УДК 517.968.519.6

Гандель Ю.В.*, Полянская Т.С.**
*Харьковский Национальный Университет им. В.Н. Каразина
61077, Украина, Харьков, пл. Свободы, 4
e-mail: Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua
**Национальный Технический Университет "ХПИ"
61055, Украина, Харьков, ул. Фрунзе, 21

Обоснование численного решения сингулярного интегрального уравнения задач дифракции на многоэлементных решетках

Содержание

Abstract

Diffraction problems for electromagnetic waves on gratings, which consist of finite number of thing ideally conducting straps as well as on multiunit periodical gratings can be reduced to a singular integral equation of the first kind on a system of segments. In the paper a strict justification of the numerical method of solution for this equation is given, the estimates of the rate of convergence of the found solutions to exact ones and of approximate values of functionals in the solutions to exact values are obtained. These functionals are expressions of physical variables. Which characterize the scattered field.

1. Введение

В статьях [1–4] было показано, что задачи дифракции электромагнитных волн как на ограниченных решетках, состоящих из конечного числа тонких идеально проводящих лент, так и на многоэлементных периодических решетках приводят к сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{F(\xi)}{\xi - x}d\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_L K(x,\xi)F(\xi)d\xi = f(x), \quad x \in L, \quad (1)$$

где $f(x)$, $x \in \overline{L}$; $K(x,\xi)$, $x \in \overline{L}$, $\xi \in \overline{L}$ – гладкие функции; $L = \bigcup\limits_{q=1}^{m}(a_q, b_q)$, $-\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_m < < b_m < +\infty$. А функция $F(\xi)$, $\xi \in L$ ищется в классе функций, ограничение которых на интервал (a_q, b_q):

$$F_q(\xi) \equiv F(\xi), \quad a_q < \xi < b_q, \quad q = 1, 2, \ldots, m$$

в соответствии с условием на ребре представимо в виде

$$F_q(\xi) = \frac{\nu_q(\xi)}{\sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}}, \quad a_q < \xi < b_q,$$

где $\nu_q(\xi)$, $\xi \in [a_q, b_q]$ – гладкая функция.

Искомая функция удовлетворяет одному из двух типов дополнительных условий: как в случае -поляризации, так и в случае -поляризации для периодических решеток, а также в случае H-поляризации для ограниченных решеток это условия вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_p}^{b_p} F(\xi)d\xi = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

В случае же E-поляризации для ограниченных решеток имеем условия более общего вида [1]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L} S_p(\xi)F(\xi)d\xi = C_p, \quad p = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

где $S_p(\xi)$, $\xi \in [a_p, b_p]$ – заданная функция, а C_p – заданная константа.

Численное решение уравнения (1) с дополнительными условиями (2) было предложено в [5]: сингулярное интегральное уравнение на системе интервалов сводится к системе сингулярных интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1, 1)$, приближенное решение которой находится с использованием квадратурных формул интерполяционного типа, получена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному в равномерной метрике. Обоснование приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода на стандартном отрезке с дополнительным условием (2) при $m = 1$ с оценкой скорости сходимости приближенного решения к точному в метрике пространства $L_{2,\rho}(-1, 1)$, $\rho = (1 - t^2)^{-1/2}$ было дано в [6]. А оценка скорости сходимости приближенного решения системы сингулярных интегральных уравнений на стандартном отрезке с дополнительными условиями (2) при любом m в метрике соответствующего гильбертова пространства была получена в [7].

В настоящей работе граничное интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром на системе интервалов, которое сводится к системе таких уравнений на стандартном отрезке, приведена к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями (3) на стандартных отрезках и дано строгое обоснование численного метода ее решения с использованием квадратурных формул интерполяционного типа. Получена оценка скорости сходимости найденного приближенного решения к точному в метрике соответствующего гильбертова пространства и даны оценки отклонений приближенных значений от точных при вычислении функционалов от решений рассматриваемой системы уравнений. Эти функционалы — выражения для физических характеристик дифрагированных полей.

2. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на отрезке с общим дополнительным условием

Рассматривается уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q(t,\tau)u(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = g(t), \quad |t| < 1 \tag{4}$$

относительно неизвестной функции $u(\tau)$. Заданные функции $g(t)$ и $Q(t,\tau)$ принадлежат $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ ($Q(t,\tau)$ – по каждой из переменных равномерно относительно другой). $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ – класс функций на $[-1, 1]$ μ раз непрерывно дифференцируемых, μ-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ ($\mu \geq 1$, $0 < \gamma \leq 1$).

Кроме того, предполагается, что

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \neq \ln 2.$$

В соответствии со сказанным выше уравнение (4) предполагается однозначно разрешимым.

Произведем в уравнении (4) замену $u(\tau) = \nu(\tau) + C$, где C – равна

$$C = \frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{1}^{-1} g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \ln 2},$$

после чего, с учетом того, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\ln 2, \tag{5}$$

получим эквивалентное ему уравнение относительно неизвестной функции $\nu(\tau)$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q(t,\tau)\nu(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = g(t) + C\left(\ln 2 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right). \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение (6) по t, получаем уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q(t,\tau)\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g'(t),\quad |t|<1.\quad (7)$$

Интегрируя уравнение (6) по t с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ по отрезку $[-1,1]$, получаем дополнительное условие

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right\}\times\nu(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0.\quad (8)$$

Уравнение (7) с дополнительным условием (8) эквивалентно исходному уравнению (4).

Переходим к дискретизации задачи (7),(8). Пусть $\left(F_n^{(1)}f\right)(t)$ — интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$ для функции $f(t)$ с узлами интерполирования $t_k^{(1,n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k=1,\ldots,n$; $\left(F_{n-1}^{(2)}f\right)(t)$ – интерполяционный полином Лагранжа степени $n-2$ с узлами $t_j^{(2,n)}=\cos\frac{j}{n}\pi$, $j=1,\ldots,n-1$.

Приближенное решение $\nu_n(\tau)$ задачи (7),(8) ищем в виде $\nu_n(\tau)\equiv\left(F_n^{(1)}\nu_n\right)(\tau)$ из уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_n(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}\partial_t Q\right)(t,\tau)\frac{\nu_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=\frac{C}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n-1,t}^{(2)}F_{n\tau}^{(1)}\partial_t Q\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-\left(F_{n-1}^{(2)}g'\right)(t),\qquad |t|<1\quad (9)$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{nt}^{(1)}F_{n\tau}^{(1)}Q\right)(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]\times\nu_n(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0.\quad (10)$$

Рассматривая уравнение (9) в точках $t=t_j^{(2,n)}$, $j=1,\ldots,n-1$, получаем систему $n-1$ уравнений. Вычисляя в них, а также в дополнительном условии (10) интегралы с помощью квадратурных формул интерполяционного типа, получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно значений $\nu_n(\tau)$ в узлах интерполирования:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{t_k^{(1,n)}-t_j^{(2,n)}}-\partial_t Q\left(t_j^{(2,n)},t_k^{(1,n)}\right)\right]\times\nu_n\left(t_k^{(1,n)}\right)=\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_t Q\left(t_j^{(2,n)},t_k^{(1,n)}\right)-g'\left(t_j^{(2,n)}\right),\quad j=1,\ldots,n-1,\quad (11)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Q\left(t_l^{(1,n)},t_k^{(1,n)}\right)-\ln 2\right]\times\nu_n\left(t_k^{(1,n)}\right)=0,\quad j=n.\quad (12)$$

Очевидно, система (11),(12) эквивалентна уравнению (9) с дополнительным условием (10).

Переходя к доказательству однозначной разрешимости задачи (9),(10), введем в рассмотрение пары гильбертовых пространств и операторы, действующие в них. (Отметим, что для частного случая — дополнительного условия простейшего вида — доказательство приведено в работе [6].) Пусть: $L_2^{(i)}$ – гильбертово пространство функций на $[-1,1]$ со скалярным произведением $(x,y)_i=\int_{-1}^{1}x(t)\overline{y}(t)\rho_i(t)dt$, $i=1,2$, где $\rho_1(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\rho_2(t)=\sqrt{1-t^2}$; $\Lambda(Q)\subset L_2^{(1)}$ состоит из функций, удовлетворяющих условию (8); $\Lambda(Q_n)\subset L_2^{(1)}$ состоит из функций, удовлетворяющих условию (10); Φ_n – множество всех полиномов, степень которых не превосходит $n-1$; $\Lambda_n(Q_n)=\Lambda(Q_n)\cap\Phi_n$. Для $w(\tau)\in L_2^{(1)}$ введем функционалы

$$\hat{Q}w\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]\times w(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\hat{Q}_n w\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{nt}^{(1)}F_{n\tau}^{(1)}Q\right)(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\ln 2\right]w(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

