{n} d_{\perp} (\nabla_{\perp} \xi) / dt) - \eta_0 [\Delta_{\perp} (\tilde{n}^2 \Delta_{\perp} \xi) + 4(\tilde{n}^2 \xi''_{xy})''_{xy}] \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{d_{\perp}}{dt} = \partial_t + \psi'_y \partial_x - \psi'_x \partial_y, \quad (8)$$

$$\eta_0 = \frac{0.3t_i}{(\omega_{Hi} \tau_{ii0})},$$

$$\Delta_{\perp} = \partial_x^2 - \partial_y^2,$$

$$\nabla_{\perp} \tilde{n} \vec{v}_D = -\nabla_{\perp} \frac{1}{\omega_{He} \tau_{ei}} \left(\nabla_{\perp} \pi - \frac{3}{2} \tilde{n} \nabla_{\perp} \mu_e \right). \quad (9)$$

В системе уравнений и обозначениях к ней введены следующие величины и параметры: параметр продольного трения $y_e = \alpha_0 y_{e0} \exp \nu_0 = \nu_{ei} \omega_* m_e / k_{\parallel 0}^2 T_{e0}$, (через этот же параметр выражается продольная электронная температуропроводность $\chi_{\parallel} = \gamma_0^e \exp(-\nu_0) / y_{e0} = \gamma / y_e$; $\alpha_0 = 0.51$, $\gamma_0^e = 3.16$, $\gamma = \gamma_0^e \cdot \alpha_0 = 1.61$); параметр поперечной ионной инерции $b = k_{\perp 0}^2 \rho_{ie}^2$, где $\rho_{ie}^2 = T_{e0} m_i / e^2 H_0^2$ — квадрат ларморовского радиуса ионов, рассчитанного по электронной температуре; $\eta = \eta_0 \exp \nu_0$, (8), — параметр поперечной ионной столкновительной вязкости; $\pi = (p_e + p_i) / n_0 T_{e0}$ — безразмерное давление электронов и ионов плазмы; и, наконец, $\beta_k = \beta k_{\perp 0}^2 / k_{\parallel 0}^2$ — параметр, учитывающий конечное электронное давление $\beta = 4\pi \tilde{n}_0 T_{e0} / H_0^2$; $\nu_0 = \nu_0(x)$ — логарифм неоднородной плотности. Числовая константа $B = 1 + \beta_0^e = 1.71$ в уравнении продольного движения электронов (3) составлена из вклада электронного давления и термосилы, в которую входит сомножителем $\beta_0^e = 0.71$.

Чтобы не учитывать возмущения электронной температуры, достаточно формально положить $B=0$. Тогда уравнение (4) отщепляется от остальных уравнений. Наряду с этим в уравнении температуропроводности происходит объединение термосильного тепла и тепла, выделяемого при адиабатическом сжатии, при помощи той же константы B . Этот эффект некоторые авторы, исследовавшие линейную и нелинейную теорию дрейфово-диссипативной неустойчивости, не учитывали (см., например, [22], а также [23], где этот эффект учтен). В этом же уравнении последними двумя слагаемыми в правой части представлены джоулево тепло и тепловыделение в результате продольной электронной вязкости. В отсутствие токов и градиента скорости электронов эти слагаемые малы и ими пренебрегается. В уравнения непрерывности добавлен источник плазмы S для того, чтобы система уравнений имела стационарное решение с неоднородной плотностью. Однако такое решение, соответствующее ламинарным "азимутальным" течениям и классической диффузии, представляемой потоком $\tilde{n} \vec{v}_D$, выписывать не будем. Вклад классической диффузии известен и приведен при исследовании аномальной волновой конвекции [7].

Для плазмы малого давления, когда влиянием непотенциальности на столкновительные дрейфовые волны можно пренебречь, систему уравнений (1)-(5) можно свести к системе трех уравне-

ний. Однако мы будем не только оценивать влияние непотенциальности, но и покажем, что есть такая область значений параметров, в которой достаточно учитывать влияние непотенциальности в линейной дисперсионной функции (вещественная ее часть определяет надкритичность волны), а в нелинейных механизмах стабилизации и при исследовании устойчивости таким влиянием можно пренебречь.

Выберем уравнения для нелинейных исследований следующим образом. В качестве первого уравнения берем уравнение непрерывности ионов в прежнем виде (1). Для получения второго уравнения возьмем разность двух уравнений непрерывности (1) и (2) и исключим расходимость продольного тока посредством уравнения (5) после его дифференцирования. Третье уравнение получим также в результате преобразований трех уравнений. В разности двух уравнений непрерывности расходимость продольного тока исключим посредством уравнения продольного движения электронов, предварительно продифференцировав его по продольной координате. Четвертое уравнение возьмем в прежнем виде и исключим из него продольную токовую скорость с помощью уравнения для продольного компонента векторного потенциала (5), а также пренебрежем слагаемым с малой конвекцией тепла вдоль магнитного поля. В результате получаем:

$$\partial_t \tilde{\nu} + \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} \tilde{\nu} + \exp(-\tilde{\nu}) \nabla_{\perp} \tilde{n} (\vec{v}_{i2} + \vec{v}_D) = S, \quad (10)$$

$$-\nabla_{\parallel} \Delta_{\perp} a_{\parallel} = \nabla_{\perp} c \tilde{n} \vec{v}_{i2}, \quad (11)$$

$$\nabla_{\parallel} \left[\nabla_{\parallel} \left(\tilde{\nu} + B \tilde{\theta}_e \right) + \frac{1}{\tilde{\mu}_e} \nabla_{\parallel} \tilde{\psi} + \frac{\beta_k}{\tilde{\mu}_e} (\partial_t + \vec{v}_{\perp}^e \nabla_{\perp}) a_{\parallel} \right] + \frac{\alpha_0 y_{e0}}{\tilde{\mu}_e^{5/2}} \nabla_{\perp} \tilde{n} \vec{v}_{i2} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{3}{2} \left(\partial_t + \vec{v}_E \cdot \nabla_{\perp} \right) \tilde{\theta}_e + \exp(-\tilde{\nu}) \left(-B \Delta_{\perp} \nabla_{\parallel} a_{\parallel} + (\Delta_{\perp} a_{\parallel}) \nabla_{\parallel} \tilde{\nu} \right) = \chi_{\parallel 0}^e \exp \left(-\tilde{\nu} + \frac{5}{2} \tilde{\theta}_e \right) \times \left(\nabla_{\parallel}^2 \tilde{\theta}_e + \frac{7}{2} (\nabla_{\parallel} \tilde{\theta}_e)^2 \right). \quad (13)$$

Цель сделанных замен переменных и проведенных преобразований над уравнениями состояла в том, чтобы вобрать в замену переменных большие нелинейные слагаемые и оставить малые нелинейные члены, пусть даже повторяющиеся в нескольких уравнениях.

Для нахождения нелинейных волновых решений системы уравнений (10)-(13) необходимо произвести обобщение разложения нелинейной механики на пространственно неоднородные диссипативные нелинейные системы с распределенными

параметрами. Такое обобщение предложено и выполнено в работах [6, 7] и состоит в следующем. При построении решения выделяется основное неоднородное состояние, например, неоднородный и переменный во времени логарифм плотности $\nu_0(x, t)$ с медленной зависимостью от неоднородной координаты и времени, а также волновая или конвективная составляющая решения $\nu(x, y, z, t)$ с быстрой зависимостью по крайней мере от одной из переменных. Волновые решения ищутся в виде, аналогичном асимптотическому разложению Боголюбова и Митропольского для одночастотных решений нелинейных систем с многими степенями свободы [16]. Обобщение этого метода состоит не только в получении многочастотных уравнений для эволюции амплитуд нормальных колебаний (или волн), но и во включении диссипативных частей в нормальные функции. (Нормальные функции связывают между собой колебания или волны, например, потенциала и плотности с одной и той же частотой и волновым вектором.) Такие обобщения проводились как в физике плазмы, так и в нелинейной механике, включающей диссипацию. Диссипативные же части нормальных функций содержат частоту соударений, которая пропорциональна неоднородной плотности; и для получения стабилизирующих нелинейностей в используемом варианте нелинейной теории используется зависимость нормальных функций от неоднородной координаты. При этом нормальные функции находятся итерационной процедурой с квадратичными нелинейными слагаемыми и учитываются производные от нормальных функций по неоднородной координате.

Чтобы получить основное уравнение для волн, выделим в явном виде нелинейные слагаемые и перенесем их в правую часть уравнений (10)-(13), а линейные слагаемые оставим в левой части уравнений. Отыскиваем решение для возмущений в первом приближении в виде суммы по волновым векторам от произведений медленно изменяющихся функций времени и неоднородной координаты на быстро осциллирующие экспоненты:

$$\psi, \nu, \theta, a_{\parallel} = \sum_{\vec{k}} f_{\kappa} \exp(i\vartheta_{\kappa}), \quad (14)$$

$$\vartheta_{\kappa} = -\omega_{\vec{k}} t + m y + n z + k_x(x).$$

Здесь по y и z наложены периодические граничные условия. В результате система уравнений переходит в следующую:

$$-i\widehat{\omega}_m a_{\kappa} - i\omega_{ne} \psi_{\kappa} - i b_{\kappa} \widehat{\omega}_{\kappa} \xi_{\kappa} = N_1(\kappa), \quad (15)$$

$$\psi_{\kappa} = -\xi_{\kappa} + t_1 a_{\kappa},$$

$$-i n \widehat{k}_{\perp}^2 a_{\parallel \kappa} - i b_{\kappa} \widehat{\omega}_{\kappa} e^{\nu_0} \xi_{\kappa} = e^{\nu_0} N_2(\kappa), \quad (16)$$

$$- [n^2 (a_{\kappa} + B \theta_{\kappa} + \psi_{\kappa}) - \beta_k n (\omega_m - (\omega_{ne} + \omega_{Te})) a_{\parallel \kappa}] - i \alpha_0 y e_0 b_{\kappa} \widehat{\omega}_{\kappa} \xi_{\kappa} = N_3(\kappa), \quad (17)$$

$$-i \widehat{\omega}_{\theta} \theta_{\kappa} - i \frac{3}{2} \omega_{Te} \psi_{\kappa} + i n \widehat{k}_{\perp}^2 B e^{-\nu_0} a_{\parallel \kappa} = N_4(\kappa). \quad (18)$$

В левых частях этих уравнений следует учесть только первые производные по t и x , содержащиеся в частоте и волновом векторе с операторными индексами

$$\widehat{\omega}_{\vec{k}} = i \frac{\partial}{\partial t} + \omega_{\vec{k}}, \quad \widehat{k}_x = -i \frac{\partial}{\partial x} + k_x,$$

(о производных от нормальных функций см. далее). Здесь введены краткие обозначения для частоты ω_m вместе со сдвижкой из-за электрического дрейфа и частоты ω_{θ} вместе с вкладом электронной температуропроводности

$$\omega_m = \omega_{\vec{k}} + m \psi'_{0x}, \quad \omega_{\theta} = \frac{3}{2} \omega_m + i n^2 \chi_{\parallel}, \quad (19)$$

а также введены безразмерные градиентные частоты и другие величины

$$\omega'_{ne} = -m \nu'_{0x}, \quad \omega_{Te} = -m \theta'_{0x}, \quad (20)$$

$$\widehat{\omega}_{\kappa} = \widehat{\omega}_m + i \eta_{\kappa}, \quad \widehat{k}_{\perp}^2 = \widehat{k}_x^2 + m^2,$$

$$B = 1 + \beta_0 = 1.711, \quad \eta_k = k_{\perp}^2 \cdot \eta.$$

Правые части уравнений (15)-(18) содержат нелинейные слагаемые в Фурье-представлении. Разбиваем нелинейные слагаемые на квадратичные и кубичные по амплитуде:

$$N_j(\kappa) = Q_j(\kappa) + C_j(\kappa), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Из уравнения для температурных возмущений (13) получаем:

$$Q_4(\kappa) = \sum_{\vec{k}'} \left\{ \theta_{\kappa'}^{(2)} \left[\chi_{\parallel} n'^2 a_{\kappa''} + \frac{3}{2} \psi_{\kappa''} \left(k'_x m'' - k'_x m' \right) - i m'' \frac{3}{2} \psi_{\kappa''} \partial \ln \theta_{\kappa'} / \partial x + \frac{3}{2} m' \partial \psi_{\kappa''} / \partial x \right] + i k'^2_{\perp} \left(n'' + B n' \right) \times e^{-\nu_0} a_{\parallel \kappa'} a_{\kappa''} \right\} \Big|_{\kappa'' = \kappa - \kappa'}, \quad (21)$$

$$C_4(\kappa) \equiv C_{41}(\kappa) = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \left[\chi_{\parallel} n'^2 \theta_{\kappa'} + i k'^2_{\perp} \left(2n'' + B n' \right) e^{-\nu_0} a_{\parallel \kappa'} \right] a_{\kappa''} a_{\kappa - \kappa' - \kappa''}, \quad (22)$$

где $\kappa' = (\omega'_{\vec{k}}, \vec{k}')$.

В уравнении (16) учитываются только квадратичные слагаемые, причем, с точностью до коэффициента, одно слагаемое совпадает с нелинейностями уравнения (15)

$$N_3(\kappa) = \frac{\alpha_0 y e_0}{\mu_0^{e5/2}} N_2(\kappa) + N_{3\beta}(\kappa),$$

$$N_{3\beta}(\kappa) = in \sum_{\vec{k}'} \left\{ \tilde{\beta}_k a_{\parallel\kappa'} e^{-\nu_0} \left[\left(k'_x m'' - k''_x m' \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(\psi_{\kappa''} + a_{\kappa''} \right) + im' \partial \psi_{\kappa''} / \partial x \right] + \right. \\ \left. in'' \theta_{\kappa'} \psi_{\kappa''} \right\}. \quad (23)$$

Нелинейные члены уравнения (16) состоят из нелинейных слагаемых поперечной дивергенции ионного тока $\nabla_{\perp} n \vec{v}_2$ и подробно описаны в работе [6] так же, как и нелинейные слагаемые уравнения (15), и результаты их воздействия приведены далее. При этом в большой нелинейности $\xi'_x \nu'_y - \nu'_x \xi'_y$ учитывается производная по неоднородной координате от нормальных функций ξ_{κ} , ψ_{κ} , и θ_{κ} .

Применив метод гармонического баланса [16] легко исключить из левых линейных частей уравнений (15)-(18) Фурье-компоненты всех функций, кроме одной, — Фурье-компоненты возмущения логарифма плотности, которую примем за амплитуду нормальных колебаний a_{κ} . В результате получаем основное уравнение:

$$\hat{D}_{\kappa} a_{\kappa}(t, x) = NL(\kappa) \equiv \sum_{j=1}^4 \lambda_j(\kappa) N_j(\kappa), \quad (24)$$

фигурирующие справа коэффициенты которого равны

$$\begin{aligned} \lambda_1(\kappa) &= -n^2 + iy_e b_{\kappa} \omega_{\kappa} \eta_{\beta}(\kappa), \\ \lambda_2(\kappa) &= \lambda_3(\kappa) \alpha_0 y_{e0} \eta_{\beta}(\kappa), \\ \lambda_3(\kappa) &= i(\omega_{ne} - b_{\kappa} \omega_{\kappa}), \\ \lambda_4(\kappa) &= \lambda_3(\kappa) in^2 B / \omega_{\theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Оператор в левой части определяется выражениями:

$$\hat{D}_{\kappa} = i \frac{\partial D_{\kappa}}{\partial \omega_m} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial D_{\kappa}}{\partial k_x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\kappa}, \quad (26)$$

$$D_{\kappa} = -i(\omega_m + \omega_{ni}) \lambda_1(\kappa) - n^2(1 + t_i) \lambda_3(\kappa).$$

Подробное исследование дисперсионной функции D_{κ} проведено в следующем разделе.

В правой части уравнения (24) нелинейные члены уравнений (16) и (17), связанные с поперечной дивергенцией ионного тока, объединились в одно слагаемое $\lambda_2(\kappa) N_2(\kappa)$ при помощи множителя $\eta_{\beta}(\kappa)$, и в качестве нелинейности уравнения (16) выступает приведенное выше выражение (23), $N_{3\beta}$. Параметр $\eta_{\beta} \equiv \eta_{\beta}(\kappa)$, введенный в работе [18], учитывает непотенциальность колебаний и возму-

щения электронной температуры:

$$\eta_{\beta}(\kappa) = 1 - i \frac{\tilde{\beta}_k}{y_e k_{\perp}^2} (\omega_m - \omega_{ne} - \omega_{Te}) + \\ i \frac{n^2 B^2 \mu_0^e}{y_e \omega_{\theta}}, \quad (27)$$

$$\tilde{\beta}_k = \beta_k e^{\nu_0 + \theta_0^e},$$

$$\alpha_0 y_{e0} e^{\nu_0} = y_e.$$

2.2. Нелинейные члены уравнений и нормальные функции

Уравнение гармонического баланса (24) не замкнуто, так как оно содержит в нелинейных членах нормальные функции и их производные по неоднородной координате. Необходимо исключить эти нормальные функции, выразив их через амплитуды нормальных колебаний. Нормальные функции во втором порядке по амплитуде и линейном приближении по b_{κ} вычисляются методом последовательных приближений, используя любые три из уравнений (15)-(18), в предположении малости амплитуды и в пренебрежении справа производными по t и x от амплитуды. Вначале отыскивают нормальные функции первого, линейного приближения и находят их производные первого порядка. При этом в нормальные функции включают диссипативные части наряду с реактивными. Затем в нелинейные члены второго порядка по амплитуде, $Q_j(\kappa)$, подставляют нормальные функции и их производные первого порядка. Таким образом нелинейности $Q_j(\kappa)$ и их производные по неоднородной координате выражают через амплитуды нормальных колебаний с точностью до квадрата амплитуды. В уравнения для нормальных функций подставляют полученные выражения для $Q_j(\kappa, x)$ и $\partial Q_j / \partial x$. В результате находят нормальные функции и их производные по неоднородной координате. Второй степени амплитуды достаточно, так как нормальные функции надо заменить только в нелинейных членах (в линейных слагаемых уравнений нормальные функции исключаются при составлении уравнения гармонического баланса), и в основном уравнении для волн необходимо учитывать все члены вплоть до кубических по амплитудам. Учет производной по неоднородной координате приводит к новым нелинейным слагаемым, способствующим нелинейной стабилизации неустойчивости, и представляет собой один из возможных вариантов регуляризации теории возмущений.

