

УДК 533.09

В.И.Мирошниченко\*, В.Н.Остроушко\*\*

\*Институт прикладной физики НАН Украины  
40030 г.Сумы, ул.Петропавловская 58

\*\*Национальный Научный Центр “Харьковский Физико-Технический Институт”  
61108 г. Харьков, ул. Академическая 1

# Влияние смешанного отражения электронов от границы на отражение наклонной электромагнитной волны в условиях аномального скин-эффекта

## Содержание

1. Введение	324
2. Исходные уравнения	324
3. Уравнения для продольного поля	325
4. Уравнения для поперечного поля	326
5. Результаты	328
6. Выводы	329

## Abstract

In anomalous skin effect conditions, the oblique electromagnetic wave reflection from the sharp plasma boundary is considered in an assumption of mixed (specular and diffuse) electron reflection from the boundary. The efficient for this case technique of the Riemann-Hilbert boundary problem solving is outworked and the explicit approximate equalities for the impedance and wave magnitudes are obtained.

## 1. Введение

Отражение электромагнитной волны от поверхности металла при низких температурах происходит в условиях аномального скин-эффекта (АСЭ), теория которого была в значительной мере построена в работах [1] и [2], где рассматривалось отражение электромагнитной волны от плазмы электронов с резкой границей, причем отражение электронов от границы характеризовалось определенным соотношением между количеством электронов, отраженных зеркально и диффузно. Хотя вероятность зеркального отражения электрона от границы зависит от энергии электрона и угла падения [3], при моделировании процесса применяется также приближение, в котором указанными зависимостями пренебрегают. В частности, в таком приближении точно решена задача о нормальном падении волны в условиях предельно аномального скин-эффекта

(ПАСЭ) [4] и рассчитаны параметры проникновения продольного поля в плазму в условиях, близких к ПАСЭ [5]. Кроме того, следует отметить точное решение задачи о нормальном падении в приближении, когда функция распределения отраженных электронов фиксируется с точностью до множителя, который в определенной мере характеризует диффузность отражения электронов от границы [6], а также явные соотношения, полученные в работе [7] для случая плазменного слоя. Целью данной работы является исследование наклонного падения р-поляризованной электромагнитной волны на локально-изотропную плазму с резкой границей в условиях, близких к ПАСЭ. В разделе 2 приведены исходные уравнения в виде уравнений для фурье-образов линейных комбинаций компонент поля. В разделе 3 рассматривается уравнение для продольного поля и предлагается сходящийся итерационный метод его решения. В разделе 4

рассматривается уравнение для поперечного поля и излагается способ отыскания отношения значений фурье-образов компонент поперечного поля в коротковолновой и длинноволновой области в условиях АСЭ. В разделе 5 приведены результаты: соотношения для поверхностного импеданса и изменения поля с глубиной.

## 2. Исходные уравнения

Ось OZ направляем нормально к границе, ось OY — вдоль магнитного поля волны, так что вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости XOZ. В качестве невозмущенной функции распределения электронов плазмы берем изотропную функцию распределения Ферми с нулевой температурой, а влияние границы характеризуем долей  $p$  ( $0 < p < 1$ ) электронов, отраженных от границы зеркально. Исходными являются уравнения Максвелла для поля и уравнения Власова для возмущения функции распределения электронов в полупространстве  $z > 0$ , записанные для амплитуд — коэффициентов при множителе  $\exp(i\omega c^{-1}k_x x - i\omega t)$ , который определяет вид зависимости от времени  $t$  и координат  $x, y$  ( $\omega$  — частота,  $c$  — скорость света,  $k_x$  — касательная к границе проекция безразмерного волнового вектора, равная синусу угла падения). Применив к упомянутым амплитудам преобразование Фурье на полуоси  $z > 0$  — оператор вида

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dz \exp(-i\omega c^{-1}k_z z) \dots,$$

и взяв определенные линейные комбинации уравнений и компонент поля, можно получить два функциональных уравнения, для продольного и поперечного поля (например, [8]):

$$[1 - \Omega^2 q_\lambda(\beta k_{xz})] \times [\Psi_\lambda(k_z) + p\Psi_\lambda(-k_z)] = \Phi_\lambda(k_z), \quad (1)$$

$$[1 - k_{xz}^2 - \Omega^2 q_\tau(\beta k_{xz})] \times [\Psi_\tau(k_z) - p\Psi_\tau(-k_z)] = \Phi_\tau(k_z). \quad (2)$$