и операторы

$$(\Gamma w)(t) \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{w(\tau)}{\tau - t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$(Kw)(t) \equiv -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \partial_t Q(t,\tau) w(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$(K_n w)(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \left(F^{(2)}_{n-1,t}F^{(1)}_{n\tau}\partial_t Q\right)(t,\tau)\times$$

$$w(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Кроме того, введем функции

$$f(t) = \frac{C}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \partial_t Q(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - g'(t) \in L_2^{(2)},$$

$$f_n(t) = \frac{C}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \left(F^{(2)}_{n-1,t}F^{(1)}_{n\tau}\partial_t Q\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} -$$

$$\left(F^{(2)}_{n-1}g'\right)(t) \in \Phi_{n-1}.$$

В операторных обозначениях уравнение (7) и дополнительное условие (8) принимают, соответственно, вид

$$(\Gamma + K)\nu = f$$

и

$$\hat{Q}\nu = 0$$

(т.е. $\nu(\tau) \in \Lambda(Q)$), а уравнение (9) с дополнительным условием (10) — вид

$$(\Gamma + K_n)\nu_n = f_n$$

и

$$\hat{Q}_n\nu_n = 0$$

(т.е. $\nu_n(\tau) \in \Lambda_n(Q_n)$).

Оператор $\Gamma + K$ действует из пространства $L_2^{(1)}$ в пространство $L_2^{(2)}$, причем в паре пространств

$$(\Lambda(Q), L_2^{(2)}) \tag{13}$$

оператор Γ непрерывно обратим. Отсюда, а также из однозначной разрешимости задачи (7),(8) следует, что оператор $\Gamma + K$ в паре пространств (13) непрерывно обратим [9].

Далее точно так же, как в [8], доказывается, что оператор $\Gamma + K_n$ непрерывно обратим в паре пространств

$$(\Lambda_n(Q_n), \Phi_{n-1})$$

и, тем самым, доказывается однозначная разрешимость задачи (9),(10).

В доказательстве используются оценки:

1. $|\hat{Q}w - \hat{Q}_n w| \le \dfrac{d}{(n-1)^{\mu+\gamma}}\,\|w\|_{L_2^{(1)}}$;
2. $\|(\Gamma+K) - (\Gamma+K_n)\|_{\Lambda_n(Q_n)\to L_2^{(2)}} \le$ $\le \dfrac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma-1}}$;
3. $\|f - f_n\|_{L_2^{(2)}} \le \dfrac{b}{(n-2)^{\mu+\gamma-1}}$;

где d, B, b – константы, не зависящие от n. Эти оценки получаем, используя теоремы Джексона [10] и свойства гладкости функций $g(t)$ и $Q(t,\tau)$.

Сформулируем окончательный результат.

Существует $N \ge \mu+1$ такое, что при $n > N$ уравнение (9) с дополнительным условием (10), а следовательно, и система (11),(12), имеет единственное решение $\nu_n(\tau)$ и имеет место оценка

$$\|\nu - \nu_n\|_{L_2^{(1)}} \le \frac{S_n}{(n-2)^{\mu+\gamma-1}},$$

где S_n убывает при $n \to \infty$.

Приближенное решение $u_n(\tau)$ уравнения (4) получаем из равенства

$$u_n(\tau) = \nu_n(\tau) + C.$$

3. Система сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши с общим дополнительным условием

Рассматривается система сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln|\tau - t| u_i(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q_{ik}(t,\tau)u_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = g_i(t),$$

$$|t| < 1, \quad i = 1,\dots,m \tag{14}$$

относительно неизвестной вектор-функции $\vec{u}(\tau) = (u_i(\tau))_{i=1}^m$. Заданные функции $g_i(t)$ и $Q_{ik}(t,\tau)$ обладают свойствами гладкости, сформулированными в пункте 2.