Нахождение нормальной функции ξ_{κ} подробно описано в разделе 3 работы [6] и в полном объеме эти вычисления используются далее.

$$\xi_{\kappa}^{(1)} = a_{\kappa} \omega_{\xi} / \lambda_2(\kappa),$$

$$\xi_{\kappa}^{(2)} = \lambda_2^{-1}(x) (a_{\kappa} \omega_{\xi} -$$

$$i \sum_{\vec{k}'} \xi_{\kappa'}^{(1)} a_{\kappa''} (U_1(\kappa', \kappa'') + m'' v'_{0x} b_{\kappa'} \eta_{\kappa'}).$$

Из уравнения (16) легко находим нормальную функцию векторного потенциала

$$e^{-\nu_0} a_{\kappa}^{(2)} = - \left(b_{\kappa} \omega_{\kappa} \xi_{\kappa}^{(2)} - i Q_2(\kappa) \right) / (n k_{\perp}^2). \quad (28)$$

Нелинейные члены $N_2(\kappa)$, включенные в уравнение (24) с точностью до кубичных членов, выражаются через нормальную функцию $\xi_{\kappa}^{(2)}$, после подстановки которой и пересуммирования получаем [6]

$$N_2(\kappa) = \sum_{\vec{k}'} \xi_{\kappa'}^{(1)} \left\{ a_{\kappa-\kappa'} U_2(\kappa', \kappa - \kappa') + \sum_{\vec{k}''} a_{\kappa''} a_{\kappa'''} \tilde{R}_2(\kappa', \kappa'', \kappa''') \Big|_{\kappa''' = \kappa - \kappa' - \kappa''} \right\}, \quad (29)$$

$$U_2(\kappa', \kappa'') = b \left[i \vec{k}_{\perp} \cdot \vec{k}'_{\perp} \left(\omega'_m + (m' k''_x - m'' k'_x) \psi_{\kappa''} / a_{\kappa''} \right) - 2\eta (k'^4_{\perp} + 2\vec{k}'_{\perp} \cdot \vec{k}'^3_{\perp} + k''^2_1 k'^2_1) \right]. \quad (30)$$

Здесь вводящий кубичное нелинейное взаимодействие коэффициент с двумя тильдами содержит переобозначение нижних индексов и определяется формулой

$$\tilde{R}_2(\kappa', \kappa'', \kappa''') = U_2(\kappa - \kappa'', \kappa'') \times \bar{U}_1(\kappa', \kappa''') / \lambda_3(\kappa - \kappa''). \quad (31)$$

Из уравнения (18) после исключения нормальной функции векторного потенциала с помощью формулы (28) получается нормальная функция температурных возмущений:

$$\theta_{\kappa}^{(2)} = -\omega_{\theta}^{-1} \left\{ \left(B b_{\kappa} \omega_{\kappa} - \frac{3}{2} t_i \omega_{Te} \right) \xi_{\kappa}^{(2)} - i (B Q_2 + Q_4)(\kappa) \right\}. \quad (32)$$

Так как нелинейные члены уравнения теплопроводности содержат искомые нормальные функции и их производные по x , то полученное выражение подлежит итерации. В результате итерации в первом приближении находим

$$\theta_{\kappa}^{(1)} = -\omega_{\theta}^{-1} \left(B b_{\kappa} \omega_{\kappa} - \frac{3}{2} t_i \omega_{Te} \right) \xi_{\kappa}^{(1)}. \quad (33)$$

Значение производной от нормальной функции первого порядка приведем при $\omega_{Te} = 0$ (достаточно потребовать $|\omega_{Te}| \ll b_{\kappa}$):

$$\frac{\partial \theta_{\kappa}^{(1)}}{\partial x} = -i B b_{\kappa} \xi_{\kappa}^{(1)} \nu'_{0x} \omega_{\theta}^{-2} [n^2 \chi_{\parallel} \omega_{\kappa} + \eta_{\kappa} \omega_{\theta}]. \quad (34)$$

Здесь учитываются только первые степени градиента фоновой или основной плотности $n_0(x)$ (согласно исходным предположениям задачи). Подставляя эти значения в формулу (21), получаем регуляризованное значение квадратичных нелинейных членов уравнения теплопроводности:

$$Q_4(\kappa) = \sum_{\vec{k}'} \xi_{\kappa'}^{(1)} b_{\kappa'} \omega_{\kappa'} \left[-\frac{3B}{2\omega_{\theta}'} \bar{U}_{41}(\kappa', \kappa'') \psi_{\kappa''} + \bar{U}_{42}(\kappa', \kappa'') a_{\kappa''} \right]_{\kappa'' = \kappa - \kappa'}, \quad (35)$$

$$\bar{U}_{41}(\kappa', \kappa'') = k'_x m'' - k''_x m' + m'' \nu'_{0x} \left(\frac{n'^2 \chi_{\parallel}}{\omega'_{\theta}} + \frac{\eta_{\kappa}}{\omega'_{\kappa}} \right), \quad (36)$$

$$\bar{U}_{42}(\kappa', \kappa'') = -B \chi_{\parallel} n'^2 / \omega'_{\theta} - i(n'' + B n') n'. \quad (37)$$

Теперь необходимо вычислить кубичные нелинейные члены основного уравнения для волн как от собственных нелинейностей уравнений (12) и (13), содержащихся в уравнениях (22) и (23), так и полученные в результате регуляризации теории возмущений, от квадратичных нелинейных слагаемых (21) и (23). Формула (21) содержит справа подлежащие исключению производные нормальных функций электростатического потенциала и электронной температуры, которые необходимо найти с точностью до второй степени амплитуды включительно. Пренебрегаем производной $\partial \psi_{\kappa''} / \partial x$, дающей вклад порядка b_{κ}^2 . Для нахождения же в явном виде производной

$$\frac{\partial \theta_{\kappa}^{(2)}}{\partial x} = i \omega_{\kappa}^{-2} \left\{ -\nu'_{0x} \left[B b_{\kappa} \xi_{\kappa}^{(2)} (n^2 \chi_{\parallel} \omega_{\kappa} + \eta_{\kappa} \omega_{\theta}) - i n^2 \chi_{\parallel} (B Q_2 + Q_4)(\kappa) \right] + \omega_{\theta} \left(B \frac{\partial Q_2(\kappa)}{\partial x} + \frac{\partial Q_4(\kappa)}{\partial x} \right) \right\} \quad (38)$$

необходимо знать производную по x от квадратичных нелинейных членов уравнений (11) и (13). Используя (29), (35) и выражение для U_2 (30), получаем

$$B \frac{\partial Q_2(\kappa)}{\partial x} + \frac{\partial Q_4(\kappa)}{\partial x} = -\nu'_{0x} \sum_{\vec{k}'} \xi_{\kappa'}^{(1)} \left\{ i B b_{\kappa'} \omega'_{\theta} \times \bar{U}_{41}(\kappa', \kappa'') \psi_{\kappa''} - i b_{\kappa'} a_{\kappa''} \bar{U}_{42}(\kappa', \kappa'') + 2B \eta \times b a_{\kappa''} (k'^4_{\perp} + 2\vec{k}'_{\perp} \cdot \vec{k}'^3_{\perp} + k''^2_1 k'^2_1) \right\} \Big|_{\kappa'' = \kappa - \kappa'}. \quad (39)$$

Здесь перенормированные коэффициенты при квадратичных нелинейностях уравнения темпера-

туропроводности (13) равны

$$\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_{41}(\kappa', \kappa'') &= \overline{U}_{41}(\kappa', \kappa'') \left(\eta_{\kappa'} + n'^2 \chi_{\parallel} \frac{\omega_{\kappa'}}{\omega_{\theta}'} \right) + \\ & i \omega_{n\epsilon}'' \omega_{\kappa'} \omega_m' \left(-\frac{3}{2} \frac{n'^2 \chi_{\parallel}}{\omega_{\theta}^{\prime 2}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_{42}(\kappa', \kappa'') &= \eta_{\kappa'} \overline{U}_{42}(\kappa', \kappa'') - \\ & i \frac{3}{2} \omega_m' B \omega_{\kappa'}' \frac{n'^2 \chi_{\parallel}}{\omega_{\theta}^{\prime 2}}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для нормальных функций и их производных с точностью до квадрата амплитуды в нелинейные члены уравнения температуропроводности $N_4(\kappa)$. Тогда кубические члены можно записать в виде суммы

$$\overline{C}_4 = \sum_{j=1}^4 C_{4j}(\kappa), \quad (41)$$

в которой первое слагаемое $C_{41}(\kappa)$ определяется собственными нелинейными членами уравнения (22). Второе слагаемое $C_{42}(\kappa)$ находим после исключения нормальной функции векторного потенциала в выражении (21). В этой сумме (41) приведем три первые нелинейные слагаемые:

$$C_{42} = - \sum_{\vec{k}'} (n'' + Bn') n' Q_2(\kappa') a_{\kappa''} |_{\kappa'' = \kappa - \kappa'}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} C_{41}(\kappa) &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \xi_{\kappa'}^{(1)} a_{\kappa''} a_{\kappa'''} b_{\kappa'} \omega_{\kappa'} \left(B \frac{\chi_{\parallel} n'^2}{\omega_{\theta}'} + \right. \\ & \left. i \frac{2n'' + Bn'}{n'} \right) |_{\kappa''' = \kappa - \kappa' - \kappa''}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} C_{43}(\kappa) &= -i \frac{3}{2} \sum_{\vec{k}'} m'' \psi_{\kappa''} \frac{\partial \theta_{2,\kappa'}}{\partial x} = \\ & - \frac{3}{2} \sum_{\vec{k}'} a_{\kappa''} \frac{m - m'}{\omega_{\theta}'} \left\{ \left(B \frac{\partial Q_2(\kappa')}{\partial x} + \frac{\partial Q_4(\kappa')}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. i v'_{0x} \frac{n'^2 \chi_{\parallel}}{\omega_{\theta}'} \left(B Q_2(\kappa') + Q_4(\kappa') \right) \right\} |_{\kappa'' = \kappa' - \kappa'}. \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение для кубических членов $C_{43}(\kappa)$ получено после исключения нормальной функции $\psi_{\kappa''}$ и квадратичных членов в производной нормальной функции формуле (21). Наконец, слагаемое C_{44} находим из формулы (21) в результате исключения нормальной функции электронной температуры (32):

$$\begin{aligned} C_{44}(\kappa) &= \sum_{\vec{k}'} a_{\kappa''} \left\{ -\frac{1}{\omega_{\theta}'} \left[B b_{\kappa'} \omega_{\kappa'} \xi_{2,\kappa'} - \right. \right. \\ & \left. \frac{i(BQ_2 + Q_4)(\kappa')}{\omega_{\theta}'} \left(\chi_{\parallel} n'^2 - \frac{3}{2} (k_x' m'' - k_x'' m') \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\omega_{\theta}'} b_{\kappa'} \omega_{\kappa'} \xi_{2,\kappa'} \frac{3}{2} \frac{\psi_{2,\kappa'}}{a_{\kappa''}} (k_x' m'' - k_x'' m') \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь и в формуле (44)

$$\begin{aligned} \xi_{2,\kappa} &= \xi_{\kappa}^{(2)} - \xi_{\kappa}^{(1)}, \\ \theta_{2,\kappa} &= \theta_{\kappa}^{(2)} - \theta_{\kappa}^{(1)}, \\ \psi_{2,\kappa} &= \psi_{\kappa}^{(2)} - \psi_{\kappa}^{(1)}. \end{aligned}$$

Из всех выписанных в C_{44} членов надо оставить при вычислении самовоздействия волны только подчеркнутое слагаемое. Вклад остальных слагаемых в самовоздействие пропорционален b_{κ}^2 , а такие члены не учитываются.

От нелинейных членов уравнения (12), после указанного объединения части слагаемых с нелинейными членами уравнения (11), остались только слагаемые, полученные от вариации температуры при потенциале в больцмановском распределении плотности (последнее слагаемое в фигурных скобках в формуле (23) справа) и слагаемые, пропорциональные конечному давлению плазмы, представленному произведением параметров $\beta_k b_k$. Последними нелинейными членами в дальнейшем пренебрегаем в силу малости их вклада при менее сильном условии $\beta_k b_k^2 \ll 1$, чем условие пренебрежения в линейном дисперсионном уравнении влиянием непотенциальности при $b_k \ll 1$. Это обстоятельство приводит к тому, что при $\beta_k b_k \sim 1$ влияние непотенциальности на дрейфово-диссипативную неустойчивость можно учесть в линейном приближении (в выражении для дисперсионной функции) и пренебречь в нелинейной теории. После исключения нормальной функции электронной температуры посредством формулы (32) и подстановки $\psi_{\kappa''} = -a_{\kappa''} + \mathcal{O}(b_{\kappa})$ оставшееся нелинейное слагаемое в формуле (23) приводит как к квадратичным нелинейностям вида

$$\begin{aligned} Q_3(\kappa) &= \sum_{\vec{k}'} \overline{U}_{42}(\kappa', \kappa'') \xi_{\kappa'}^{(1)} a_{\kappa''}, \\ \overline{U}_3(\kappa', \kappa'') &= -n B n'' b_{\kappa'} \omega_{\kappa'} / \omega_{\theta}', \end{aligned} \quad (46)$$

так и к кубическим нелинейным членам

$$C_{34}(\kappa) = i \sum_{\vec{k}'} a_{\kappa''} (\omega_{\theta}')^{-1} (B Q_2 + Q_4)(\kappa'), \quad (47)$$

где сумма квадратичных нелинейностей находится из формул (29), (35). В качестве $Q_2(\kappa)$ берется первое слагаемое в формуле (29)

$$Q_2(\kappa) = \sum_{\vec{k}'} \xi_{\kappa'}^{(1)} a_{\kappa - \kappa'} U_2(\kappa', \kappa - \kappa'). \quad (48)$$

Уравнение (24) с обозначениями (25)-(27) и нелинейными членами (29), (31), (35), (36), (37), (41) и (48), а также нелинейными членами уравнения (10), явный вид которых будет приведен ниже, представляет собой основное нелинейное уравнение для волн.

Нелинейные слагаемые и матричные элементы основного уравнения для волн определяются формулами:

$$NL(\kappa) = \sum_{\vec{k}'} a_{\kappa'} \left\{ a_{\kappa''} V_{\kappa}(\kappa', \kappa'')|_{\kappa''=\kappa-\kappa'} + \sum_{\vec{k}''} a_{\kappa''} a_{\kappa'''} R_{\kappa}(\kappa', \kappa'', \kappa''')|_{\kappa'''=\kappa-\kappa'-\kappa''} \right\}.$$

Парциальные квадратичные матричные элементы выражаются через сумму регуляризованных нелинейных коэффициентов каждого из исходных уравнений (10)-(13):

$$V_{\kappa}(\kappa', \kappa'') = \omega'_{\xi} \lambda_2^{-1}(\kappa') \sum_{j=1}^4 \lambda_j(\kappa) \overline{U}_j(\kappa', \kappa''). \quad (49)$$

Аналогично выражаются кубические матричные элементы

$$R_{\kappa}(\kappa', \kappa'', \kappa''') = \omega'_{\xi} \lambda_2^{-1}(\kappa') \sum_{j=1,3} \lambda_j(\kappa) \times \left[\overline{R}_j + \widetilde{R}_j \right] (\kappa', \kappa'', \kappa'''), \quad (50)$$

Нелинейные коэффициенты первого слагаемого в (49) состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое получено от собственных нелинейных членов уравнения (10), второе, подчеркнутое слагаемое — от учета производной нормальной функции $\partial \xi_{\kappa} / \partial x$:

$$\overline{U}_1 = U_1 + \overline{U}_{1\xi},$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_1(\kappa', \kappa'') = & k'_x m'' - m' k''_x + b \left[i \omega'_m \vec{k}'_{\perp} \vec{k}''_{\perp} - \right. \\ & \left. \eta \left(k_{\perp}^4 - k_{\perp}^4 m'' \nu'_{0x} \lambda_2^{-1}(\kappa') + 4 \vec{k}''_{\perp} \vec{k}'_{\perp}{}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 k_1^{\prime 2} k_1^{\prime 2} \right) \right] - \lambda_2(\kappa') \omega'_{\xi}{}^{-1} (1 + t_i) \zeta_0^e \vec{k}'_{\perp} \vec{k}''_{\perp}. \quad (51) \end{aligned}$$

Аналогичные добавки получили нелинейные коэффициенты при кубических членах

$$\begin{aligned} \overline{R}_1(\kappa', \kappa'', \kappa''') = & R_1 + \overline{R}_{1\xi} = -b\eta \left[\frac{3}{2} \vec{k}'_{\perp}{}^4 + \right. \\ & \left. 4(\vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp}) \vec{k}'_{\perp}{}^3 + 2k_1^{\prime 2} (k_1^{\prime 2} (k - k')^2) \right], \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_1 = & \widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_{1\xi}, \\ \widetilde{R}_1 = & i \overline{U}_1(\kappa - \kappa'', \kappa'') \overline{U}_1(\kappa', \kappa'') \lambda_2^{-1}(\kappa - \kappa''), \\ \widetilde{R}_{1\xi}(\kappa', \kappa'', \kappa''') = & -ib\eta \left[(\vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp}) / \right. \\ & \left. \lambda_2(\kappa - \kappa'') + \kappa_{\perp}^{\prime 4} / \lambda_2(\kappa') \right] U_1(\kappa', \kappa''). \quad (53) \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, знак прямой черты над нелинейным коэффициентом означает включение добавки

к нелинейным матричным элементам, полученные в результате учета зависимости нормальной функции от неоднородной координаты. Знаки волнистой черты показывают на появление новых нелинейных матричных элементов, обусловленное учетом вторых степеней амплитуды в нормальной функции.

Используемые здесь обозначения традиционные, некоторые из них определяются формулами

$$\begin{aligned} \omega_{ne} = -mN, \quad N \equiv \nu'_{0x} &= \frac{d\nu_0}{dx}, \\ \omega_m = \omega_k + m\nu'_{0x}, \quad \omega_{\kappa} = \omega_m + i\eta_{\kappa}, \\ \omega_{\xi} = \omega_m + t_i \cdot \omega_{ne} + i(1 + t_i)\zeta_{\kappa}^e, \\ \eta_{\kappa} = \eta k_{\perp}^2, \quad \zeta_{\kappa}^k = \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{He} \tau_{ei}}, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + m^2, \\ b_{\kappa} = b k_{\perp}^2, \quad \eta = 0.3 \frac{t_i}{\omega_{Hi} \tau_{ii}}. \quad (54) \end{aligned}$$

Обозначения для коэффициентов $\lambda_j(\kappa)$ были приведены выше, а в упрощенном виде см. далее.

3. Линейные и нелинейные пороги возбуждения волн, включая температурные возмущения

В настоящем разделе с учетом температурных возмущений исследуется неустойчивость дрейфовых диссипативных волн, пороговые соотношения и надкритичность возбуждения волн в линейной теории, а также приводятся некоторые сведения о нелинейных порогах возбуждения волн. Надкритичность дрейфовых волн входит в качестве множителя в выражения для инкремента и квадрата модуля амплитуды. Пороговые значения параметров, при превышении которых волны становятся неустойчивыми, важны для объяснения экспериментально измеряемых значений и определяют зависимость коэффициента конвекции, например, от удерживающего плазму магнитного поля. Несмотря на то, что результаты относятся к мало исследованной области небольших инкрементов неустойчивых волн, взаимодействие этих волн сильное. В представлении взаимодействия (так назовем описание эволюции волновых амплитуд основным нелинейным уравнением для волн) инкременты неустойчивых волн превышают нелинейную сдвигку частоты и стабилизация наступает в результате баланса инкремента и стабилизирующего нелинейного воздействия волн.