Здесь  $\beta = \frac{v_F \omega}{c(\omega + i\nu)}$ ,  $\Omega = \frac{\omega_e}{\sqrt{\omega(\omega + i\nu)}}$ ,  $k_{xz} = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ ,  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми (сферической),  $\omega_e$  — плазменная частота,  $\nu$  — частота столкновений; введены функции

$$q_\lambda(\chi) = \frac{3}{\chi^2} \left( \frac{1}{2\chi} \ln \frac{1+\chi}{1-\chi} - 1 \right),$$

$$q_\tau(\chi) = \frac{3}{2\chi^2} \left( 1 - \frac{1-\chi^2}{2\chi} \ln \frac{1+\chi}{1-\chi} \right);$$

функции  $\Phi_\lambda(k_z)$  и  $\Phi_\tau(k_z)$  в полуплоскости  $\text{Im}(k_z) \geq 0$  комплексной переменной  $k_z$  должны

быть аналитическими, а функции  $\Psi_\lambda(k_z)$  и  $\Psi_\tau(k_z)$ , связанные с фурье-компонентами электрического поля равенствами

$$\Psi_\lambda(k_z) = k_x E_x(k_z) + k_z E_z(k_z),$$

$$\Psi_\tau(k_z) = k_x E_z(k_z) - k_z E_x(k_z),$$

должны быть аналитическими и ограниченными в полуплоскости  $\text{Im}(k_z) \leq 0$ ; кроме того, должны выполняться равенства

$$\Psi_\lambda(\pm i k_x) = \pm i \Psi_\tau(\pm i k_x). \quad (3)$$

Считая  $\beta \ll 1$ , и обозначая

$$R_\lambda = [d \ln \Psi_\lambda(k) / dk]_{k=0},$$

$$R_\tau = [d \ln \Psi_\tau(k) / dk]_{k=0}, \quad (4)$$

$$R_{\tau 2} = [\Psi_\tau(0)]^{-1} [d^2 \Psi_\tau(k) / dk^2]_{k=0},$$

из равенств (3) можно получить приближенное равенство

$$k_x^2 (R_{\tau 2} - 2R_\tau R_\lambda) \approx 2. \quad (5)$$

Обозначая  $A = (\beta \Omega)^{2/3}$ , условие реализации АСЭ можно записать в виде  $A \gg 1$  (ПАСЭ, формально, соответствует  $A \rightarrow \infty$ ).

## 3. Уравнения для продольного поля

Рассматриваем функциональное уравнение (1). Обозначаем

$$Q_\lambda(u) = [1 - \Omega^2 q_\lambda(\beta k_x)]^{-1} \times [1 - \Omega^2 q_\lambda(\sqrt{\beta^2 k_x^2 - u^2})].$$

Вводим функцию  $Q_\lambda^+(u)$  для  $\text{Im} u > 0$  равенством

$$\ln Q_\lambda^+(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w-u} \ln Q_\lambda(w),$$

аналитично продолжаем ее на действительную ось и обозначаем  $Q_\lambda^\times(u) = Q_\lambda^+(u) [Q_\lambda^+(-u)]^{-1}$ . Верхние индексы  $+$  и  $\times$  используем и далее для функций, связанных с четной функцией без верхнего индекса соотношениями типа

$$Q^+(u) Q^+(-u) = Q(u),$$

$$Q^\times(u) = Q^+(u) [Q^+(-u)]^{-1}, \quad (6)$$

причем  $Q^+(u)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Im} u > 0$ . Написанными условиями функция  $Q^+(u)$  определяется с точностью до знака; двужначность можно устранить фиксацией асимптотики или значения  $Q^+(u)$  в одной точке.

В полуплоскости  $\text{Im } k_z > 0$  функция  $\Psi_\lambda(k_z)$  имеет точку ветвления  $k_{zq}$  и полюс  $k_{z\lambda}$ , которые определяются точкой ветвления  $u_q$  и нулем  $u_\lambda$  функции  $Q_\lambda(u)$  в полуплоскости  $\text{Im } u > 0$  ( $u_q = i(1 - \beta^2 k_x^2)^{-1/2}$ ,  $u_\lambda \approx (\Omega\sqrt{3})^{-1}$ ) через преобразование  $k_z = i(\beta u)^{-1}$ .