В силу вышесказанного система (14) предполагается однозначно разрешимой.

Произведем в системе (14) замену $\vec{u} = \vec{\nu} + \vec{C}$, где $\vec{C} = (C_i)_{i=1}^m$ – решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}[Q_{ik}(t,\tau) - \delta_{ik}\ln 2]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g_i(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad i = 1,\dots,m,$$

(δ_{ik} – символ Кронекера). Предполагается, что функции $Q_{ik}(t,\tau)$ таковы, что определитель этой системы не равен нулю.

В результате указанной замены получаем, с учетом (5), следующую систему

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|\nu_i(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+ \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\nu_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}= g_i(t)+C_i\ln 2-\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad |t|<1, \quad i=1,\ldots,m. \quad (15)$$

Дифференцируя каждое уравнение системы (15) по t, получаем систему

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_i(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}- \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\nu_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}= \sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\partial_t Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-g_i'(t), \quad |t|<1, \quad i=1,\ldots,m \quad (16)$$

Интегрируя все уравнения системы (15) по t с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ по отрезку $[-1,1]$, получаем (с учетом (5)) при выбранных C_i дополнительные условия

$$\hat{Q}_i\vec{\nu}\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\delta_{ik}\ln 2\right]\times \nu_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0, \quad i=1,\ldots,m. \quad (17)$$

Очевидно, система (16) с дополнительными условиями (17) эквивалентна системе (15) и поэтому является однозначно разрешимой.

Приближенное решение задачи (16),(17) ищется в виде вектор-функции $\vec{\nu}_{\overline{n}}(\tau)=(\nu_{kn_k}(\tau))_{k=1}^m$, где $\overline{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_m)$, $n_k\in N$; $\nu_{kn_k}(\tau)$ – интерполяционный полином Лагранжа степени n_k-1 с узлами $\{t_{r_k}^{(1,n_k)}\}$, $r_k=1,\ldots,n_k$.

$\vec{\nu}_{\overline{n}}(\tau)$ ищется из системы сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_{in_i}}{\tau-t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}- \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\nu_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}= \sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n_i-1,t}^{(2)}F_{n_k\tau}^{(1)}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}- \left(F_{n_i-1}^{(2)}g_i'\right)(t), \quad |t|<1, \quad i=1,\ldots,m. \quad (18)$$

с дополнительными условиями

$$\hat{Q}_{i\overline{n}}\vec{\nu}_{\overline{n}}\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F_{n_i t}^{(1)}F_{n_k\tau}^{(1)}Q_{ik}\right)(t,\tau)\times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\delta_{ik}\ln 2\right]\nu_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0, \quad i=1,\ldots,m. \quad (19)$$

Подставляя в i-е ($i=1,\ldots,m$) уравнение системы (18) вместо t последовательно $t_{r_i}^{(2,n_i)}$, $r_i=1,2,\ldots,n_i-1$, получаем систему, содержащую $\sum\limits_{i=1}^{m}(n_i-1)$ уравнений. Вычисляя в этой системе, а также в дополнительных условиях (19) интегралы с помощью квадратурных формул, получаем эквивалентную задаче (18),(19) СЛАУ относительно значений искомой вектор-функции в узлах интерполирования. Однозначная разрешимость полученной СЛАУ будет установлена, если мы докажем однозначную разрешимость системы (18) с дополнительными условиями (19). Для этого, как и выше, перейдем к операторным обозначениям. Пусть: $H_2^{(i)}$, $i=1,2$ – гильбертово пространство вектор-функций $\vec{x}(t)=(x_k(t))_{k=1}^m$, $x_k(t)\in L_2^{(i)}$, $k=1,\ldots,m$ со скалярным произведением