3.1. Исследование пороговых соотношений в терминах градиентных величин

Вывод выражения для дисперсионной функции проведен выше (см. формулу (26)). Приведем выражение для комплексной дисперсионной функции в безразмерных переменных исходной системы уравнений, преобразованной к безразмерному виду при помощи параметров, которые для удобства выпишем здесь (см. раздел 2 работы [6] и приложение к ней):

$$y_e = 0.51 \frac{\omega_* \nu_{ei} m_e}{T_{e0} k_{\parallel 0}^2}, \quad \eta_\kappa = k_\perp^2 \frac{0.3 t_i}{\omega_{Hi} \tau_{ii}}, \quad (55)$$

$$b_\kappa = \rho_{ie}^2 k_\perp^2, \quad t_i = \frac{T_{i0}}{T_{e0}}.$$

Напомним, что приведение к безразмерному виду выполнено при помощи характерных поперечного и продольного размеров $L_\perp = 2\pi/k_{\perp 0}$ и $L_\parallel = 2\pi/k_{\parallel 0}$ для перпендикулярных и параллельной, по отношению к внешнему магнитному полю, конфигурационных координат, а также характерного времени, обратного характерной градиентной частоте $\omega_* = c T_{e0} k_{\perp 0}^2 / (e H_0)$. Остальные обозначения стандартны и включают частоту электронно-ионных соударений ν_{ei} , время между ионно-ионными соударениями τ_{ii} , гирочастоту ионов ω_{Hi} , внешнее магнитное поле H_0 , квадрат ларморовского радиуса ионов при температуре электронов $\rho_{ie}^2 = T_{e0} / m_i \omega_{Hi}^2$ и невозмущенные температуры ионов и электронов T_{i0} и T_{e0} , соответственно. Отметим, что исследуемые безразмерные уравнения и формулы, а также входящие в них величины можно читать и в размерном виде. Для этого, например, надо положить равными единице характерные пространственные масштабы и вернуться к размерным времени и конфигурационным координатам. Учитывая это замечание, детали преобразований установить нетрудно.

В безразмерных переменных дисперсионная функция

$$D_\kappa = D'_\kappa + i D''_\kappa, \quad (56)$$

включающая возмущения электронной температуры и влияние непотенциальности колебаний на дрейфово-диссипативную неустойчивость, представима в следующем виде:

$$D'_\kappa = (\omega_m + t_i \omega_{ne}) \omega_m b_\kappa \left[Y_e + B^2 n^2 \frac{\gamma n^2 / y_e}{|\omega_\theta|^2} - B^2 n^2 \eta_\kappa \frac{3/2}{|\omega_\theta|^2} \right] - n^2 (1 + t_i) b_\kappa \eta_\kappa,$$

$$D''_\kappa = n^2 (\omega_m - \omega_{ne}) + n^2 (1 + t_i) b_\kappa \omega_m + (\omega_m + t_i \omega_{ne}) b_\kappa \left[\eta_\kappa Y_e + B^2 n^2 \times \left(\frac{n^2 \gamma / y_e}{|\omega_\theta|^2} + \frac{3/2 \omega^2}{|\omega_\theta|^2} \right) \right]. \quad (57)$$

Здесь параметр Y_e состоит из двух слагаемых

$$Y_e = y_e - \beta_k (\omega_m - \omega_{ne} - \omega_{Te}) / k_\perp^2, \quad (58)$$

из которых первое слагаемое вводит эффект продольного электронно-ионного трения, а второе — влияние непотенциальности дрейфовых волн. Отметим также, что это второе слагаемое включает безразмерные искомую частоту вместе с электрическим дрейфом $\omega_m = \omega_k + m \psi'_{0x}$, электронную дрейфовую частоту $\omega_{ne} = -m \nu'_{0x}$ и, наконец, электронную дрейфовую температурную — $\omega_{Te} = -m d\theta_0(x)/dx$. Параметр непотенциальности равен $\beta_k = \beta k_{\perp 0}^2 / k_{\parallel 0}^2$, где $\beta = 4\pi n_0 T_{0e} / H_0^2$ — отношение электронного газодинамического давления к магнитному, как отмечалось выше. Перейдем к более компактным обозначениям, введя новые безразмерные параметры нелинейной теории:

$$r = \frac{\omega_m}{\omega_{ne}}, \quad y_N = \frac{y_e \omega_{ne}}{n^2}, \quad g = \frac{\omega_{ne}}{\eta_\kappa}, \quad (59)$$

$$q_\kappa = \frac{y_e \eta_\kappa}{n^2}, \quad p_N = \frac{y_e \omega_{ne}^2}{n^2 \eta_\kappa}.$$

Между этими параметрами существует два тождественные соотношения, которые далее будем использовать, выражая одни параметры через другие:

$$y_N^2 \equiv p_N q_\kappa, \quad p_N \equiv g y_N. \quad (60)$$

Записанное в краткой форме и подготовленное для трехмерного численного счета общее выражение для дисперсионной функции в смешанных обозначениях параметров имеет вид:

$$D_F = ig(r - 1) + b(rg + i) \left\{ i(1 + t) + (r + t) \left[y + i\beta y g K(1 + \eta_\tau - r) + iB^2 \frac{y}{3ry/2 + i\gamma} \right] \right\}. \quad (61)$$

Здесь краткая форма обозначенных параметров означает следующее (в соответствии с формулами (55), (59) и (60)) (параметр K в качестве множителя можно увидеть в формуле (69)):

$$y \equiv y_N, \quad b \equiv b_\kappa, \quad t \equiv t_i,$$

$$\eta_\tau = \frac{d \ln T_0^e(x)}{d \ln n_0(x)}, \quad K = \frac{0.3}{0.51} \sqrt{\frac{m_i}{2t_i m_e}}. \quad (62)$$

С целью разъяснения проводимых далее влизи пороговых аналитических вычислений приведем здесь результаты выполненных позже компьютерных исследований. В серии трехмерных графиков представлены зависимости инкрементов неустойчивой дрейфовой волны от безразмерного магнитного поля h_m (изменяется от 1 до 20) и градиентного параметра p (изменяется на графиках от 0.1 до 2) — см. рис. ?? . По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент $\text{Im } r$, (59), обозначение величин h_m и p по горизонтальным осям можно восстановить по вышеприведенным интервалам их значений. Для удобства программирования эти параметры следующим образом были соотнесены (связаны)

к параметрам (59) и (62) дисперсионной функции (61) и числовым константам

$$B = 1.71, \quad \gamma = 1.6116, \quad \beta_0 = 10^{\delta},$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{(mh_m)^2}, \quad \eta_T = 0.001, \quad \lambda_{ei} = 0.5, \quad (63)$$

$$b = h_m^{-2}, \quad p = \sqrt{p_N},$$

$$g = \frac{p}{\sqrt{\lambda_{ei}b}}, \quad y = p\sqrt{\lambda_{ei}b}, \quad m_i = 2 \cdot 1840m_e. \quad (64)$$

От рисунка к рисунку изменяется параметр давления δ и, хотя приведенная параметризация не совсем удачна (в определение параметра давления β входит еще и произведение mh_m в отличие от дальнейших рис. 4-8), задав значение $m = 3$ (что и сделано), можно видеть, что в широком диапазоне значений давления максимум инкремента (порядка 0.1 значения частоты) достигается при значении параметра магнитного поля b_κ равном или меньшем 0.1. Пороговое значение масштабного или градиентного параметра p увеличивается вместе с ростом давления. С ростом давления все отчетливее проявляется пороговое значение магнитного поля возбуждения неустойчивости, которое также увеличивается, а инкремент уменьшается.

Обратимся к аналитическим исследованиям. В обозначениях (59) комплексная дисперсионная функция (в пренебрежении влиянием непотенциальности волн при условии $\beta = 4\pi n_0 T_{e0}/H^2 \ll \nu_{ei}/\omega_{He}$) равна:

$$D_m = n^2 \eta_\kappa b_\kappa \left\{ i(r-1)/b_\kappa + (i+rg) \left[y_N (r + t_i) \left(1 + \frac{iB^2}{(3/2)ry_N + i\gamma} \right) + i(1+t_i) \right] \right\}. \quad (65)$$

Слагаемое, пропорциональное $B^2 = (1.71)^2$, учитывает температурные возмущения. Здесь частота вместе с доплеровской сдвижкой представлена параметром r . В дальнейших исследованиях фигурируют безразмерные параметры пороговой и нелинейной теории, которые получены, как отмечалось ранее, из параметров уравнений в безразмерной форме. Выпишем их повторно с тем, однако, отличим, что в них будут содержаться размерные величины волновых векторов и других величин со стандартными обозначениями. Среди них $K_z = k_{\parallel 0} n$ — продольный волновой вектор, $K_y = mk_{\perp 0}$, $K_x = k_x k_{\perp 0}$ — азимутальная и "радиальная" компоненты волнового вектора (названия компонентов учитывают соответствие между задачами о плоском неоднородном плазменном слое и радиально неоднородном плазменном цилиндре, удерживаемыми внешним магнитным полем), $\mathcal{N} \equiv k_{\perp 0} N \equiv d \ln n_0(X)/dX$ — размерный градиент логарифма плотности, $K_\perp^2 = K_x^2 + K_y^2$. Кроме отношения невозмущенных температур, параметра-

ми пороговой и нелинейной теорий являются следующие:

$$b_\kappa = K_\perp^2 T_{e0}/(m_i \omega_{Hi}^2), \quad (66)$$

$$q_\kappa = 0.15(\nu_{ei} \nu_{ii}/\omega_{Hi} \omega_{He}) t_i (K_\perp^2/K_z^2) \equiv \lambda_{ei} b_\kappa, \quad (67)$$

$$\lambda_{ei} = 0.15(\nu_{ei} \nu_{ii}/v_{Te} v_{Ti} K_z^2) t_i^{3/2} \sqrt{m_e/m_i}, \quad (68)$$

$$p_N = 1.7(K_y^2 \mathcal{N}^2/K_\perp^2 K_z^2) \sqrt{2t_i m_e/m_i}. \quad (69)$$

Как видно из приведенных четырех выражений, независимых параметров будет три. Напомним их названия по характерной зависимости от каких-либо физических величин, которую мы хотим подчеркнуть: магнитный параметр b_κ комбинированный параметр плотности, магнитного поля и температуры q_κ , связанный с ним параметр плотности и температуры λ_{ei} и, наконец, масштабный, или градиентный параметр p_N .

В линейной теории эволюция амплитуды определяется мнимой частью комплексного значения частоты, являющейся нулем дисперсионной функции (65) — полинома третьей степени относительно частоты. Частоты трех ветвей колебаний, соответствующих дрейфовой, энтропийной и желобковой модам исследованы в работе [22], в которой выполнены числовые расчеты, дающие некоторые качественные выводы линейной вблизипороговой теории, а также получено выражение для инкремента энтропийной волны при иных значениях параметров, чем на рис. 1 и 2.

Однако аналитические пороговые соотношения для дрейфовых волн в этой работе не найдены, а значения параметра надкритичности и инкременты не исследовались. Исследуем зависимости надкритичности дрейфовых волн и пороговых значений частоты, градиентного параметра и параметра магнитного поля от остальных параметров из набора (66)-(69). Введем также определения и приведем аналитические выражения для расчета нелинейных порогов возбуждения доминирующей волны.

В дисперсионной функции целесообразно вынести малый множитель, так как такой же множитель выносится в стабилизирующем факторе взаимно- и самовоздействия волн:

$$D_m/(n^2 \eta_\kappa b_\kappa (1+t_i)) = d'_m + i d''_m. \quad (70)$$

После выделения мнимых и вещественных частей получаем выражения

$$d'_m = p_N r (r+t_i) (1+t_i)^{-1} \left[1 + B^2 (\gamma - 3q_\kappa/2) / \left(\frac{9}{4} r^2 p_N q_\kappa + \gamma^2 \right) \right] - 1, \quad (71)$$

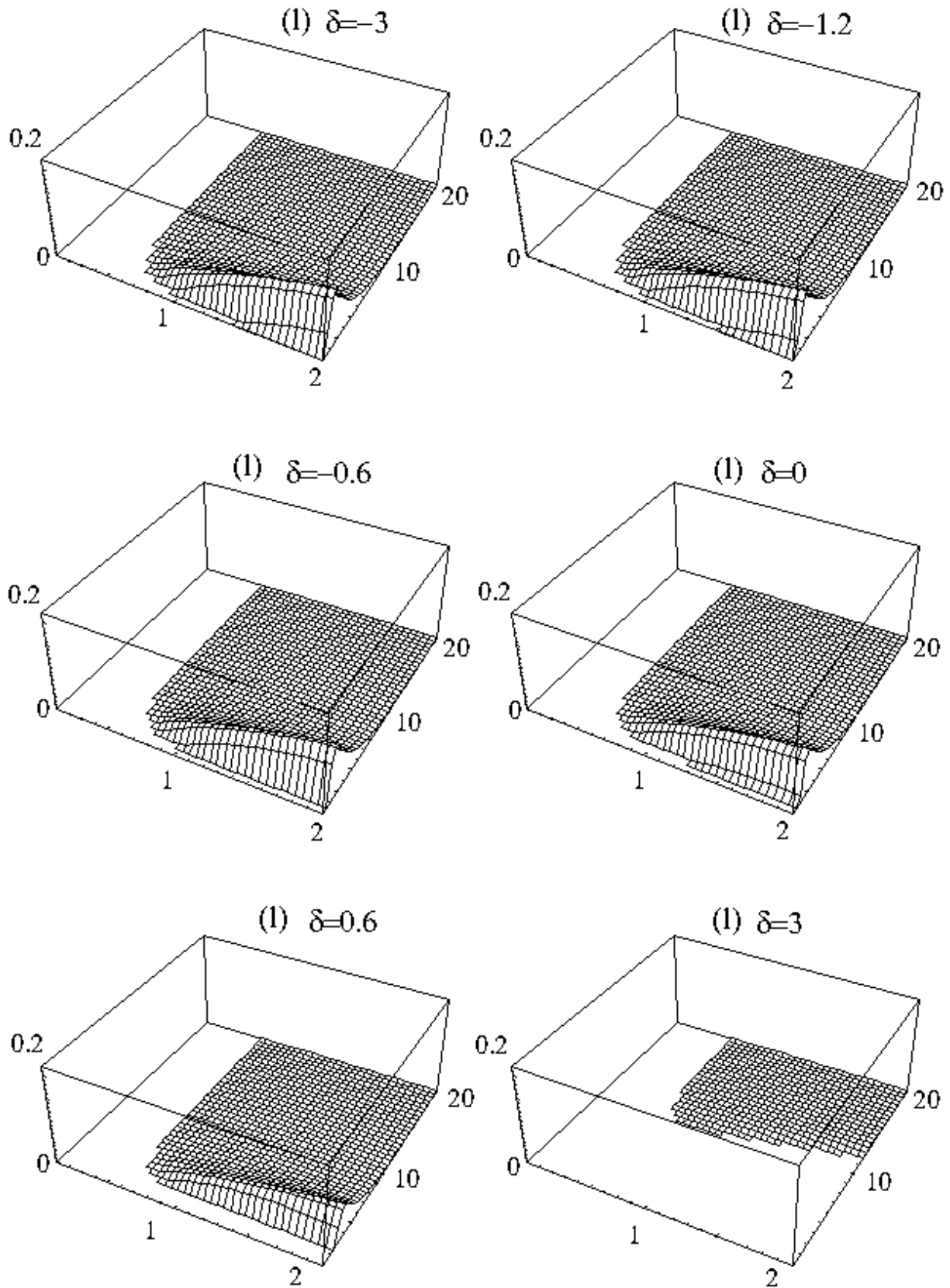


Рис. 3. Инкременты дрейфово-диссипативной неустойчивости в неоднородной плазме конечного давления. Обозначение осей, значения и области вариации параметров, а также изложение физического содержания см. в тексте.

$$d_m'' = g \left\{ (r-1)/b_\kappa + r(r+t_i) + q_\kappa(r+t_i) \times \left[1 + B^2(\gamma + \frac{3}{2}r^2 p_N) / \left(\frac{9}{4}r^2 p_N q_\kappa + \gamma^2 \right) \right] \right\} / (1+t_i). \quad (72)$$

Так как стационарные значения $|a_m|^2 \sim b_\kappa$ и малы, то вычисление нелинейной частоты можно выполнить последовательными приближениями. С точностью до членов порядка b_κ включительно частота находится из любого уравнения $d_m' = d_m'' = 0$. Поправкой, пропорциональной $b_\kappa |a_m|^2$, пренебрегаем. В силу дальнейших упрощений будем пользоваться линейной суперпозицией этих уравнений:

$$(1+t_i)(d_m' \gamma / y_N + 3rd_m''/2) = \frac{3}{2}r \left[(r-1)/b_\kappa + r(1+t_i) + (r+t_i) \left(q_\kappa + \frac{2}{3}(B^2 + \gamma) \right) \right] - \gamma(1+t_i)/p_N = 0. \quad (73)$$

Получившееся уравнение для частоты является квадратным и нетрудно найти корни этого уравнения. Однако при малых b_κ и $b_\kappa q_\kappa$ можно получить более простые приближенные выражения для корней, из которых выпишем один корень, представляющий собой параметр частоты дрейфовой волны:

$$r = 1 + \delta r, \text{ где } \delta r = -b_\kappa(1+t_i) \left[1 + q_\kappa + \frac{2}{3}(B^2 + \gamma - \gamma/p_N) \right]. \quad (74)$$

Из двух корней уравнения (73) в качестве частоты берется тот корень, который при $b_\kappa \rightarrow 0$ переходит в корень (74). Приведем и более общее приближенное выражение для частоты, полученное из уравнения (73) итерацией по малому параметру $b_\kappa/p_N \ll 1$:

$$r = \left[1 - t_i b_\kappa \left(q_\kappa + 2(B^2 + \gamma)/3 \right) \right] / \left[1 + b_\kappa \left(1 + q_\kappa + t_i + 2(B^2 + \gamma)/3 \right) \right] + 2\gamma(1+t_i)b_\kappa / \left[3p_N(1 - t_i b_\kappa q_\kappa) \right]. \quad (75)$$

При $b_\kappa, b_\kappa q_\kappa \ll 1$ выражение для параметра частоты r переходит в выражение (74). Отметим, что в исследуемых нелинейных решениях значение нелинейной частоты дрейфовой волны получается из условия близости к порогу неустойчивости этой волны и не привлекается принцип максимума инкремента для определения волнового вектора возбуждаемой волны и нахождения ее частоты, как

это обычно делается [12, 21]. Более общее условие, заменяющее принцип максимума и полученное в работе [7] при исследовании внешней устойчивости, используется для нахождения нелинейных порогов и волнового вектора доминирующей волны.