$$(\vec{x},\vec{y})_i=\sum_{k=1}^{m}(x_k,y_k)_i;$$

$\overline{\Lambda}(Q)\subset H_2^{(1)}$ состоит из вектор-функций, удовлетворяющих условиям (17); $\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})\subset H_2^{(1)}$ состоит из вектор-функций, удовлетворяющих условиям (19); $\Pi_{\overline{n}}^{(1)}\subset H_2^{(1)}$ состоит из вектор-функций $\vec{\nu}_{\overline{n}}(\tau)=(\nu_{kn_k}(\tau))_{k=1}^m$, где $\nu_{kn_k}(\tau)\in\Phi_{n_k}$; $\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}})=\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})\bigcap\Pi_{\overline{n}}^{(1)}$; $\Pi_{\overline{n}}^{(2)}\subset H_2^{(2)}$ состоит из вектор-функций $\vec{w}_{\overline{n}}(t)=(w_{kn_k}(t))_{k=1}^m$, где $w_{kn_k}(t)\in\Phi_{n_k-1}$. Для $\vec{w}\in H_2^{(1)}$ введем функционалы

$$\hat{Q}\vec{w}=\left(\hat{Q}_i\vec{w}\right)_{i=1}^m,$$

$$\hat{Q}_{\overline{n}}\vec{w}=\left(\hat{Q}_{i\overline{n}}\vec{w}\right)_{i=1}^m$$

и операторы

$$A\vec{w} = (\Gamma w_i)_{i=1}^m,$$
$$K\vec{w} = \left(\sum_{k=1}^m K_{ik} w_k\right)_{i=1}^m,$$
$$K_{\overline{n}} w = \left(\sum_{k=1}^m K_{ikn_in_k} w_k\right)_{i=1}^m,$$

где

$$(K_{ik}w_k)(t) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \partial_t Q_{ik}(t,\tau) w_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$(K_{ikn_in_k}w_k)(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau) w_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Кроме того, введем вектор-функции

$$\vec{f}(t) = (f_i(t))_{i=1}^m,$$

где

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1} \partial_t Q_{ik}(t,\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - g_i'(t)$$

и

$$\vec{f}_{\overline{n}}(t) = (f_{in_i}(t))_{i=1}^m,$$

где

$$f_{in_i}(t) = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right)(t,\tau)\times \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \left(F^{(2)}_{n_i-1}g_i'\right)(t).$$

В операторных обозначениях система сингулярных интегральных уравнений (16) и дополнительные условия (17) принимают, соответственно, вид

$$(A+K)\vec{\nu} = \vec{f} \qquad (20)$$

и

$$\hat{Q}\vec{\nu} = \vec{0} \qquad (21)$$

(т.е. $\vec{\nu} \in \overline{\Lambda}(Q)$), а система сингулярных интегральных уравнений (18) и дополнительные условия (19) — вид

$$(A+K_{\overline{n}})\vec{\nu}_{\overline{n}} = \vec{f}_{\overline{n}} \qquad (22)$$

и

$$\hat{Q}_{\overline{n}}\vec{\nu}_{\overline{n}} = \vec{0} \qquad (23)$$

(т.е. $\vec{\nu}_{\overline{n}} \in \overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}})$).

Оператор $A+K$ в силу условий (21) действует из пространства $\overline{\Lambda}(Q)$ в пространство $H_2^{(2)}$. Из однозначной разрешимости задачи (16),(17) следует, что оператор $A+K$ имеет в паре пространств

$$(\overline{\Lambda}(Q), H_2^{(2)}) \qquad (24)$$

ограниченный обратный оператор $(A+K)^{-1}$.

Докажем, что оператор $A+K_{\overline{n}}$ при достаточно больших $n=\min\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$ непрерывно обратим в паре пространств

$$(\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}}), \Pi^{(2)}_{\overline{n}}) \qquad (25)$$

и, тем самым, докажем однозначную разрешимость задачи (18),(19).