В качестве надкритичности волны принята величина, пропорциональная вещественной части дисперсионной функции этой волны (71) и связанная с размерным инкрементом волны посредством соотношения:

$$\Gamma_m = d_m'(1+t_i)\Omega_{ne}b_\kappa 0.3t_i\nu_{ii}/\omega_{Hi}, \quad (76)$$

$$\Omega_{ne} = -cT_{oe}K_y\mathcal{N}/eH_0,$$

где Ω_{ne} — размерная градиентная частота дрейфовой волны в пренебрежении эффектами конечного ларморовского радиуса. Выражение (76) получено при $\Gamma_m \ll \Omega_{ne}$; при $\Gamma_m \sim \Omega_{ne}$ выражение для инкремента иное. На самом пороге надкритичность волны d_m' , как и мнимая часть дисперсионной функции d_m'' , равна нулю при вещественном значении частоты. Эти равенства приводят к пороговому соотношению между любыми тремя независимыми параметрами (66)-(69). В запороговом состоянии общее выражение получено как функция градиентного параметра и комбинированного параметра плотности, температуры и магнитного поля, а также частоты, находимой из уравнения (73):

$$d_m' = (p_N - p_{Ncr})(p_N - p_{N2}) / \left[(1+t_i) \left(p_N + \frac{4}{9}\gamma^2/(r^2q_\kappa) \right) \right], \quad (77)$$

$$p_{Ncr} \equiv p_{N1} > 0, \quad p_{N1.2} = p_* \pm \left[p_*^2 + 4\gamma^2 \frac{1+t_i}{9r^3(r+t_i)q_\kappa} \right]^{1/2}, \quad (78)$$

$$p_* = (1+t_i) \left[2r(r+t_i) \right]^{-1} + B^2/3r^2 - 2\gamma(\gamma + B^2)/(9r^2q_\kappa); \quad p_{N2} < 0. \quad (79)$$

Исследование предельных случаев с большим значением комбинированного параметра, $q_\kappa \gg 1$, и малым его значением приводит к следующим критическим значениям градиентного параметра

$$p_{Ncr}(r, q_\kappa \ll 1) = \frac{(1+t_i)\gamma}{r(r+t_i)(\gamma + B^2)} \times \left[1 + \frac{3}{2} \frac{B^2q_\kappa}{\gamma(\gamma + B^2)} \times \left(1 + \frac{3r(1+t_i)}{(r+t_i)(1 + B^2/\gamma)} \right) \right], \quad (80)$$

$$p_{Ncr}(r, q_\kappa \gg 1) = \frac{1+t_i}{r(r+t_i)} + \frac{2B^2}{3r^2} - \frac{4}{9} \frac{\gamma B^2}{r^2 q_\kappa} \left[1 + \frac{2\gamma}{3r^2} \left(\frac{1+t_i}{r(r+t_i)} + \frac{2}{3} \frac{B^2}{r^2} \right) \right]. \quad (81)$$

Сформулируем качественные выводы. Дрейфовая волна неустойчива в линейной теории при превышении масштабным параметром его критического значения:

$$p_N > p_{Ncr}(r, q_\kappa), \quad (82)$$

где p_{Ncr} определяется формулами (79)-(81), в которые необходимо подставить r из формул (75) либо (74). Критические значения градиентного параметра растут вместе с ростом q_κ и уменьшением частоты. Учитывая зависимости этих параметров от магнитного поля, можно заключить, что, при заданных значениях параметра плотности λ_{ei} (68), меньшим магнитным полям соответствуют большие значения p_{Ncr} и наоборот. Среди всех значений p_{Ncr} существует наименьшее, соответствующее формально стремящемуся к бесконечности магнитному полю

$$p_{Ncr}(q_\kappa = 0, r = 1) = \gamma/(\gamma + B^2) = 0.355. \quad (83)$$

Пороговое значение градиентного параметра p_{Ncr} (78) может изменяться приблизительно на порядок величины при изменении q_κ и $b_\kappa \ll 1$ (наименьшее значение заключено в формуле (83), наименьшее "верхнее" значение $p_{Ncr}(q_\kappa \gg 1, r = 1) = 2.92$ при $b_\kappa \ll 1$). При учете малых отклонений частоты (75) от линейного закона дисперсии, при котором $r = 1$, область изменения пороговых значений градиентного параметра может превышать полтора порядка величин, а при учете немалых отклонений частоты (75) от линейного закона дисперсии область значений градиентного параметра расширяется еще больше. В этом состоит существенный новый результат пороговой теории, включающей температурные возмущения и позволяющий провести вблизи пороговое рассмотрение нелинейных стационарных режимов, адекватно учитывающее физическую ситуацию в полностью ионизованной столкновительной плазме, в которой пренебрежение возмущениями электронной температуры может быть только в модельном рассмотрении.

3.2. Линейные магнитные пороги

В эксперименте измеряют пороговые значения магнитного поля (магнитные пороги), выше которых возбуждается неустойчивость. Представим здесь результаты аналитических исследований магнитных порогов и их зависимостей от параметров неоднородной столкновительной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем. Пороговые значения магнитного поля в предельных случаях малых и больших q_κ можно получить из выражений для надкритичности (80) и (81), подставив в них выражения для частоты и представив надкритичность в виде $q_\kappa - q_{\kappa cr}$. Однако эти выражения пригодны при очень малых отклонениях градиентного

параметра от пороговых значений. Поэтому возьмем общее выражение для надкритичности дрейфовой волны (71) и подставим частоту, близкую к дрейфовой частоте с линейным законом дисперсии (74). В результате получаем

$$d'_m = (p_N + 4\gamma^2/(9q_\kappa))^{-1} \left\{ p_N \left(p_N - 1 - \frac{2}{3}B^2 \right) + \frac{4}{9} \frac{\gamma^2}{q_\kappa} [p_N(1 + B^2/\gamma)] \delta r \left[p_N \left(\frac{2+t_i}{1+t_i} + \frac{4}{3}B^2 \right) + \frac{4}{9} \frac{\gamma^2}{q_\kappa} \left(\frac{4+3t_i}{1+t_i} - 2p_N(1 + B^2/\gamma) \right) \right] \right\}. \quad (84)$$

Расположим слагаемые в фигурных скобках этого выражения по уменьшающимся степеням квадрата магнитного поля (учитывая значения δr):

$$\begin{aligned} \{ \dots \} = & \frac{4(\gamma)^2}{9q_\kappa} \left[\underbrace{p_N \left(1 + \frac{B^2}{\gamma} \right) - 1}_{1} - \right. \\ & \underbrace{b_\kappa(1+t) \left(1 + \frac{2}{3}\gamma \left(1 + \frac{B^2}{\gamma} - \frac{1}{p_N} \right) \right)}_{2} \times \\ & \left. \underbrace{\left(\frac{4+3t}{1+t} - 2p_N \left(1 + \frac{B^2}{\gamma} \right) \right)}_{2} \right] + \\ & \underbrace{p_N \left(p_N - 1 - \frac{2B^2}{3} \right)}_{3} - \\ & \underbrace{b_\kappa(1+t) \left[\left(\frac{2+t}{1+t} + \frac{4}{3}B^2 \right) \times \right.}_{4} \\ & \left. \underbrace{\left(p_N(1 + 2(\gamma + B^2)/3) - \frac{2}{3}\gamma \right)}_{4} \right] + \\ & \left. \underbrace{\frac{4}{9}\gamma^2 \left(\frac{4+3t}{1+t} - 2p_N \left(1 + \frac{B^2}{\gamma} \right) \right)}_{4} \right] - \\ & \underbrace{b_\kappa(1+t)q_\kappa p_N(4B^2/3 + (2+t)/(1+t))}_{5}. \quad (85) \end{aligned}$$

При очень большом магнитном поле, формально $H \rightarrow \infty$, в этом выражении оказываются существенными первые два слагаемые в квадратной скобке справа. Условие неустойчивости состоит в превышении градиентным параметром отмеченного выше (83) наименьшего критического значения, а критическое значение параметра магнитного по-

ля равно

$$b_{\kappa \text{ cr}}^{(1)} = \left(p_N (1 + B^2/\gamma) - 1 \right) \left[(1 + t_i) \times \left(1 + \frac{2}{3} \gamma (1 + B^2/\gamma - 1/p_N) \right) \left(\frac{4 + 3t_i}{1 + t_i} - 2p_N (1 + B^2/\gamma) \right) \right]^{-1} \quad (86)$$

При больших значениях $\lambda_{ei} = q_\kappa/b_\kappa \gg 1$ и малых b_κ , критическое магнитное поле получается из равенства первого и третьего слагаемых [24]:

$$b_{\kappa \text{ cr}}^{(2)} = \frac{4}{9} \frac{\gamma^2}{\lambda_{ei}} \frac{p_N (1 + B^2/\gamma) - 1}{p_N (1 + 2B^2/3 - p_N)}. \quad (87)$$

При соблюдении отмеченных условий это выражение будет справедливым в интервале значений градиентного параметра: $1 / (1 + B^2 / \gamma) < p_N < 1 + 2B^2/3 - O(b_\kappa) \cdot C$. В этой оценке для интервала значений p_N на верхней границе интервала числовой множитель C при малых членах порядка b_κ не является малым. Поэтому при значениях $\lambda_{ei} \sim 1$ возможна компенсация членов, представленных первым, третьим и четвертым слагаемыми выражения (85), при условии, что остальные слагаемые малы. В частности, если $b_\kappa A \gg p_N |p_N - 2B^2/3|$, то критическое значение параметра магнитного поля определяется равенством

$$b_{\kappa \text{ cr}}^{(3)} = \frac{2}{3} \gamma \left(\frac{p_N (1 + B^2/\gamma) - 1}{A \lambda_{ei}} \right)^{1/2}, \quad (88)$$

где коэффициент A , являющийся множителем в четвертом слагаемом, после некоторых преобразований принимает вид

$$A = p_N \left[(2 + t_i) \left(1 + \frac{2}{3} (\gamma + B^2) \right) + \frac{4}{3} (1 + t_i) \left(B^2 + \frac{2}{3} (B^4 - \gamma^2) \right) \right] + \frac{4}{9} (\gamma)^2 \times \left[4 + 3t_i - \frac{3}{2\gamma} \left(2 + t_i + \frac{4}{3} B^2 (1 + t_i) \right) \right]. \quad (89)$$

С ростом параметра надкритичности, для значений $p_N > 1 + 2B^2/3$, требуются меньшие магнитные поля для достижения неустойчивости. При $b_\kappa A \ll 1$, и $b_\kappa q_\kappa \leq 1$ может наступать компенсация третьего и последнего слагаемых при малых значениях остальных слагаемых. Отсюда получаем критическое значение параметра магнитного поля для холодной плазмы большой плотности:

$$b_{\kappa \text{ cr}}^{(4)} = \left[\frac{p_N - 1 - 2B^2/3}{\lambda_{ei} (2 + t_i + 4B^2(1 + t_i)/3)} \right]^{1/2}. \quad (90)$$

Напомним, что критические значения магнитного параметра найдены при условии малого отклонения частоты дрейфовой волны от линейного

закона дисперсии (74). Однако три из четырех приведенных случаев содержат стабилизацию неустойчивости посредством этого малого отклонения частоты, представленного слагаемыми, содержащими в виде явного множителя b_κ в выражении (85). Ясно, что в общем случае пороговое условие возбуждения дрейфово-диссипативной неустойчивости представляет собой двумерную поверхность в трехмерном пространстве параметров $p_N, \lambda_{ei}, b_\kappa$ или p_N, r, q_κ . Поэтому возможны случаи, когда для определения критического магнитного поля понадобится больше слагаемых, чем использовано нами в разложении (85), или необходимо обратиться к общему выражению для надкритичности волны (77) и частоты (75). Критические значения параметра магнитного поля (86), (87), (88) и (90) соответствуют не различным нулям параметра надкритичности (85), а одному корню порогового условия в различных областях параметрического пространства, которые могут частично перекрываться.

Приведем числовые значения коэффициентов в полиноме параметра надкритичности. Для этого полином (85) перепишем в следующем виде:

$$\{\dots\} = \frac{1}{\lambda_{ei}} (b^{-1} a_{-1} - a_{01}) + a_{02} - b_\kappa a_1 - b_\kappa^2 \lambda_{ei} a_2, \quad (91)$$

где параметр q_κ выражен через параметр b_κ и параметр λ_{ei} , и все пять введенных коэффициентов выражены через градиентный параметр, параметр неизотермичности t_i , и числовые константы двухкомпонентной гидродинамики. Коэффициент при нулевой степени магнитного поля разбит на два слагаемые, из которых одно выпишем

$$a_{02} = p_N (p_N - 1 - 2B^2/3) = p_N (p_N - 2.95), \quad (92)$$

а другое нетрудно восстановить из формулы (85). После подстановки числовых констант и вычислений коэффициенты полинома (91) в изотермической плазме $t_i = 1$ принимают значения:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= 1.17(2.81p_N - 1), \\ a_{01} &= 51.8(p_N - 0.27)/[p_N(0.62 - p_N)], \\ a_1 &= 30.4(p_N - 0.17), \\ a_2 &= 19.8p_N. \end{aligned} \quad (93)$$

В полиноме (91) четко выделяются три предельные случая, а именно, случаи плазмы малой плотности и высокой температуры ($\lambda_{ei} \sim b_\kappa \ll 1$) и плазмы большой плотности и низкой температуры ($\lambda_{ei} \gg 1/b_\kappa \gg 1$). Эти два предельные случая приводят к критическому магнитному полю посредством формул (86) и (90), соответственно. Третьим предельным случаем является плазма большой плотности $\lambda_{ei} \gg 1$ и весьма сильного магнитного поля $b_\kappa a_1 \ll 1, b_\kappa a_{01} \ll 1$, когда добавок к частоте δr настолько мал, что им можно пренебречь,

а параметр q_k может быть произвольным. Пороговое магнитное поле определяется формулой (87), и параметр надкритичности в этом случае приведен в работе [24].

Были проведены компьютерные вычисления инкрементов дрейфово-диссипативной неустойчивости с возмущениями электронной температуры и непотенциальностью электромагнитного поля в широком интервале значений параметров плотности и температуры, магнитного поля и масштабного или градиентного параметра (66)-(69). Параметр плотности и температуры представлен в виде $\lambda_{ei} = 10^\mu$. Неустойчивость имеет место при изменении μ от -2 до 5 . Учитывая характер зависимости параметра λ_{ei} от плотности и температуры, это может означать неустойчивость горячей плотной магнитоактивной плазмы, используемой в инерциальном синтезе или в иных модификациях магнитного и инерциального удержания (типа плазменного лайнера с первоначальным магнитным удержанием).

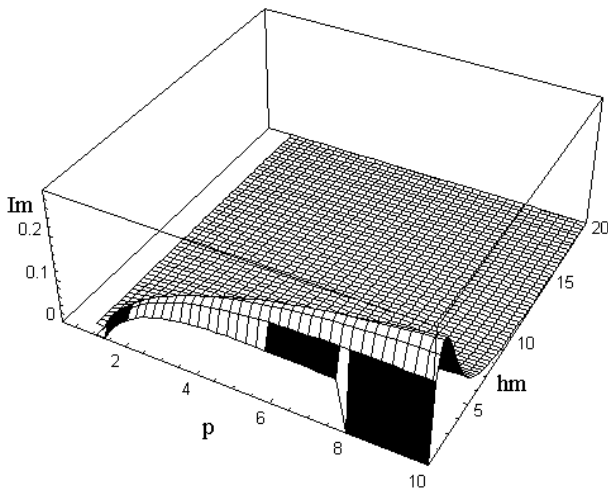


Рис. 4. По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент неустойчивости $\mathbf{Im} r$, по горизонтальным осям параметры магнитного поля h_m и градиентного параметра p , см. формулы (63) и (64), где приведены значения прочих параметров, но $\beta = 10^{-3}$. $\mu = -0.6$.

С ростом μ инкремент увеличивается и область неустойчивых полей постепенно расширяется, критическое магнитное поле возникновения устойчивости увеличивается. Относительные значения инкремента не превышают значения 0.2 . При $\mu = 2.2$ для одного и того же значения параметра p появляется несколько значений критического магнитного поля, что отчетливо видно при $\mu = 2.9$, $\mu = 4.3$ и $\mu = 5.0$ на рис. 6, 7 и 8. Критические магнитные поля с ростом плотности увеличиваются, а инкременты уменьшаются. Удивительными являются сравнительно большие инкременты при малых значениях градиентного параметра, не очень больших

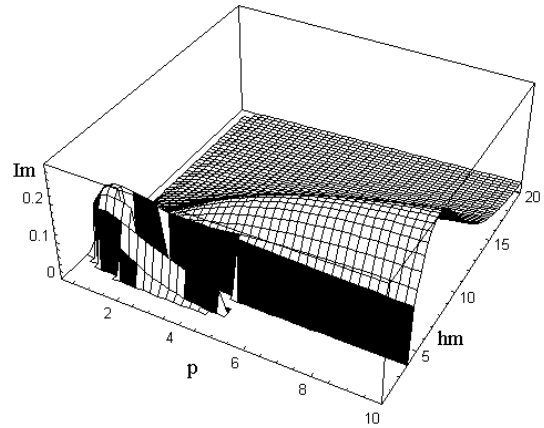


Рис. 5. По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент неустойчивости $\mathbf{Im} r$, по горизонтальным осям параметры магнитного поля h_m и градиентного параметра p , см. формулы (63) и (64), где приведены значения прочих параметров, но $\beta = 10^{-3}$. $\mu = 2.2$.

значениях магнитного поля и умеренных плотностях*.

Компьютерные вычисления снабжают нас еще одним наблюдением. На рис. 9-14 ясно виден "хребет" максимума инкремента неустойчивости, параллельный оси p . С одной стороны при малых надкритичностях уже одно это может свидетельствовать о возможности каскада одночастотных нелинейных диссипативных режимов с доминирующими волнами, имеющими максимальный инкремент, — такая точка зрения отстаивается в настоящей работе с помощью аргументов нелинейной теории с учетом конкуренции волн. С другой стороны возможны иные нелинейные решения учитывающие анизотропию инкремента, например, типа струй в k -пространстве [25].

Эксперименты на Q -машинах [21], [11] характеризуются значением параметра $\lambda_{ei} \sim 1$ и относятся к случаю умеренной плотности, в ряду приведенной выше классификации, и низким температурам (близок по параметрам рис. 4, однако плазмы Q -машин соответствуют значительно меньшим давлениям, $\beta \ll 10^{-3}$).

Возвратимся к аналитическим вычислениям. Придавая градиентному параметру значения, большие нижнего критического значения (83), нетрудно видеть, что все первые четыре коэффициента полинома (91) одного порядка величины. Получающееся в качестве корня этого полинома значение

*В плазме с большой плотностью, $n_0 \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, при конечном $\beta \approx 0.1$ и при $T_e \approx 5 \text{ эВ}$ в работе [28] наблюдалось внезапное уменьшение плотности плазмы при быстром росте амплитуд дрейфовых волн, который авторы связывают с дрейфово-диссипационной неустойчивостью, развивавшейся в области локализации максимума градиента плотности. Получаемые здесь большие инкременты могут иметь отношение к этому и другим экспериментам.

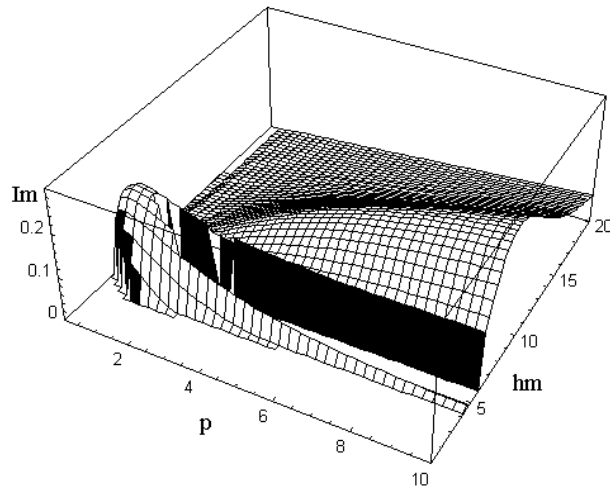


Рис. 6. По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент неустойчивости $\text{Im } r$, по горизонтальным осям параметры магнитного поля h_m и градиентного параметра p , см. формулы (63) и (64), где приведены значения прочих параметров, но $\beta = 10^{-3}$. $\mu = 2.9$.

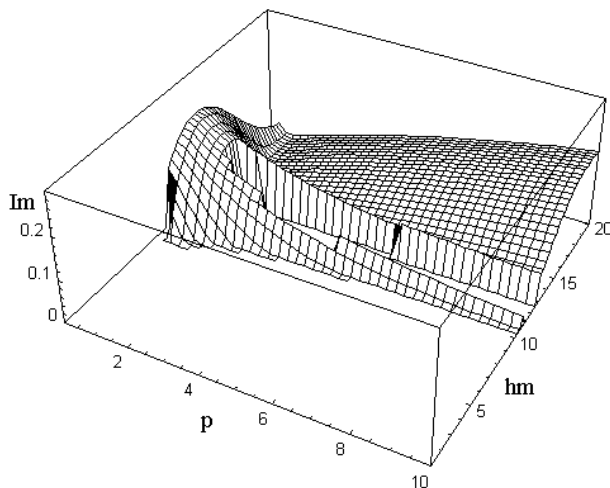


Рис. 7. По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент неустойчивости $\text{Im } r$, по горизонтальным осям параметры магнитного поля h_m и градиентного параметра p , см. формулы (63) и (64), где приведены значения прочих параметров, но $\beta = 10^{-3}$. $\mu = 4.3$.

$b_{\kappa \text{ cr}}$ составляет несколько десятых долей единицы. Выражение для полинома получено для малых значений b_{κ} и поэтому находится на границе области применимости использованного разложения. В частности, становится немалой добавка к частоте (74). По этой причине необходимо использовать неявные зависимости, содержащиеся в соотношениях (75), (78) или (75), (80), (81).

Для нахождения пороговых значений параметра $b_{\kappa \text{ cr}}$ по неявным зависимостям необходимо из уравнения $p_N = p_{N \text{ cr}}(r, q_{\kappa})$ определить поро-

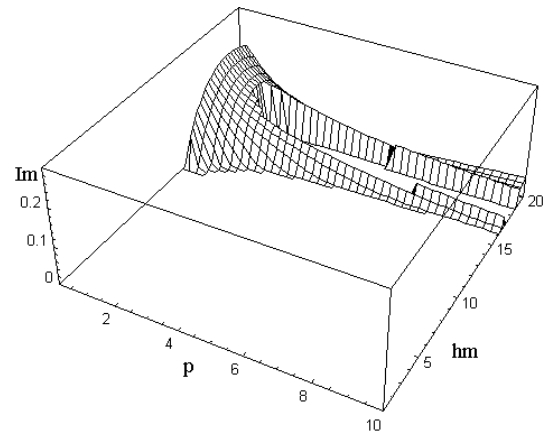


Рис. 8. По вертикальной оси отложен безразмерный инкремент неустойчивости $\text{Im } r$, по горизонтальным осям параметры магнитного поля h_m и градиентного параметра p , см. формулы (63) и (64), где приведены значения прочих параметров, но $\beta = 10^{-3}$. $\mu = 5.0$.

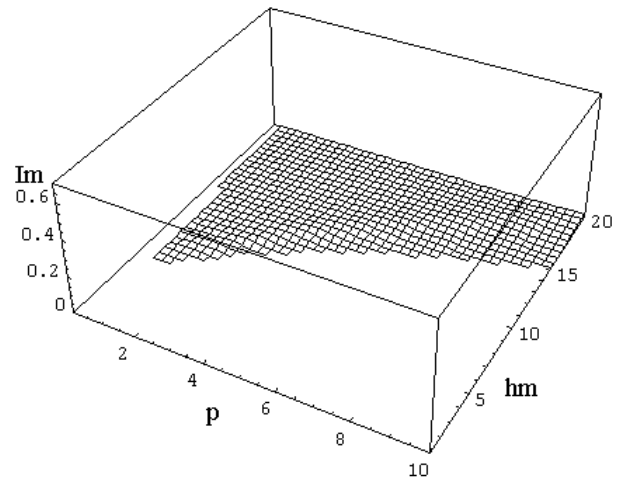


Рис. 9. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = -2.4$.

вое значение параметра частоты $r_{\text{cr}}(p_N, q_{\kappa})$. Затем, подставляя эту зависимость в уравнение (75), отыскивают $b_{\kappa \text{ cr}}(p_N, \lambda_{ei})$. Для малых значений комбинированного параметра плотности, температуры и магнитного поля q_{κ} и значений параметра $\lambda_{ei} = 1/2$ и параметра частоты $r = \omega_m/\omega_{ne}$, характерных для эксперимента [21] в плазме щелочных металлов низкой плотности и температуры, вычисления с использованием выражений (75), (80) приводят к формуле:

$$b_{\kappa \text{ cr}}(q_{\kappa} \ll 1, p_N) = 0.09(1 - 0.38/p_N)^{-1}. \quad (94)$$

Согласно (80) для отмеченных значений параметров критическое значение градиентного параметра

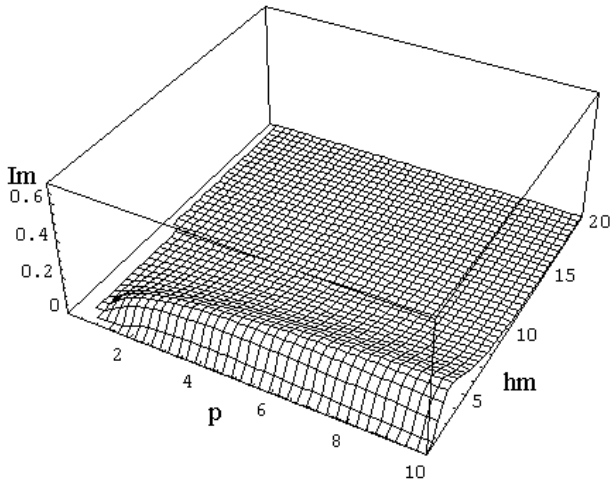


Рис. 10. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = -1.2$.

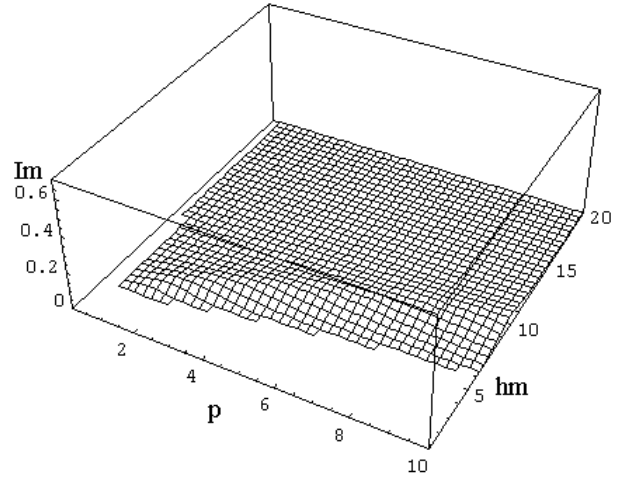


Рис. 12. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = 1.2$.

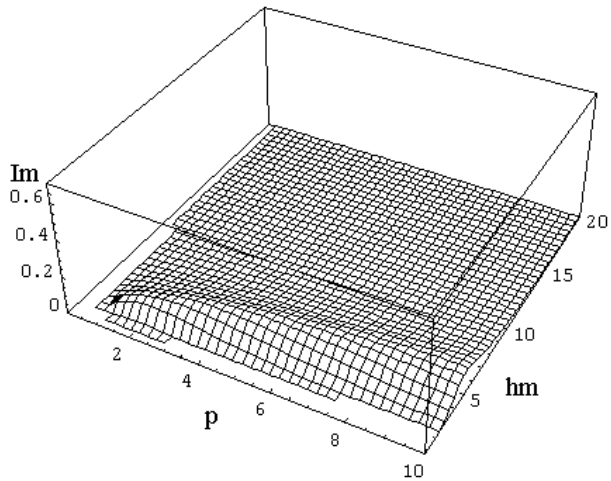


Рис. 11. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = 0.0$.

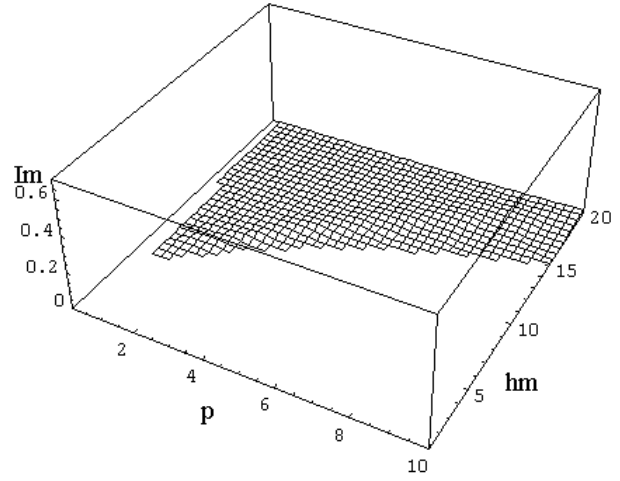


Рис. 13. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = 2.4$.

равно

$$p_{Ncr}(r = 0.5; q_k \ll 1) = 0.94(1 + q_k 0.74).$$

Так как $p_N > p_{Ncr}$, то полученное значение (94) согласуется со значением, полученным в эксперименте и приближенно равным 0.1. Остающееся различие призвана объяснить нелинейная пороговая теория, понятия которой вводятся в конце настоящего раздела, а также отличие цилиндрической геометрии эксперимента от модели плоского неоднородного слоя в нашей теории.

Квадрат порогового значения магнитного поля m -волны вычисляется по формуле

$$H_{cr}^2(m) = K_{\perp}^2 T_e m_i c^2 / e^2 b_{kcr}. \quad (95)$$

Отсюда видно, что линейная пороговая теория дает эквидистантные магнитные пороги возбуждения дрейфовых диссипативных волн в зависимости от азимутального волнового числа $H_{cr}(m)/m = f(p_N, \lambda_{ei})$ при $p_N = \text{const}$ и $h = k_x/m = \text{const}$.

3.3. Сведения о нелинейных порогах

Дрейфово-диссипативную неустойчивость возбуждают увеличением внешнего магнитного поля (82). При этом азимутальное волновое число $m = K_y L_{\perp} / 2\pi$ (дискретное и целочисленное) доминирующей волны растет с увеличением магнитного по-

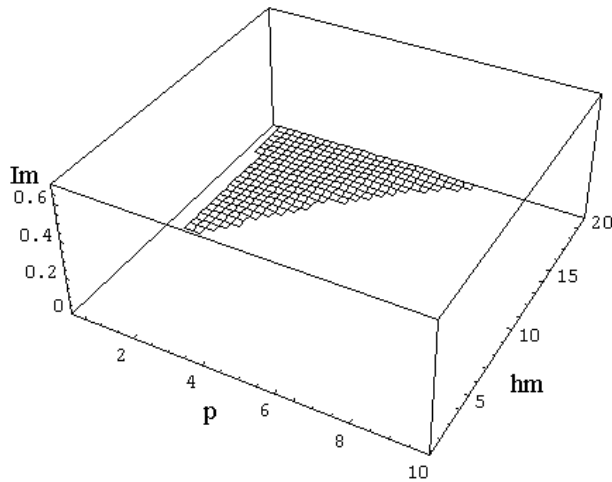


Рис. 14. Значения инкрементов для больших значений параметра надкритичности $p_N = p^2 = 100$ с теми же значениями остальных параметров, что и на рис. 3, (63), (64). $\delta = 3.0$.

ля. Стационарная нелинейная волна подавляет все остальные волны, неустойчивые в линейной теории, чем и обязана своим названием доминирующей волны. Эта волна устойчива по отношению к малым возмущениям. Условие устойчивости доминирующей волны $m = (m, n, k_x)$ по отношению к возбуждению волны $j = (j, n_j, k_{xj})$ получено в разделе 2 работы [7] и записывается в виде неравенства

$$|a_m^0|^2 \equiv d'_m / \text{Re} w_{mm} > d'_j / \text{Re} w_{jm}, \quad (96)$$

где $\text{Re} w_{mm}$ и $\text{Re} w_{jm}$ — коэффициенты само- и взаимодействия волн m и j . Ясно, что доминирующая волна возбуждается, если ее надкритичность превысит надкритичности остальных волн, умноженные на отношения самовоздействия этой волны к коэффициентам нелинейной связи этих других волн с доминирующей волной. (Неравенства (96) можно переписать по-иному $\gamma_j^{NL} = \gamma_j - |a_m^0|^2 \text{Re} W_{jm} < 0$ и прочитать так: нелинейный инкремент подавляемой j -волны, которая претерпевает нелинейное стабилизирующее воздействие доминирующей волны, должен переменить знак, то есть неустойчивые в линейной теории j -волны станут устойчивыми.) Значение параметров плазмы, при которых влияние доминирующей волны превратит все остальные волны в устойчивые, называется нелинейным порогом ее возбуждения. Так как надкритичность волны d'_m (71) является монотонно возрастающей функцией градиентного параметра p_N (69), то условие (96) может выполняться при некотором значении азимутального номера m для всех $j < m$ и $j > m$.

Анализ нелинейного порога возбуждения m -волны показывает, что с ростом азимутального номера волны (и ростом магнитного поля) нелинейный порог возбуждения волны по магнитному по-

лю отодвигается к все большим его значениям по сравнению с линейными пороговыми значениями магнитного поля. Это связано с тем, что при больших m доминирующей волне необходимо подавить большее число j -волн, неустойчивых в линейной теории. Бóльшее число волн можно подавить при бóльшей надкритичности доминирующей волны, то есть при бóльших значениях магнитного поля. Этот вывод находится в согласии с результатами экспериментов на Q -машинах [21], [11] в которых измерялись магнитные пороги возбуждения волн, идентифицированных по азимутальной компоненте их волнового вектора, и содержатся существенные результаты о зависимости коэффициента конвекции плазмы от магнитного поля (см. работу [7]).

4. Универсальный уровень амплитуды доминирующей волны

Основной результат настоящего раздела состоит в исследовании уровня амплитуды доминирующей волны дрейфово-диссипативной структуры, включающей возмущения электронной температуры. Квадрат модуля амплитуды доминирующей волны можно представить в виде произведения параметра надкритичности, исследованного в предыдущем разделе, и так называемой амплитудной функции, некоторой функции единственного параметра, характеризующего плазму, — комбинации параметра плотности, температуры и магнитного поля q_κ , а также волнового параметра $Z = (k_x^2 - m^2)/k_\perp^2$, составленного из компонентов волнового вектора и показывающего отличие "радиального" размера волны от "азимутального". Полученное выражение для уровня амплитуды доминирующей волны, характеризуется универсальными значениями при вариациях параметров плазмы в довольно широких пределах. Что касается амплитудной функции, то обратная ее величина представлена в виде отношения двух квадратных трехчленов в зависимости от параметра q_κ , как и в выражении раздела 5 предыдущей работы [6] без учета температурных возмущений. Однако, при учете возмущений электронной температуры и использовании пороговых соотношений, коэффициенты квадратных трехчленов являются функциями ограниченной вариации одного параметра q_κ , а также пространственных размеров волны и ее второй гармоники. Так как пространственные размеры волны и второй гармоники меняются не сильно, то при вариациях q_κ от весьма малых до весьма больших значений отношение квадратных трехчленов, приближенно равно, для двух предельных значений этого параметра, отношению коэффициентов — функций ограниченной вариации, также изменяется мало. Таким образом, универсальность значе-

ний амплитудной функции определяется механизмом нелинейной стабилизации второй гармоникой, затухающей в линейной теории.

Надкритичность доминирующей волны d'_m оценивается, принимая во внимание эффект перестройки волн, как величина порядка $b_\kappa \ll 1$ в случае выполнения сильных неравенств $1/q_\kappa \ll b_\kappa \ll 1$ или $q_\kappa \gg b_\kappa$, а для противоположных сильных неравенств надкритичность по порядку величины равна: $d'_m \sim q_\kappa \ll 1$ при $q_\kappa \gg b_\kappa$ или $d'_m \sim 1/q_\kappa$ при $b_\kappa \ll 1/q_\kappa \ll 1$. При $q_\kappa \sim 1$ надкритичность может принимать значения, близкие к единице, и только большие численные значения квадратичных матричных элементов (см. ниже) могут оставлять справедливой редукцию нелинейной системы уравнений. Выводы о порядках величин параметра надкритичности получены на основе общих выражений предыдущего раздела и, подчеркнем еще раз, являются следствием эффекта перестройки волн (когда значение параметра надкритичности m -волны оценивается при значениях "грубых" параметров плазмы, например, $m + 1$ -волны).

4.1. Плазма низкой плотности и высокой температуры, $q_\kappa < 1$

Приведенные в работе [7] результаты исследования устойчивости нелинейных дрейфово-диссипативных структур, показывают, что устойчивая нелинейная диссипативная структура может быть образована неустойчивой в линейной теории, с малой надкритичностью, доминирующей волной, стабилизируемой в результате нелинейного взаимодействия со своей второй гармоникой, затухающей в линейной теории. Амплитуда доминирующей волны в стационарном режиме получается в результате баланса инкремента неустойчивой волны и нелинейных стабилизирующих факторов, представленных кубичным нелинейным самовоздействием волны и нелинейным воздействием затухающих вторых гармоник. Квадрат модуля амплитуды доминирующей волны можно представить в следующей форме:

$$|a_m|^2 = d'_m \varphi(q_\kappa, Z^2). \quad (97)$$

Надкритичность волны d'_m вычисляется в линейной пороговой теории. Амплитудная функция определяется как обратная величина вещественной части от суммы отношения произведения нелинейных матричных элементов к дисперсионной функции второй гармоники и коэффициента кубичного самовоздействия, масштабированных на один и тот же малый параметр:

$$\varphi(q_\kappa, Z^2) = \left\{ \operatorname{Re} \left[v(m, m)v(2m, -m) \frac{d_{2m}^*}{|d_{2m}|^2} + s_{mm} \right] \right\}^{-1}. \quad (98)$$

В знаменателе выражения, стоящего в фигурных скобках, стоит квадрат модуля масштабированной дисперсионной функции второй волновой гармоники, а в числителе знак * означает комплексное сопряжение. Дисперсионная функция второй гармоники получена в приложении (см. формулы (В.17), (В.18)). Фигурирующие в соотношении (98) масштабированные нелинейные матричные элементы связаны с нелинейными матричными элементами основного волнового уравнения в безразмерных переменных посредством формулы $v(j, k) = V(j, k) / [b_\kappa n^2 \eta_\kappa (1 + t_i)]$ и приведены в общем виде в приложении. Они выражены через функции ограниченного роста (144), (151), которые зависят от параметров исходной системы уравнений в безразмерном виде (см. приложение.)