Для этого сначала рассмотрим вспомогательную задачу: уравнение

$$(A+K)\vec{\nu}^{(\overline{n})} = \vec{f} \qquad (26)$$

в паре пространств

$$(\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}}), H_2^{(2)}). \qquad (27)$$

Пользуясь оценкой: при $n > \mu+1$

$$\left\|Q_{ik} - F^{(1)}_{n_it}F^{(1)}_{n_k\tau}Q_{ik}\right\|_{L_2^{(1)}\times L_2^{(1)}} \le \frac{M}{(n-1)^{\mu+\gamma}},$$

$i,k=1,\ldots,m$, M – константа, зависящая от функций Q_{ik}, которую можно получить с помощью теорем Джексона, легко показать справедливость следующих вспомогательных утверждений [12]:

1. Существует $N_1 \ge \mu+1$ такое, что для всех $\overline{n}$, у которых $n > N_1$, оператор $A+K$ имеет в паре пространств (27) ограниченный обратный оператор $(A+K)^{-1}_{\overline{n}}$.

2. Пусть $\vec{f} \in H_2^{(2)}$, $\vec{f} \neq \vec{0}$ и пусть $\vec{\nu}$ – решение уравнения (20) в паре пространств (27). $\vec{\nu}^{(\overline{n})}$ – решение уравнения (26) в паре пространств (27). Тогда существует $N_2 = N_2(\vec{f}) \ge N_1$ такое, что при всех $\overline{n}$ таких, что $n > N_2$ выполняется неравенство

$$\left\|\vec{\nu} - \vec{\nu}^{(\overline{n})}\right\|_{H_2^{(1)}} = \left\|(A+K)^{-1}\vec{f} - (A+K)^{-1}_{\overline{n}}\vec{f}\right\|_{H_2^{(1)}} \le \frac{1}{(n-1)^{\mu+\gamma}} d\left\|\vec{f}\right\|_{H_2^{(2)}}\left\|(A+K)^{-1}\right\|_{H_2^{(2)}\to\overline{\Lambda}(Q)},$$

где d – константа, зависящая от $\vec{f}$ и Q_{ik}, $i,k=1,\ldots,m$.

Отсюда следует, что существуют $D>0$ и $N_3 \ge N_1$ такие, что при всех $\overline{n}$, у которых $n > N_3$

$$\left\|(A+K)^{-1}_{\overline{n}}\right\|_{H_2^{(2)}\to\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})} \le D.$$

Далее, пользуясь теоремами Джексона, получаем (при $n > \mu + 2$) следующие оценки:

$$\|(A+K)-(A+K_{\overline{n}})\|_{\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}})\to H_2^2} \leq$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{i,k=1}^{m}\left\|\partial_t Q_{ik} - F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right\|_{L_2^{(2)}\times L_1^{(1)}} \leq$$
$$R\frac{1}{(n-2)^{\mu-1+\gamma}},$$

$$\left\|\vec{f}-\vec{f_{\overline{n}}}\right\|_{H_2^{(2)}} \leq$$
$$\frac{C}{\sqrt{\pi}}\sum_{i,k=1}^{m}\left\|\partial_t Q_{ik} - F^{(2)}_{n_i-1,t}F^{(1)}_{n_k\tau}\partial_t Q_{ik}\right\|_{L_2^{(2)}\times L_2^{(1)}} +$$
$$\sum_{i=1}^{m}\left\|g_i' - F^{(2)}_{n_i-1}g_i'\right\|_{L_2^{(2)}} \leq G\frac{1}{(n-2)^{\mu-1+\gamma}},$$

где $C = \max_{1\leq k\leq m}|C_k|$, R и G – константы, зависящие от функций $f_i(t)$ и $Q_{ik}(t,\tau)$, $i,k = 1,\ldots,m$, соответственно.

Пусть теперь $N_4 > N_3$ такое, что для всех $\overline{n}$, у которых $n > N_4$,

$$d_{\overline{n}} = \|(A+K)-(A+K_{\overline{n}})\|_{\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}})\to H_2^{(2)}} \times$$
$$\left\|(A+K)_{\overline{n}}^{-1}\right\|_{H_2^{(2)}\to\overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})} \leq DR\frac{1}{(n-2)^{\mu-1+\gamma}} < 1.$$