В предыдущем разделе введены параметры нелинейной теории y_N, q_κ, p_N (66), (67), (69), отличающиеся от параметров исходных уравнений тем, что в качестве характерных поперечных и продольных размеров в них содержатся продольные и поперечные размерные длины доминирующей волны и характерная длина поперечного градиента. Там же введены параметры частоты и вязкости (здесь есть некоторое различие с параметром g формулы (59), которое устранять не станем):

$$\begin{aligned} r &= \omega_m / \omega_{ne}, \\ g_k &\equiv g_m = \omega_{ne} / \eta_\kappa, \\ g &= r g_m \end{aligned} \quad (99)$$

и отмечены два тождества

$$y_N^2 \equiv p_N q_\kappa, \quad g_m \equiv p_N / y_N, \quad (100)$$

а также исследовано пороговое соотношение $p_N = p_{N \text{ cr}}(q_\kappa, r)$, (78), (80), (81).

Так как зависимости нелинейных матричных элементов от параметров громоздки, то поставим задачу о вычислении амплитудной функции в частных предельных случаях $q_\kappa \ll 1$ и $q_\kappa \gg 1$ и для одного числового значения параметра $y_N = 2\gamma/3$, ($q_\kappa = 1.125$) в промежуточном случае. При этом в окончательных выражениях для нелинейных матричных элементов будем учитывать в качестве порогового значения частоты $\omega_m = \omega_{ne} + O(b_\kappa)$, то есть не будем различать параметры g и g_m . Как показывает линейный пороговый анализ, выполненный в предыдущем разделе, это довольно приближенное выражение для частоты. На пороге развития неустойчивости дрейфовых столкновительных волн параметр r может принимать значение, близкое к $1/2$. Тем не менее, получающийся результат для значений амплитудной функции, заключающийся в слабом ее изменении при вариации q_κ в довольно широких пределах, допускает возможность выбора такого предположения (в нулевом порядке по малому параметру b_κ теории возмущений).

При малых $y_N^2 \sim q_\kappa \ll 1$ используется разложение для функций

$$f_\kappa \equiv \frac{\omega_{ne}}{\omega_\theta} = -i \frac{y_N}{\gamma} \left(1 - i \frac{3y_m}{2\gamma} - \frac{9y_m^2}{4\gamma^2} \right), \quad (101)$$

$$\chi_\kappa = \frac{\gamma_0}{y_N} f_\kappa,$$

$$Y_\kappa = y_N + iBf_\kappa = y_N \left[1 + \frac{B}{\gamma} \left(1 - i \frac{3y_m}{2\gamma} - \frac{9y_m^2}{4\gamma^2} \right) \right]. \quad (102)$$

Здесь введено обозначение $y_m = r y_N$ и применяется обозначение $\gamma \equiv \gamma_0^\epsilon \alpha_0 = 3.16 \cdot 0.51$ для произведения числовых коэффициентов, составленного из числовых коэффициентов продольной электронной теплопроводности и продольного электронно-ионного трения. В мнимых и вещественных частях нелинейных матричных элементов $v(m, m)$ и $v(2m, -m)$ необходимо учесть вторые степени по y_N (при этом $g_\kappa \approx p_N/y_N$), так как мы хотим получить выражение для амплитудной функции с точностью до членов, линейных по $q_\kappa \equiv y_N^2/p_N \ll 1$. Используя выражение (143), взятое из приложения, получаем

$$v(m, m) \left\{ y_N \ll 1 \right\} = 4 \left\{ i \left[-g - y_N \left(3 + Z^2 + \frac{B}{\gamma} \left(\frac{7}{2} + Z^2 \right) - \frac{33B}{8\gamma^2} p_N \right) \right] + 2(3 + Z^2) - p_N \left(1 + \frac{3B}{2\gamma} \right) - \frac{3B}{4} \frac{y_N^2}{\gamma^2} \left[\frac{p_N}{4\gamma} (41 - 12B) + 15 - Z^2 \right] \right\} = 4 \left\{ -i \left(g + a_1 y_N \right) + a_0 - a_2 q_\kappa \right\}. \quad (103)$$

Если вместо p_N подставлено пороговое значение, приведенное в формуле (80), то для коэффициентов получаем числовые значения с 10% точностью:

$$a_1 = 5.7; \quad a_0 = 5.1; \quad a_2 = 3.5. \quad (104)$$

С помощью формулы (A.11), вывод которой приведен в приложении, аналогично вычисляем коэффициент $v(2m, -m)$ в виде выражения, расположенного по степеням $y_N \ll 1$ (здесь надо учитывать выше приведенные зависимости параметров g_κ и q_κ от y_N):

$$v(2m, -m) = 2ig_\kappa + 2iy_N \left[3 - 5 \frac{B}{\gamma} - 8Z^2 \times \left(1 + \frac{B}{\gamma} \right) \right] - iy_N \frac{B}{\gamma^2} p_N(0) \left(9 \frac{5}{9} + \frac{9}{2} B \right) - 33 + 16Z^2 - p_N(q_\kappa) \left(5 + 7 \frac{B}{\gamma} \right) + \frac{3Bp_N(0)}{4\gamma^2} q_\kappa \times \left[8 + 11B + 32Z^2 + \frac{3p_N}{2\gamma} (26B + 1) \right] = 2ig + iy_N b_1 - b_0 + q_\kappa b_2, \quad (105)$$

где, используя пороговое соотношение $p_N = p_{Ncr}(q_\kappa \ll 1, r = 1)$, найденное в предыдущем разделе (80), с той же точностью, что и в формуле (104), имеем:

$$b_1 = 2.4; \quad b_0 = 37.4; \quad b_2 = 2.9. \quad (106)$$

В этом выражении самым большим является коэффициент b_0 , полученный от столкновительной ионной вязкости в уравнении непрерывности ионов.

Для разложения дисперсионной функции второй гармоники (B.15), имеем выражение, расположенное по степеням $y_N \ll 1$, содержащегося в выше отмеченных параметрах:

$$d_{2m} = 24 \left[-2 \left(1 - \frac{B^2 p_N^2}{\gamma} \left(\frac{3}{4\gamma} \right)^2 q_\kappa \right) - ig_m \left(1 + q_\kappa \left(1 + \frac{B^2}{\gamma} \right) \right) \right] \equiv d'_{2m} + id''_m$$

или

$$d_{2m} = 24 [-2(1 - q_\kappa \Delta_2) - ig_m(1 + q_\kappa \Delta_1)], \quad (107)$$

$$\Delta_1 = 2.81, \quad \Delta_2 = 0.046.$$

Произведения квадратичных матричных элементов находим в следующем виде:

$$v(m, m)v(2m, -m) = 4 \left[2g^2 - a_0^v + i(ga_{-1}^v + y_N a_1^v) \right], \quad (108)$$

где

$$a_0^v = a_0 b_0 - p_N(b_1 + 2a_1),$$

$$a_{-1}^v = b_0 + 2a_0, \quad (109)$$

$$a_1^v = a_1 b_0 + a_0 b_1 - b_2 - 2a_2.$$

Как отмечено выше, здесь принято $g = g_\kappa \approx g_m$. Используя тождественные соотношения (100), для числителя первого слагаемого в знаменателе амплитудной функции (98) получают

$$\text{Re } v(m, m)v(2m, -m)d_{2m}^* = 96(g^2 a_{-2}^w + a_0^w), \quad (110)$$

Здесь введены обозначения

$$a_{-2}^w = -4 + a_{-1}^v, \quad (111)$$

$$a_0^w = 2(a_0^v + 2p_N \Delta_2) + p_N(0)(a_1^v + \Delta_1 a_{-1}^v).$$

Приведем численное значение фигурирующих в этих формулах коэффициентов

$$a_0^v = 187, \quad a_{-1}^v = 47.6, \quad a_1^v = 192, \quad (112)$$

$$a_{-2}^w = 43.6, \quad a_0^w = 490.$$

Принимая во внимание, что равенство $g_m^2 = p_{Ncr}(q_\kappa)/q_\kappa$ приводит к соотношению

$$|d_{2m}|^2 = 24^2 \frac{p_N(0)}{q_\kappa} (1 + 17.7q_\kappa), \quad (113)$$

для нелинейного воздействия второй гармоники, представленного первым слагаемым в знаменателе амплитудной функции (98), при $q_\kappa \ll 1$ получаем выражение

$$\operatorname{Re} w_{mm}^v \equiv \operatorname{Re} \frac{v(m, m)v(2m, -m)d_{2m}^*}{|d_{2m}|^2} = 7.26 \frac{1 + q_\kappa 32.4}{1 + q_\kappa 17.7}. \quad (114)$$

Теперь необходимо найти коэффициент нелинейного кубического самовоздействия доминирующей волны. Для вклада в нелинейное кубическое самовоздействие, следующего из уравнения температуропроводности, пользуясь разложениями (101) и (102), при $r = 1$ из соотношений (B.12) и (B.13) получаем, с учетом только первой степени $q_\kappa \ll 1$:

$$\operatorname{Re} s_4(\kappa) = B(p_N/\gamma) \left\{ -3 - B + (q_\kappa/4\gamma) \left[-B(6.5 + 4Z^2) + 8 + 6Z^2 + (p_N/\gamma) \times \left(B(-8\frac{1}{4} + 8Z^2) + 37\frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (115)$$

Аналогично из формулы (B.9) находим при $q_\kappa \ll 1$

$$s_1(\kappa) + s_2(\kappa) = -\frac{7}{2} + 8Z^2 - (1 - 8Z^2) \frac{B}{\gamma^2} p_N q_\kappa. \quad (116)$$

Из формулы (B.11), поступая как выше, имеем

$$\operatorname{Re} s_3(\kappa)[q_\kappa \ll 1] = \frac{1}{4} \frac{p_N}{\gamma} \left\{ 2B - 1 - \frac{3}{4} \frac{q_\kappa}{\gamma} [B(5 + 2Z^2) - 2] \right\}. \quad (117)$$

Подставляя в каждое из слагаемых выражений (115) и (117) пороговое значение градиентного параметра $p_{Ncr}(q_\kappa)$ (80), находим после числовых выкладок для коэффициента суммарного кубического самовоздействия волны (при $Z^2 = 0$):

$$\operatorname{Re} s(m) \equiv \operatorname{Re} \rho(\kappa) = \sum_1^4 s_j(\kappa) = -5.1 - 1.8q_\kappa. \quad (118)$$

В итоге получаем аналитическое выражение для амплитудной функции в области малых значений параметра q_κ :

$$[\varphi(q_\kappa; Z^2 = 0; r = 1)]^{-1} = 7.26 \frac{1 + q_\kappa 34.2}{1 + q_\kappa 17.7} - 5.1 - 1.8q_\kappa. \quad (119)$$

Интересно отметить, что суммарное кубическое самовоздействие волны имеет дестабилизирующий

характер, и нелинейное воздействие столкновительной ионной вязкости поменяло знак на противоположный [13], [?], [?]. Из полученного выражения для амплитудной функции видно, что нелинейная стабилизация неустойчивой в линейной теории волны (с малой надкритичностью) происходит в результате линейного и нелинейного затухания ее второй гармоники. Ниже приведена полученная на основе этого выражения таблица 1 числовых значений амплитудной функции, кубического самовоздействия и нелинейного стабилизирующего воздействия второй гармоники при некоторых значениях параметра q_κ (в том числе на границе применимости формулы (119)), а также приведен результат вычисления этих величин посредством точных формул при $q_\kappa = 1.125$.

Амплитудная функция заметно изменяется при увеличении q_κ от нулевых значений до значений $q_\kappa \approx 0.1$, то есть там, где применима формула (119). В области, граничащей с областью ее применимости, амплитудная функция изменяется слабо и если пренебреженные члены малы, то ответ может гладко сшиваться с формулой, справедливой при $q_\kappa \gg 1$. Именно так можно получить формулы, аппроксимирующие нелинейное воздействие второй гармоники в области малых и больших значений комбинированного параметра плотности и магнитного поля q_κ . Такая возможность аппроксимации объясняется наличием, в качестве сомножителей, функций ограниченной вариации при коэффициентах в нелинейных матричных элементах и будет обсуждена ниже.

4.2. Большие значения параметра q_κ .

При больших значениях параметров $q_\kappa, y_N \gg 1$ разложение нелинейных матричных элементов, представленных формулами в общем виде (A.9), (A.11) и (B.8)–(B.14), производится по обратным степеням этих параметров. При этом используем разложение функций ограниченной вариации при $y_m \sim y_N \gg 1$ (речь идет об ограниченных вариациях модулей этих функций):

$$f_\kappa = \frac{y_N}{1.5ry_N + i\gamma} \approx \frac{2}{3r} \left(1 - i \frac{2\gamma}{3y_m} - \frac{4\gamma^2}{9y_m^2} \right), \quad (120)$$

$$\chi_\kappa = \frac{\gamma}{y_N},$$

$$Y_\kappa = y_N + iBf_\kappa.$$

Разложение $v(m, m)$ громоздко и с точностью, учитывая по две степени y_N в мнимой и вещественной частях, имеет вид

$$v(m, m) = 4 \left\{ i \left[-y_N(3 + Z^2) + \left(\frac{2}{3} B^2 - 1 - \right. \right. \right.$$

Таблица 1. Значения нелинейного воздействия вторых гармоник, кубического самовоздействия и амплитудной функции в зависимости от комбинированного параметра $q_\kappa \ll 1$.

q_κ	0	0.01	0.03	0.1	0.3	1.0	1.125	-	-	-
$\text{Re } s(\kappa)$	-5.14	-5.18	-5.25	-5.5	-6.24	-6.97	-0.79	-	-	-
$\varphi(q_\kappa)$	0.47	0.33	0.24	0.178	0.164	0.167	0.086	-	-	-
$\text{Re } w_{mm}^v(q_\kappa)$	7.26	8.2	9.34	11.1	12.3	12.9	12.4	-	-	-

$$\begin{aligned} & \left. \frac{4}{3}B \right) - \frac{\gamma}{y_N} \frac{16}{9} \left(2 + Z^2 + \frac{B}{2} \right) \Big] + 2(3 + Z^2) + \\ & \frac{4}{3}B \left(4 + Z^2 \right) - p_N - \frac{2}{3}B \left(1 + B \right) + \frac{\gamma^2}{y_N} \frac{32B}{27} \times \\ & \left. \left[\frac{3p_N}{2\gamma} \left(B - 2\frac{3}{4} \right) + 2\frac{3}{4}B - 7 - 2Z^2 \right] \right\} = \\ & 4 \{ i [-y_N (3 + Z^2) + \\ & a_{-1}/y_N] + a_0 + a_{-2}/q_\kappa \}. \quad (121) \end{aligned}$$

Последняя строка этого матричного элемента получена при использовании тождественных соотношений между параметрами и порогового соотношения (81) при $q_\kappa \gg 1$ и $r = 1$. При этом

$$a_{-1} = -6.6; \quad a_0 = 9.08; \quad a_{-2} = 3.28.$$

Эти коэффициенты одного порядка величины.

Аналогично и с той же точностью получаем при $q_\kappa \equiv y_N^2/p_N \gg 1$ разложение для коэффициента $v(2m, -m)$, задаваемого общей формулой (A.11):

$$\begin{aligned} v(2m, -m) = i \left\{ 6y_N + 2\frac{\gamma}{y_N} \left[p_N \left(1 + \frac{B}{3}(7B - 13) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{4}{9}B(10 + 37B) \right] \right\} - 33 - 5p_N - \frac{2}{3}B(-10 + 27B) + \\ \frac{4}{9}B \frac{\gamma^2}{y_N^2} \left[-13\frac{p_N}{\gamma} + 36\frac{2}{3} + 2B(35 + 11p_N) \right]. \quad (122) \end{aligned}$$

Подставляя сюда тождественные и пороговые соотношения, а также числовые константы, находим

$$\begin{aligned} v(2m, -m) = i \left(6y_N + \frac{b_{-1}}{y_N} \right) + b_0 + \frac{b_{-2}}{q_\kappa}, \quad (123) \\ b_{-1} = 205, \quad b_0 = -89, \quad b_{-2} = 137. \end{aligned}$$

Масштабированная дисперсионная функция второй гармоники d_{2m} , учитывающая ее затухание на пороге неустойчивости доминирующей волны, а также отличие закона дисперсии от линейного $\Delta\omega_{2m} = \omega_{2m}^L - 2\omega_m^L \neq 0$, имеет следующее разложение

$$\begin{aligned} d_{2m} = 24 \left[\Delta_0 + \Delta_{-2}/q_\kappa + \right. \\ \left. i(y_N + \Delta_{-1}/y_N) \right] = d'_{2m} + id''_{2m}. \quad (124) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты разложения и приближенный квадрат модуля дисперсионной функции равны:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= -2 \left(1 + \frac{2}{3}B^2 \right), \\ \Delta_{-1} &= p_N(\infty) \left[1 + B^2 \frac{4}{9} \left(\frac{3}{2} + \frac{5\gamma}{p_N} \right) \right], \quad (125) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{-2} &= (8B^2/9)(\gamma + 10/3p_N), \\ |d_{2m}|^2 &\approx 24^2(y_N^2 + \Delta_0^2 + 2\Delta_{-1}). \quad (126) \end{aligned}$$

Из всех коэффициентов в формулах (122), (123) основной вклад в стабилизацию второй гармоникой дает коэффициент $b_0 = -33 - 5p_N - (2B/3)(27B - 10)$. Здесь последнее слагаемое и $p_N = p_{N \text{ cr}}(\infty, r = 1) = 2.95$ получены благодаря учету температурных возмущений. Таким образом, температурные возмущения в сочетании с ионной вязкостью дают основной вклад в нелинейное стабилизирующее воздействие второй гармоники. Вычисления стабилизирующего фактора от воздействия второй гармоники (см. определение фактора тождественным равенством в формуле (114)) при $q_\kappa \gg 1$ вполне аналогично выше приведенным выкладкам для противоположного сильного неравенства. Чтобы свести число параметров к одному, каждый раз используем пороговое условие и тождественные равенства. В результате получаем для стабилизирующего фактора при $q_\kappa \gg 1$

$$\text{Re } w_{mm}(q_\kappa \gg 1, Z^2 = 0) = 35.9 \frac{q_\kappa + 13.7}{q_\kappa + 24.0}. \quad (127)$$

Приведем результаты вычислений кубического самовоздействия волны при $q_\kappa \gg 1$, полученные при помощи выражений (B.9)–(B.14) для парциальных коэффициентов кубического самовоздействия (по описанной процедуре редукции числа параметров к одному):

$$\begin{aligned} \text{Re}(s_{44} + s_{43})(\kappa) = B \frac{8}{4} \left\{ -\frac{1}{4} \left(B \cdot 5\frac{2}{3} - 1 \right) + \right. \\ \left. \frac{\gamma^2}{p_N(\infty)q_\kappa} \left[B14\frac{1}{2} - 3\frac{1}{9} - p_N \left(B\frac{7}{18} + \frac{4}{3} \right) \right] \right\} \approx \\ -3.3 + 21.4/q_\kappa, \quad (128) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} s_{42} = -B(2B - 1) \left[1 - \frac{\gamma^2}{p_N(\infty)q_\kappa} \frac{4}{9} \times \left(1 + \frac{p_N(\infty)}{2\gamma} \right) \right] \approx -8.3 + \frac{6.3}{q_\kappa}, \quad (129)$$

$$\operatorname{Re} s_{41} = B \left\{ 2B - \frac{4}{3} - \frac{4\gamma}{9q_\kappa} \left[\frac{\gamma}{p_N} \left(4B - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\gamma \right) + 2(1 + 2B) \right] \right\} \approx 3.6 - \frac{13.9}{q_\kappa},$$

$$\operatorname{Re} s_4(\kappa) = \sum_{j=1}^4 \operatorname{Re} s_{4j}(\kappa) \approx -8.02 + 13.8/q_\kappa, \quad (130)$$

$$\operatorname{Re} s_3(\kappa) = -\frac{5}{3}B + \frac{2}{9} \frac{\gamma}{q_\kappa} \left[B - 1 + \frac{2\gamma}{3p_N} (13 + 10B) \right] \approx -2.85 + \frac{4.2}{q_\kappa}, \quad (131)$$

$$\operatorname{Re} (s_1 + s_2)(\kappa) = -3.5 - \frac{4}{3}B + \frac{16}{27} \frac{B\gamma^2}{p_N} \frac{1}{q_\kappa} \approx -5.8 + \frac{0.90}{q_\kappa}. \quad (132)$$

Самый большой дестабилизирующий фактор кубичного самовоздействия волны заключен в формуле (130), содержащей влияние возмущений электронной температуры. Суммарное кубичное самовоздействие равно:

$$\operatorname{Re} s(\kappa) = \sum_{j=1}^4 \operatorname{Re} s_j(\kappa) = -16.7 + 18.9/q_\kappa, \quad (133)$$

$q_\kappa \gg 1.$

Эти результаты позволяют выписать выражение для амплитудной функции при $q_\kappa \gg 1$, $r = 1$, $Z^2 = 0$:

$$\varphi(q_\kappa) = \left[35.9 \frac{1 + 13.7/q_\kappa}{1 + 24.0/q_\kappa} - 16.7 + \frac{18.9}{q_\kappa} \right]^{-1}. \quad (134)$$

Значения амплитудной функции, нелинейного воздействия вторых гармоник, а также кубичного нелинейного самовоздействия в зависимости от комбинированного параметра плотности, температуры и магнитного поля, q_κ , как в области применимости этих выражений, так и в области, прилегающей к области применимости, приведены в табл. 2.

В последнем столбце каждой из табл. 1 и 2 приведены числовые значения амплитудной функции, само- и взаимовоздействий доминирующей волны при значениях параметра $q_\kappa = 1.125$. Эти числовые значения являются результатом численного счета по точным формулам для квадратичных матричных элементов и кубичного самовоздействия, приведенным в приложении (см. формулы (А.9), (А.11)

и (В.9)–(В.14)). Значение параметра $q_\kappa = 1.125$ получено из условия нахождения на пороге неустойчивости доминирующей волны, $d'_m = 0$, при $y_N = 2\gamma/3$ и $r = \omega_m/\omega_{n\epsilon} = 1$, и весь численный расчет пригоден, таким образом, как и вычисления предельных случаев $q_\kappa \ll 1$ и $q_\kappa \gg 1$, при малых значениях параметра магнитного поля $b_\kappa \ll 1$. Значение $y_N = 2\gamma/3$ выбрано по той причине, что при этом функции ограниченного роста, фигурирующие в нелинейных матричных элементах, принимают простые значения при $r = 1$:

$$f_\kappa \left(y_N = \frac{2}{3}\gamma \right) = \frac{1-i}{3},$$

$$\chi_\kappa \left(y_N = \frac{2}{3}\gamma \right) = \frac{1-i}{2},$$

$$Y_\kappa \left(y_N = \frac{2}{3}\gamma \right) = \frac{1}{3}(2\gamma + B + iB).$$

Численный счет приводить здесь не будем, он вполне аналогичен проведенному при малых и больших значениях параметра q_κ с использованием тождественных и пороговых соотношений для параметров.

4.3. Объяснение универсального уровня амплитуды

Рассматривая табличные значения амплитудной функции, можно отметить, что она испытывает плавное и монотонное убывание при увеличении параметра q_κ от значения $\varphi(q_\kappa = 0) = 0.47$ через значение $\varphi(q_\kappa = 1.125, r = 1) = 0.086$ до значения $\varphi(q_\kappa = \infty) = 0.052$ (небольшим отклонением от монотонности при значениях q_κ из интервала $0.3 < q_\kappa \leq 15$ необходимо пренебречь, так как концевые точки этого интервала находятся на границе области применимости полученных разложений). Амплитудная функция изменяется не сильно, менее чем на порядок. На вариации уровня амплитуды эти изменения амплитудной функции скажутся еще слабее. При этом важны следующие обстоятельства. Во-первых, стационарное значение амплитуды доминирующей волны пропорционально корню квадратному из амплитудной функции, и это изменит пределы вариации амплитуды на множитель, приблизительно равный трем. Во-вторых, при учете эффекта перестройки волн одна доминирующая волна сменит другую доминирующую волну при значениях параметра надкритичности $d'_\kappa \sim q_\kappa \ll 1$ при $1 \geq q_\kappa \gg b_\kappa$ или $d'_\kappa \sim 1/q_\kappa$ при $1 \gg 1/q_\kappa \gg b_\kappa$. В случае противоположных сильных неравенств $q_\kappa \ll b_\kappa$ или $1/q_\kappa \ll b_\kappa$ значение параметра надкритичности, при котором происходит перестройка волн, необходимо оценить как величину $d'_\kappa \sim b_\kappa \ll 1$. По изложенным соображениям вариации уровня амплитуды доминирующей волны будут заключены еще в более ограниченных пределах.

Таблица 2. Значения нелинейного воздействия вторых гармоник, кубического самовоздействия и амплитудной функции в зависимости от комбинированного параметра $q_\kappa \gg 1$.

q_κ	∞	50	20	15	10	3	1	1.125
$\text{Re } w_{mm}^v(q_\kappa)$	35.9	30.9	27.5	26.4	25.0	22.2	21.1	12.4
$\text{Re } s(\kappa)$	-16.7	-16.3	-15.7	-15.4	-14.8	-10.4	2.25	-0.79
$\varphi(q_\kappa)$	0.052	0.068	0.085	0.091	0.0975	0.084	0.043	0.086

Итак, малые вариации величины надкритичности волны объясняются эффектом перестройки волн. Ее значения связаны с коэффициентом волновой конвекции и классической утечки плазмы, призванными выравнивать неоднородность плотности плазмы, уменьшить градиент ее плотности и тем самым устранить причину, вызывающую неустойчивость дрейфовых волн (здесь играет роль баланс между притоком плазмы и ее уходом из системы, или распадом плазмы). Однако, чем объяснить небольшие изменения амплитудной функции при изменении q_κ в довольно широких пределах? В работе [6] указано, что без температурных возмущений универсальность значений амплитудной функции обязана своим происхождением обнаруженному в этой работе механизму нелинейной стабилизации неустойчивых в линейной теории столкновительных дрейфовых волн посредством перекачки энергии в затухающие вторые гармоники (если так, на языке перекачки энергии, можно изъясняться в отношении неравновесных процессов в открытой нелинейной диссипативной системе).

При включении температурных возмущений для объяснения универсальности значений амплитудной функции из способа ее вычисления представляются подходящими следующие соображения. Стабилизирующее взаимодействие двух гармоник выражено коэффициентом $\text{Re } w_{mm}^v$, определяемом формулой (114). Этот коэффициент представляет собой отношение двух полиномов второй степени относительно q_κ . Значения коэффициентов этих полиномов разнятся не сильно, как разъяснено ранее. Однако с учетом температурных возмущений коэффициенты при степенях полинома приобретают слагаемые, являющиеся функциями ограниченной вариации от y_N или q_κ (см., например, вносимые изменения в подчеркнутых членах и добавочные слагаемые в формуле (A.9), а также пояснения к ней). Различные предельные значения амплитудной функции при $q_\kappa \ll 1$ и $q_\kappa \gg 1$ получаются при разложении коэффициентов полинома по степеням q_κ и $1/q_\kappa$ с сохранением линейных членов по малым параметрам. Это и служит причиной небольших вариаций амплитудной функции.

Таким образом, малые значения параметра надкритичности в условиях эффекта перестройки

волн, полученные значения амплитудной функции и характер ее зависимости от комбинированного параметра плотности, температуры и магнитного поля q_κ могут объяснить широкий круг экспериментов, в которых наблюдался эффект перестройки волн и уровень вариации амплитуды плотности заключался в пределах 10-20 %.

Автор выражает искреннюю благодарность С.С. Моисееву за постановку задачи о влиянии возмущений электронной температуры на нелинейные режимы ДД неустойчивости и многочисленные обсуждения, С.В. Пелетминскому за полезные обсуждения, Ю.П. Пересунько и И.Н. Шаповалу, выполнившими компьютерные вычисления.

Приложение А. Нелинейные матричные элементы.

Квадратичные матричные элементы

Нелинейные члены основного уравнения для волн (24) имеют вид

$$\mathcal{NL}(\kappa) = \lambda_1(\kappa)N_1(\kappa) + \lambda_3(\kappa) \times \left[y_e \eta_\beta(\kappa)N_2(\kappa) + N_{3\beta}(\kappa) + i \frac{n^2 B}{\omega_\theta} N_4(\kappa) \right], \quad (\text{A.1})$$

где выражения для нелинейных членов $N_1(\kappa)$ и $y_e N_2(\kappa)$ приведены формулах в работе [6] и в (49)–(53), (29) и (31). Здесь также использованы соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_2(\kappa) &= \lambda_3(\kappa)y_e \eta_\beta(\kappa) \approx in^2 Y_\kappa \equiv in^2(y_N + Bf_\kappa), \\ y_N &\equiv y_e \omega_{ne}/n^2, \\ \lambda_4(\kappa) &= -n^2 B \omega_{ne}/\omega_\theta \equiv -n^2 B f_\kappa. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

В коэффициенте $\eta_\beta(\kappa)$ пренебрежено слагаемыми конечного давления, $\sim \beta_k$, и $\omega_{Te} = 0$. В качестве нелинейности $N_{3\beta}(\kappa)$ взяты квадратичные и кубические члены, задаваемые выражениями (47) и (48). Такое представление нелинейных членов пригодно как для вычисления квадратичных матричных элементов, связывающих кратные гармоники, так и для вычисления коэффициентов связи с нуль-

частотными модами. В нелинейном матричном элементе

$$V(0, \bar{m}') = 2mk_x \sim b^0 \sim 1, \quad (\text{A.3})$$

описывающем нелинейное взаимодействие двух дрейфовых волн через продольную 0-частотную моду, то есть процесс $m = \bar{m}' + 0_{\parallel}$, вклад нелинейных членов $N_{3\beta}(\kappa), N_4(\kappa)$ пренебрежимо мал, так как они являются величинами порядка $\mathcal{O}(b_{\kappa})$. Эти же нелинейные члены не дают вклад в нелинейные матричные элементы, описывающие процессы слияния двух волн в нуль-частотную моду с равным нулю продольным волновым числом. Например, в элементе $V(m, \bar{m})$, вводящем биения двух волн в виде сторонней силы в уравнение для эволюции поперечной нуль-частотной ячейки $0_{\perp} \equiv (2m, 0, 2k_x)$, отсутствует вклад нелинейностей $N_{3\beta}(\kappa), N_4(\kappa)$. (Здесь трехмерные волновые векторы обозначаются номером "азимутальной" компоненты: $m = (m, n, k_x)$, $\bar{m}' = (m, -n, -k_x)$, $\bar{m} = (m, -n, k_x)$, $0_{\parallel} = (0, 2n, 2k_x)$).

В формуле (A.3) приведен матричный элемент, используемый при исследовании устойчивости доминирующей волны по отношению к возбуждению продольной нуль-частотной моды. Вычислим второй матричный элемент $V(m, -\bar{m}')$, необходимый для исследования этой устойчивости и характеризующий процесс слияния двух волн в продольную нуль-частотную моду $m - \bar{m}' = 0_{\parallel}$. Для этого процесса коэффициент $\lambda_1(0_{\parallel}) = -(4n^2 + 4y_e b \eta k_x^4)$, все остальные коэффициенты малы, $\lambda_j(\kappa)|_{\kappa=0_{\parallel}} \sim \mathcal{O}(b_{k_x})$ для $j = 2, 3, 4$. Так как $\bar{U}_j(\kappa', \kappa'') \sim \mathcal{O}(b_{k_x})$, $j > 1$, то в вычисляемый матричный элемент дает вклад только первое уравнение. Для большой нелинейности первого уравнения, представляющей вклад электрического дрейфа с нелинейным коэффициентом $U_{11}(\kappa', \kappa'') = k_x' m'' - k_x'' m'$, дает вклад часть нормальной функции $\xi_m - \xi_{m'} \approx 2i(1+t_i)b_{\kappa}\eta_{\kappa}/\omega_{ne}$. Вычисления дают (в квадратных скобках помечено, вклад каких нелинейных коэффициентов вычисляется):

$$\begin{aligned} V^{(1)}(m, -\bar{m}') [U_{11}] &= -\lambda_1(0_{\parallel}) i 4 m k_x \times \\ &\quad (1+t_i) b_{\kappa} \eta_{\kappa} / \omega_{ne}, \\ V^{(1)}(m, -\bar{m}') [\bar{U}_1 - U_{11}] &= -\lambda_1(0_{\parallel}) \times \\ &\quad (1+t_i) b \eta 4 k_1^2 (2k_{\perp}^2 + k_1^2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Важно отметить, что последнее выражение представляет собой результат регуляризации теории возмущений посредством учета $\partial \xi_{\kappa'} / \partial x$. В результате получаем

$$V(m, -\bar{m}') = -16n^2(1+t_i)b\eta \times \left\{ i \frac{mk_x k_{\perp}^4}{\omega_{ne}} + k_1^2(2k_{\perp}^2 + k_1^2) \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Таким образом, в главном приближении по малому параметру b_{κ} температурные возмущения не дают

вклад в вычисленные коэффициенты и результаты проведенного ранее [7] анализа устойчивости доминирующей волны не изменяются. А именно, доминирующая волна устойчива по отношению к возбуждению продольных конвективных ячеек.

Квадратичный элемент возбуждения второй гармоники $V(\kappa, \kappa)$ получается из квадратичных нелинейностей $Q(\kappa)$, в которых взяты слагаемые с волновыми векторами $\vec{k}' = \vec{k} \equiv (m, n, k_x)$, $\vec{k}'' = \vec{k}$ и с аналогичным выбором частот. Он состоит из суммы вкладов нелинейных матричных элементов каждого уравнения:

$$\begin{aligned} V(\kappa, \kappa) &= \sum_{j=1}^4 V_j(\kappa, \kappa), \\ V_j(\kappa, \kappa) &= \lambda_j(2\kappa)(1+t_i)\bar{U}_j(\kappa, \kappa). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Для слагаемых с $j = 1, 2$ вычисления $\bar{U}_{1,2}(\kappa, \kappa)$ приведены в работе [6] и изменения состоят только в новых значениях коэффициентов $\lambda_1(2\kappa)$ и $\lambda_2(2\kappa)$, приведенных в формуле (25). В слагаемом с $j = 3$ квадратичные члены даются формулами (48) и (30). В последнем слагаемом с $j = 4$ коэффициенты $\bar{U}_4(\kappa, \kappa)$ находятся из формул (35)–(37). Всюду в нелинейных членах необходимо поставить $\xi_{\kappa}^{(1)} = a_{\kappa} i \omega_{\xi} / \lambda_3(\kappa) \approx a_{\kappa}(1+t_i)$. Вычисления дают следующие значения отдельных слагаемых

$$\begin{aligned} V_1(\kappa, \kappa) &= -4n^2(1+t_i)b_{\kappa}\eta_{\kappa}(\omega_m/\eta_{\kappa} - \\ &\quad 6 - 2Z^2), \\ Z &= (k_x^2 - m^2)/k_{\perp}^2, \\ V_2(\kappa, \kappa) &= i8n^2(1+t_i)Y_{2\kappa}b_{\kappa}\eta_{\kappa}(i\omega_m/\eta_{\kappa} - \\ &\quad 3 - Z^2), \\ V_3(\kappa, \kappa) &= (1+t_i)n^2 4Bb_{\kappa}\omega_{\kappa}/\omega_{\theta}, \\ V_4(\kappa, \kappa) &= (1+t_i)n^2 b_{\kappa}\eta_{\kappa} 4Bf_{2\kappa} \times \\ &\quad \left[\frac{\omega_{\kappa}}{\eta_{\kappa}} \frac{Bn^2 \chi_{\parallel}}{\omega_{\theta}} \left(1 + \frac{3\omega_{ne}}{2\omega_{\theta}} \right) + \right. \\ &\quad \left. B \frac{3\omega_{ne}}{2\omega_{\theta}} + i \frac{\omega_{\kappa}}{\eta_{\kappa}} (1+B) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

В результате введения кратких обозначений

$$f_{\kappa} = \omega_{ne}/\omega_{\theta}, \quad \chi_{\kappa} = n^2 \chi_{\parallel} / \omega_{\theta}, \quad g_{\kappa} = \omega_m / \eta_{\kappa} \quad (\text{A.8})$$

получаем для суммы этих коэффициентов

$$\begin{aligned} V(\kappa, \kappa) &= 4n^2(1+t_i)b_{\kappa}\eta_{\kappa} \times \\ &\quad \left\{ \frac{-ig_{\kappa}(1+2Y_{2\kappa}) + 2(3+Z^2)(1-iY_{2\kappa})}{\omega_{\theta}} + \right. \\ &\quad \left. iBf_{\kappa}(g_{\kappa}+i) + Bf_{2\kappa} \left[(g_{\kappa}+i)B\chi_{\kappa} \left(1 + \frac{3}{2}f_{\kappa} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{3}{2}f_{\kappa} + i(1+B)(g_{\kappa}+i) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Если совершить замену $2Y_{2\kappa} \rightarrow y_N$, которая справедлива, если формально положить $B = 0$, то первые два подчеркнутые слагаемые в фигурной скобке — прежний результат нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости, не включающей возмущений электронной температуры. Остальные слагаемые получены в результате учета температурных возмущений.

О влиянии температурных возмущений на значения матричных элементов сделаем следующее замечание. Если считать основным параметром $y_N = y_e \omega_{ne} / n^2$ (он связан с остальными параметрами посредством тождественного соотношения $y_N^2 \equiv p_N q_\kappa$), то введенные обозначения функций (A.8) приводят к следующим выражениям

$$f_\kappa = \frac{y_N}{1.5r y_N + i\gamma}, \quad \chi_\kappa = \frac{\gamma}{1.5r y_N + i\gamma} \equiv \frac{\gamma}{y_N} f_\kappa, \quad r = \frac{\omega_m}{\omega_{ne}}. \quad (\text{A.10})$$

Таким образом, модули функций f_κ, χ_κ и их вещественные и мнимые части являются функциями ограниченной вариации при изменении y_N в пределах $(-\infty, \infty)$. Уже поэтому можно предположить, что учет температурных возмущений качественно не изменяет зависимости нелинейных матричных элементов от параметров, в отличие от линейной пороговой теории (на самом деле, слабые изменения претерпевают зависимости амплитудной функции и существенные — параметр надкритичности).