Теперь, поскольку $\overline{\Lambda}_{\overline{n}}(Q_{\overline{n}}) \subset \overline{\Lambda}(Q_{\overline{n}})$, то, пользуясь результатом, приведенным в [11, стр. 19], получаем, что для всех $\overline{n}$, у которых $n > N_4$, уравнение (22) имеет в паре пространств (25) единственное решение $\vec{\nu}_{\overline{n}}$, причем имеет место оценка

$$\left\|\vec{\nu}^{(\overline{n})} - \vec{\nu}_{\overline{n}}\right\|_{H_2^{(1)}} \leq \frac{D}{1-d_{\overline{n}}}\times$$
$$\left[\frac{G}{(n-2)^{\mu-1+\gamma}} + d_{\overline{n}}\left\|\vec{f}\right\|_{H_2^{(2)}}\right] \leq$$
$$\frac{D}{1-DR(n-2)^{-(\mu-1+\gamma)}}\times$$
$$\left[G + DR\left\|\vec{f}\right\|_{H_2^{(2)}}\right]\frac{1}{(n-2)^{\mu-1+\gamma}}.$$

Сформулируем окончательный результат.

Существует $N_5 \geq \max\{N_4, N_2\}$ такое, что при всех $\overline{n}$, у которых $n > N_5$, уравнение (22) имеет в паре пространств (25) единственное решение $\vec{v}_{\overline{n}}$, причем имеет место оценка

$$\|\vec{\nu}-\vec{\nu}_{\overline{n}}\|_{H_2^{(1)}} \leq \left\|\vec{\nu}-\vec{\nu}^{(n)}\right\|_{H_2^{(1)}} +$$
$$\left\|\vec{\nu}^{(\overline{n})}-\vec{\nu}_{\overline{n}}\right\|_{H_2^{(1)}} = \delta_n,$$

где $\delta_n = O\left(\frac{1}{n^{\mu-1+\gamma}}\right)$.

4. Оценка скорости сходимости функционалов

Диаграммы направленности поля в дальней зоне и комплексные амплитуды распространяющихся волн [2], а также другие величины, описывающие рассеянное электромагнитное поле, выражаются через решение $\vec{\nu}(\tau) = \{\nu_k(\tau)\}_{k=1}^m$ системы сингулярных интегральных уравнений (16) с дополнительными условиями (17) в форме функционалов вида

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}\Phi_k(\tau)\nu_k(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad (28)$$

где $\Phi_k(\tau) \in C^{\mu-1,\gamma}_{[-1,1]}$, $k = 1,\ldots,m$.

Приближенное значение этого функционала имеет вид

$$\Phi_{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}F_{n_k\tau}\Phi_k(\tau)\nu_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}. \qquad (29)$$

Оценим отклонение приближенного значения функционала от точного

$$\Phi_{\overline{n}} - \Phi = \sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}\Phi_k(\tau)(\nu_{kn_k}(\tau)-\nu_k(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$
$$\sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}(F_{n_k\tau}\Phi_k(\tau)-\Phi_k(\tau))\nu_{kn_k}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}\Phi_k(\tau)(\nu_{kn_k}(\tau)-\nu_k(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right| \leq$$
$$m\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{-1}^{1}\Phi_k(\tau)(\nu_{kn_k}(\tau)-\nu_k(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right|^2\right)^{1/2} \leq$$
$$m\left(\sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1}|\Phi_k(\tau)|^2\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}|\nu_{kn_k}(\tau)-\nu_k(\tau)|^2\times\right.$$
$$\left.\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{n^{\mu-1+\gamma}}\right). \qquad (30)$$

Аналогично оценивается и второй интеграл в (30).

Таким образом, скорость сходимости приближенного значения функционала (29) к точному (28) оценивается так

$$\Phi_{\overline{n}} - \Phi = O\left(\frac{1}{n^{\mu-1+\gamma}}\right).$$

Здесь, как и выше, $n = \min\{n_1,\ldots,n_m\}$.