Аналогично вычисляется нелинейный матричный элемент связи второй и первой гармоник дрейфовой столкновительной волны, вносящий вклад биений первой и второй гармоник в уравнение первой гармоники. Вычисление его более громоздко, чем приведенные для элемента (A.9), поэтому, опуская вывод, приведем сразу матричный элемент полностью

$$V(2\kappa, -\kappa) = n^2(1 + t_i) b_\kappa \eta_\kappa \times \left\{ g_\kappa \left(2i - 5Y_\kappa \right) - 33 + 16Z^2 - 2iY_\kappa \left(-3 + 8Z^2 \right) + \right. \\ \left. B \left[2ig_\kappa(2f_{2\kappa} + f_\kappa^*) - 8f_{2\kappa} + 2f_\kappa^* \right] + \right. \\ \left. Bf_\kappa \left[8B(g_\kappa + i2)\chi_{2\kappa} \left(1 - \frac{3}{4}f_{2\kappa} \right) + B(g_\kappa - i)\chi_\kappa^* (1 - 3f_\kappa^*) - \right. \right. \\ \left. \left. 3B(4f_{2\kappa} + f_\kappa^*) + ig_\kappa(7B - 2) - 17B + 10 \right] \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Используемый здесь символ * означает комплексное сопряжение функции, верхним индексом возле которой он стоит. Подчеркнутые слагаемые, приведенные здесь без учета условия пороговости, получены из уравнений (10), (11) и совпадают с матричными элементами работ [15] и [6], если формально положить $B = 0$ и воспользоваться в них условием пороговости.

Приложение Б. Нелинейное самовоздействие дрейфовых волн

Обратимся к вычислению самой громоздкой нелинейности уравнения температуропроводности. Регуляризованные кубичные нелинейности состоят из четырех слагаемых, описываемых формулами (42)-(45). При этом только нелинейные члены собственных нелинейных членов уравнения (13) выражены в явном виде через амплитуду нормальных колебаний (43) с учетом простого соотношения для $\xi_\kappa^{(1)}$ работы [6]:

$$\xi_\kappa^{(1)} = a_\kappa \omega_\xi / \lambda_2(\kappa), \quad \lambda_2(\kappa) = \omega_{ne} - b_\kappa(\omega_m + i\eta_\kappa). \quad (\text{B.1})$$

Слагаемые, полученные в результате регуляризации, имеют вид $\sum_{\vec{k}'} a_{\kappa'} Q_j(\kappa')|_{\kappa' = \kappa - \kappa'}$. Квадратичные нелинейности $Q_j(\kappa')$ отражают вклад в волну с четырехмерным волновым вектором κ' биений двух волн с четырехмерными волновыми векторами κ'' и $\kappa' - \kappa''$.

Для получения нелинейного самовоздействия волны учитывается только процесс $\kappa = \kappa' + \kappa''$ с $\kappa' = 2\kappa$ и $\kappa'' = -\kappa$ (напомним, что $\kappa = (\omega, \vec{k})$ обозначает четырехмерный волновой вектор, включающий и частоту). Остальные процессы либо дадут вклад в кубичное нелинейное воздействие волны 2κ на волну κ ($\kappa' = -\kappa, \kappa'' = 2\kappa$), а им пренебрегают; либо в уравнениях для определения нормальных функций, например, в уравнении для некоторой нуль-частотной моды $L_\xi(0)\xi_0 = N_\xi(0) \neq 0$, величина ξ_0 не может быть найдена по альтернативе Фредгольма. В этом приближении нормальные функции $\xi_0, a_{||0}, \theta_0$ являются собственными функциями с нулевыми собственными значениями линейного оператора $L_\xi(0)$ уравнения, которое их определяет. (Степени свободы с такими, выродженными свойствами, не позволяющими перейти к нормальным координатам, требуют составления отдельных эволюционных уравнений для векторов нулевого подпространства линейного оператора.) И, наконец, слагаемые со значениями $\kappa' = \kappa, \kappa'' = (0; 0, 0, 0)$ не могут быть получены в результате регуляризации по отмеченной выше причине (для них нельзя перейти к нормальным координатам). Они соответствуют линейному приближению, уже учтенному в уравнениях.

Таким образом, необходимо вычислить $Q_j(2\kappa)$ $j = 2, 4$. Вычисления дают

$$Q_2(2\kappa) = 2(1 + t_i) b_\kappa \eta_\kappa a_\kappa^2 \left[i \frac{\omega_m}{\eta_\kappa} - 3 - Z^2 \right], \quad (\text{B.2}) \\ Z = (k_x^2 - m^2) / k_\perp^2,$$

$$Q_4(2\kappa) = -(1+t_i)b_\kappa\eta_\kappa a_\kappa^2 \left\{ 2B \left(i \frac{\omega_m}{\eta_\kappa} - 3 - Z^2 \right) - \left[\frac{\omega_\kappa}{\eta_\kappa} \frac{Bn^2\chi_{\parallel}}{\omega_\theta} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{n\epsilon}}{\omega_\theta} \right) + \frac{3}{2} Bf_\kappa + i \frac{\omega_\kappa}{\eta_\kappa} (1+B) \right] \right\}. \quad (B.3)$$

Напомним, что a_κ является амплитудой нормальных колебаний.

Для вычисления $C_{43}(\kappa)$ надо найти производную от выше приведенных квадратичных нелинейностей. При этом дифференцируем неоднородную плотность, содержащуюся в частоте соударений и входящую в параметры η и y_e : $\partial(y_e, \eta)/\partial x = \nu'_{0x}(y_e; \eta)$. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} (BQ_2 + Q_4)(2\kappa) = \nu'_{0x} \xi_\kappa^{(1)} a_\kappa b_\kappa \eta_\kappa \times \left\{ \frac{B\omega_{n\epsilon}}{\omega_\theta} \left[\frac{n^2\chi_{\parallel}}{\omega_\theta} \left(\frac{\omega_\kappa}{\eta_\kappa} \frac{\omega_\theta^*}{\omega_\theta} - i2 \right) - 1 \right] + 1 + B - i \frac{Bn^2\chi_{\parallel}}{\omega_\theta} + \frac{3}{2} \frac{\omega_m}{\eta_\kappa} \omega_\kappa \frac{Bn^2\chi_{\parallel}}{\omega_\theta^2} - 2B(3+Z^2) \right\}. \quad (B.4)$$

Используя формулы (45), (47) и выше приведенные выражения (147), (B.4), для двух слагаемых кубического нелинейного самовоздействия получаем выражение

$$(C_{43} + C_{44})(\kappa) = -(1+t_i)b_\kappa a_\kappa |a_\kappa|^2 \eta_\kappa n^2 \chi_{2\kappa} \times \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} f_{2\kappa} \right) \left[2B(g+i(3+Z^2)) + \left[\frac{3}{2} Bf(1+\chi(g+i)) + (g+i)(i(1+B)+B\chi) \right] \right] + \frac{1}{4} \left[Bf \left[-i(1+2f) + (g+i)f \left(\frac{f}{f^*} + \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{y_N}{\gamma} \left(1 - 5B + 2BZ^2 - Bf \right) \right] \right\}, \quad (B.5)$$

где использованы краткие обозначения, приведенные в формулах (A.8), и опущен нижний индекс у величин

$$\chi \equiv \chi_\kappa, \quad f \equiv f_\kappa, \\ g \equiv g_\kappa, \quad f_{2\kappa} = \frac{2\omega_{n\epsilon}}{\omega_\theta(2\kappa)}, \quad \chi_{2\kappa} = \frac{4n^2\chi_{\parallel}}{\omega_\theta(2\kappa)}, \quad (B.6)$$

что не создает противоречия с формулами (59) и (99) в силу дальнейшего предположения $r = 1$. При помощи формул (42) и (147) аналогично находим

$$C_{42} = -(2B-1)a_\kappa |a_\kappa|^2 (1+t_i)b_\kappa \eta_\kappa \times (ig_\kappa - 3 - Z^2). \quad (B.7)$$

Кубическое самовоздействие волны от собственных нелинейностей уравнения температуропроводности

(13) находится из формулы (43) посредством исключения нормальной функции тока. В результате получаем

$$C_{41}(\kappa) = a_\kappa |a_\kappa|^2 (1+t_i)b_\kappa \eta_\kappa \frac{1}{2} \left\{ B|\chi_\kappa|^2 \left[3 \left(\frac{3}{2} g \frac{y_N}{\gamma} + 1 \right) - g \left(\frac{3}{2} \frac{q_\kappa}{\gamma} - 1 \right) \right] + ig(2+B) - 3B + 2 \right\}. \quad (B.8)$$

Самовоздействие, происходящее от нелинейностей, заключенных в уравнениях (10) и (11), легко вычисляется посредством примененной выше процедуры. Введем коэффициент нелинейного сокращенного самовоздействия, применяемого далее. Выбирая из нелинейных членов (A.1) основного уравнения для волн слагаемые самовоздействия, определим сокращенный коэффициент при помощи формулы

$$s(\kappa) = \text{CubicNL}(\kappa) / \left[n^2 a_\kappa |a_\kappa|^2 (1+t_i)b_\kappa \eta_\kappa \right] = \sum_{j=1}^4 s_j(\kappa). \quad (B.9)$$

Последнее равенство представляет собой вклад в самовоздействие волны каждого из четырех исходных уравнений. Приведем сокращенные коэффициенты самовоздействия как для выписанных нелинейных членов, так и для не выписанных:

$$s_1(\kappa) + s_2(\kappa) = -\frac{7}{2} + 8Z^2 + i2Y_\kappa(1-8Z^2), \quad (B.10)$$

$$Y_\kappa = y_N + iBf_\kappa,$$

$$s_3(\kappa) = \frac{1}{2} f_{2\kappa} \left\{ ig_\kappa(B-1) - 5B + 1 - 2BZ^2 - \chi_\kappa \left[\frac{3}{2} \frac{y_N}{\gamma} + B(g+i) \left(1 + \frac{3}{2} f \right) \right] \right\}, \quad (B.11)$$

$$s_4(\kappa) = \sum_{j=1}^4 s_{4j}, \quad (B.12)$$

$$s_{42} = B(2B-1)f(ig-3-Z^2),$$

$$s_{41}(\kappa) = -Bf \frac{1}{2} \left\{ B|\chi_\kappa|^2 \left[3 \left(\frac{3}{2} g \frac{y_N}{\gamma} + 1 \right) - g \left(\frac{3}{2} \frac{q_\kappa}{\gamma} - 1 \right) \right] + ig(2+B) - 3B + 2 \right\}, \quad (B.13)$$

$$(s_{43} + s_{44})(\kappa) = Bf\chi_{2\kappa}S. \quad (B.14)$$

Отметим, что в вышеприведенных формулах нижние индексы κ у величин f, g, χ опущены, а величина S совпадает с выражением, стоящим в общих фигурных скобках формулы (B.5). Здесь применяются сокращенные обозначения (A.10) и (B.6).

Для исследования уровня амплитуды доминирующей волны понадобится выражение для дисперсионной функции второй гармоники этой волны. Дисперсионная функция определяется форму-

лой (26) и иные ее выражения с выделенными мнимой и вещественной частями приведены в формулах (70), (71) и (72). Ее можно представить через функции ограниченной вариации (A.10). Выполним преобразование волнового вектора и частоты $\kappa \rightarrow 2\kappa$, тогда параметры претерпят замену: $y_N(2\kappa) = y_N/2$, $b_{2\kappa} = 4b_\kappa$, $q_{2\kappa} = q_\kappa$. Введем обозначение для масштабированной на множитель $(1 + t_i)\eta_\kappa b_\kappa n^2$ дисперсионной функции

$$d_{2\kappa} = D_{2\kappa} / [(1 + t_i)\eta_\kappa b_\kappa n^2]. \quad (B.15)$$

Нетрудно получить значение $d_{2\kappa}$ из выражений (71) и (72) Тогда, учитывая пороговые значения параметров, следующие из условия нахождения на пороге неустойчивости основной волны $d_\kappa = d'_\kappa + id''_\kappa = 0$, в частности, отличие закона дисперсии от линейной по k_y зависимости

$$\Delta\omega_m^L = -b_\kappa(1 + t_i)\omega_{ne} \times \left(1 + q_\kappa + \frac{3}{2}B^2|f_\kappa|^2 + B^2\frac{q_\kappa}{\gamma}|\chi_\kappa|^2 \right). \quad (B.16)$$

В приведенных выше обозначениях получаем выражение для реальной части дисперсионной функции второй гармоники:

$$d'_{2\kappa} = 16 \left[\frac{y_N^2}{q_\kappa} + 4B^2|f_{2\kappa}|^2 \left(\frac{\gamma}{g_\kappa} - \frac{3}{2} \right) - 1 \right]. \quad (B.17)$$

Влияние непотенциальности и градиентом невозмущенной электронной температуры пренебрегают. Аналогично, учитывая рассогласовку частоты второй гармоники в виде соотношения $\Delta\omega_{2\kappa}^L = 2\Delta\omega_\kappa^L$, следующего нелинейного условия синхронизма первой и второй гармоник в пределах точности принимаемых предположений, и подставляя эту рассогласовку в дисперсионную функцию находим

$$d''_{2\kappa} = 8\frac{\omega_{ne}}{\eta_\kappa} \left\{ 3(1 + q_\kappa) + B^2 \left[\frac{3}{2}(4|f_{2\kappa}|^2 - |f_\kappa|^2) \times \frac{q_\kappa}{\gamma}(4|\chi_{2\kappa}|^2 - |\chi_\kappa|^2) \right] \right\}. \quad (B.18)$$

Список литературы

- [1] Моисеев С.С., Сагдеев Р.З. О коэффициенте диффузии Бома // ЖЭТФ. - 1963. - Т. 44. - С. 763.
- [2] Моисеев С.С., Сагдеев Р.З. Влияние конечной проводимости на устойчивость плазмы в магнитном поле // ЖТФ. - 1964. - Т. 34. - С. 248-253.
- [3] Заславский Г.М., Моисеев С.С. Об аномальной диффузии плазмы в магнитном поле // ЖТФ. - 1964. - Т. 34. - С. 410-418.
- [4] Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы // - М.: Атомиздат. Вопросы теории плазмы. - 1964. - Вып 4. - С. 188-339.
- [5] Рухадзе А.А., Силин В.П. Кинетическая теория дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы // УФН. - 1968. - Т. 96. - С.87.
- [6] Водяницкий А.А. Нелинейные дрейфово-диссипативные структуры в плазме. I. // Электромагнитные явления. - 1998. - Т. 1, N 2. - С. 254-283.
- [7] Водяницкий А.А. Устойчивость дрейфово-диссипативных структур и аномальный перенос плазмы. II. // Электромагнитные явления. - 1998. - Т. 1, N 2. - С. 283-297.
- [8] Deng B.H., Brower D.L., Cima G., Domier C.W., Luhmann N.C., Jr., Watts C. Mode structure of turbulent electron temperature fluctuation in Texas Experimental Tokamak Upgrade. // Phys. of Plasmas. - 1998. - V. 5, N 12. - P. 4417-4120.
- [9] Chu T.K., Hendel H.W., Politzer P.A. Measurement of enhanced plasma losses caused by collisional drift waves. // Phys. Rev. Lett. - 1967. - V. 19. - P. 1110-1113.
- [10] Hendel H.W., Chu T.K., Politzer P.A. Method of Experimental Physics, ed. H.R. Griem, R.H. Lovberg. Academic Press. N.-Y., London. - 1970. - V. 9, Part A. - P. 377.
- [11] Ellis R.F., Motley R.W. Current-driven Collisional Drift Instability // Phys. Fluids. - 1974. - V. 17. - P. 582-594.
- [12] Monticello D.A., Simon A. Nonlinear Theory of the Collisional Drift-Wave Instability // Phys. Fluids. - 1974. - V. 17. - P. 791-802.
- [13] Водяницкий А.А. О нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы. I. // Препринт ХФТИ АН УССР. ХФТИ 78-40. - Харьков. - 1978. - С. 1-34.
- [14] Tur A.V., Chechkin A.V., Yanovsky V.V. Negative Viskosity and Generation of Dissipative Solitons And Zonal Dissipative Structures // Phys. Fluids B. - 1992. - V. 4, No. 11. - P. 3513-3521.
- [15] Водяницкий А.А. О нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы. II // Препринт ХФТИ АН УССР. ХФТИ 79-28. - Харьков: - 1979. - С. 1-29.
- [16] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука. ГРФМЛ. - 1974. - 503 с.

- [17] Nemov V.V. The hydrodynamics of collisional plasma in a strong inhomogeneous magnetic field // Nucl. fusion. - 1970. - V. 10. - P. 19.
- [18] Mikhailovskii A.B., Tsipin V.S. Transport equation and gradient instabilities in a high pressure collisional plasma // Plasma Phys. - 1971. - V. 13. - P. 785.
- [19] Mikhailovskii A.B. Drift wave stability under linear theta-pinch conditions // Nucl. Fusion. - 1972. - V. 12. - p. 55
- [20] Наумовец В.Г., Пасечник Л.Л., Попович С.А. Исследование дрейфово-диссипативной неустойчивости в ограниченной газоразрядной плазме // ЖТФ. - 1972. - Т. 42. - С. 270.
- [21] Hendel H.W., Chu T.K., Politzer P.A. Collisional drift waves — identification, stabilization and enhanced plasma transport // Phys. Fluids. - 1968. - V. 11. - P. 2426-2439.
- [22] Tsai S.T., Perkins F.W., Stix T.H. Thermal Conductivity and Low Frequency Waves in Collisional Plasmas // Phys. Fluids. - 1970. - V. 13. - P. 2108-2114.
- [23] Lewandowski J.L.V. Collisional drift waves in stellarator geometry // Phys. Plasmas. - 1997. - V. 4, N 11. - P. 4023-4030.
- [24] Водяницкий А.А., Моисеев С.С. Нелинейный стационарный режим дрейфово-диссипативной неустойчивости с учетом температурных возмущений // В сб. Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. - Ч. 1. Изд-во Наукова думка. - Киев. - 1983. - С. 293-297.
- [25] Musher S.L., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. Weak Langmuir Turbulence // Phys. Reports. - North Holland. - 1995. - V. 252, N 4. - P. 177-274.
- [26] Vodyanitskii A.A., Moiseev S.S. Nonlinear Drift-Dissipative Structures in a Plasma // Proceedings of Contributed Papers of International Conference On Plasma Physics. - Kiev: Naukova Dumka. - 1987. - V. 4. - P. 103-106.
- [27] Mattor N., Diamond P.H. Drift wave propagation as a source of plasma edge turbulence: Slab theory // Phys. Plasmas. - 1994. - V. 1, N. 12. - P. 4002-4013.
- [28] Hiroe S., Kunibe J., Akiyama H. Disruption of Mirrow Plasma Induced by Resistive Drift Instability // 10-th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. - 1981. September. - Moscow, USSR. - V. I. Contributed Papers.