5. Дискретная математическая модель

Сингулярное интегральное уравнение на системе отрезков (см. введение)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L R(x,\xi)F(\xi)d\xi = f(x), \quad x\in L, \qquad (31)$$

где

$$R(x,\xi) = \frac{1}{\xi - x} + K(x,\xi),$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L S_p(\xi)F(\xi)d\xi = C_p, \quad p=1,\ldots,m \qquad (32)$$

с помощью отображений

$$g_q\colon(-1,1)\to(a_q,b_q):\ \tau\mapsto\xi_q = \frac{b_q-a_q}{2}\tau + \frac{b_q+a_q}{2},$$
$$g_p\colon(-1,1)\to(a_p,b_p):\ t\mapsto\xi_p = \frac{b_p-a_p}{2}t + \frac{b_p+a_p}{2},$$

сводится к системе сингулярных интегральных уравнений на стандартном отрезке с m дополнительными условиями. Метод приближенного решения этой системы строго обоснован в пункте 3 настоящей работы.

В заключение мы проведем непосредственно дискретизацию уравнения (31) с дополнительными условиями (32) в том виде, в котором эта дискретная математическая модель используется при проведении численных экспериментов.

Обозначим $F(\xi)\big|_{L_q} = \dfrac{\nu_q(\xi)}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}$ (см. введение) при $a_q<\xi<b_q$, $q=1,\ldots,m$, $\xi_{qi}^{n_q} = g_q\left(t_i^{(1,n_q)}\right)$, $i=1,\ldots,n_q$; $q=1,\ldots,m$; $x_{pj}^{n_p} = g_p\left(t_j^{(2,n_p)}\right)$, $j=1,\ldots,n_p-1$; $p=1,\ldots,m$.

Для определения приближенных значений $\vec{\nu}_{\overline{n}}(\xi) = \{\nu_{qn_q}\}_{q=1}^{n_q}$ искомой вектор-функции в узловых точках квадратурных формул интерполяционного типа имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_q} R\left(x_{pj}^{n_p},\xi_{qi}^{n_q}\right)\nu_{qn_q}\left(\xi_{qi}^{n_q}\right)\frac{1}{n_q} = f\left(x_{pj}^{n_p}\right),$$
$$j=1,\ldots,n_p-1, \quad p=1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n_p} S_p\left(\xi_{pi}^{n_p}\right)\nu_{pn_p}\left(\xi_{pi}^{n_p}\right)\frac{1}{n_p} = C_p, \quad (j=n_p),$$
$$p=1,\ldots,m.$$

Через компоненты $\vec{\nu}_{\overline{n}}(\xi)$ выражаются приближенные значения функционалов — физических характеристик рассеянного поля

$$H = \int\limits_L H(\xi)F(\xi)d\xi =$$
$$\sum_{q=1}^{m}\int\limits_{a_q}^{b_q} H_q(\xi)\nu_q(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}.$$

В численных экспериментах вычисляются приближенные значения таких функционалов

$$H_{\overline{n}} = \sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_q} H_q\left(\xi_{qi}^{n_q}\right)\nu_{qn_q}\left(\xi_{qi}^{n_q}\right)\frac{1}{n_q}.$$

Поступила в редакцию 3 ноября 2001 года

References

[1] Гандель Ю.В. Метод парных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках // Электромагнитные явления. – 1998. – Т. 1, N 2. – С. 220–232.

[2]Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках // Электромагнитные явления. – 1998. – Т. 1, - N 4. – С. 447–464.

[3] Гандель Ю.В., Лифанов И.К. Новый подход к решению смешанных краевых задач для уравнения Лапласа и Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. – Т. 34, - N 9. – С. 1246–1253.

[4] Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – М.: Изд-во АН СССР. – 1986. – ВК–124. – С. 166–183.

[5] Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1983. – Вып. 40. – С. 104–110.

[6] Junghanns P., Silbermann B. Zur Theorie der Naherungsverfahren fur singulare Integralgleichungen auf Intervallen // Math. Nachrichten. – 1981. – N 103. – P. 199–244.

[7] Полянская Т.С. К решению сингулярного интегрального уравнения на системе отрезков // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1985. – Вып. 44. – С. 84–88.

[8] Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование численного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта // Вестник Харьковского национального университета. – 2001. – N 514. – С. 156–163.

[9] Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Полянская Т.С. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, – N 9. – С. 1536–1541.

[10] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука. – 1965. — 408 с.

[11] Габдулхаев Б.Г Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд. Казанск. ун-та. – 1980. – 231 с.

[12] Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч.II. – Харьков: ХГУ. – 1992. – 145 с.