Для функций

$$X_\lambda(u) = [\Psi_\lambda(0)]^{-1} \Psi_\lambda\left(\frac{1}{i\beta u}\right) Q_\lambda^+(u),$$

$$Y_\lambda(u) = \Phi_\lambda\left(\frac{i}{\beta u}\right) [\Psi_\lambda(0)Q_\lambda^+(u)]^{-1}$$

имеем функциональное уравнение

$$X_\lambda(u) + pQ_\lambda^\times(u)X_\lambda(-u) = Y_\lambda(-u) \quad (7)$$

и требование аналитичности и ограниченности в полуплоскости  $\text{Im } u > 0$ . Такой выбор области аналитичности возможен благодаря тому, что прямую, параметризованную равенством  $u = i(\beta k_z)^{-1}$  с действительным  $k_z$ , можно повернуть на прямую  $\text{Im } u = 0$ , не пересекая нулей и точек ветвления функции  $Q_\lambda(u)$ .

Если бы  $p$  было нулем, функциональное уравнение (7) определяло бы граничную задачу Римана [9] для пары функций,  $X_\lambda(u)$  и  $Y_\lambda(-u)$ , первая из которых аналитична в верхней полуплоскости, а вторая — в нижней. При ненулевом  $p$  из функционального уравнения (7) можно получить граничную задачу Римана-Гильберта для двух пар функций, путь решения которой описан в монографии [10]. Кроме того, методом работы [11] можно получить интегральное уравнение фредгольмовского типа для суммы  $\Psi_\lambda(k_z) + \Psi_\lambda(-k_z)$  непосредственно из уравнения (1). Однако в данной работе для исследования ситуации, близкой к ПАСЭ, используются интегральные уравнения для некоторых фурье-образов. А именно, обозначая символом  $\tilde{\cdot}$  над буквой результат действия интегрального оператора по образцу

$$\tilde{f}(\zeta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-i\zeta u) [f(u) - f(\infty)],$$

для  $\zeta > 0$  получаем интегральное уравнение

$$\tilde{X}_\lambda(\zeta) + p\tilde{Q}_\lambda^\times(\zeta) + p \int_0^\infty d\xi \tilde{Q}_\lambda^\times(\zeta + \xi) \tilde{X}_\lambda(\xi) = 0. \quad (8)$$

Интегральное отображение, соответствующее уравнению (8), для достаточно малого  $p$  является сжимающим в пространстве квадратично интегрируемых функций, и решение уравнения (8) можно получить итерационным путем. В предположении  $\beta \ll 1$ ,  $\Omega \gg 1$  функция  $\tilde{Q}_\lambda^\times(\zeta)$  при  $\beta \ll \zeta \ll \Omega$  близка к функции  $\tilde{Q}_{\lambda 0}^\times(\zeta)$ , фурье-образу функции  $Q_{\lambda 0}^\times(u)$ ,

построенной, соответственно равенствам (6), по функции  $Q_{\lambda 0}(u) = 3u^2 [1 - u \text{arctg}(1/u)]$ . Поскольку последняя — четная и положительная функция действительного аргумента, то  $|Q_{\lambda 0}^\times(u)| = 1$  для действительных  $u$ , поэтому при  $|p| < 1$  упомянутый итерационный процесс является сходящимся, если величины  $\beta$  и  $\Omega^{-1}$  достаточно малы.

Величина  $R_\lambda$  (4) связана с решением уравнения (8) равенством  $R_\lambda = -\beta F_\lambda$ , в котором

$$F_\lambda = \lim_{\{\zeta \rightarrow 0, \zeta > 0\}} \tilde{X}_\lambda(\zeta) + \lim_{u \rightarrow \infty} \{iu [Q_\lambda^+(u) - 1]\}.$$

После предельного перехода  $\beta \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \infty$  величина  $F_\lambda$  становится чисто действительной.

#### 4. Уравнения для поперечного поля

Рассматриваем функциональное уравнение (2). Обозначаем

$$Q_\tau(u) = -k_x^2 - c_\lambda^2 u^2 + 1 - \Omega^2 q_\tau \left( \beta \sqrt{k_x^2 + c_\tau^2 u^2} \right),$$

где  $c_\tau = -ic_3 A \beta^{-1}$ ,  $c_3 = \exp(i\pi/3)$ .

В полуплоскости  $\text{Im } k_z > 0$  функция  $\Psi_\tau(k_z)$  имеет точку ветвления  $k_{zq}$  и полюс  $k_{z\tau}$ , который определяется нулем  $u_\tau$  функции  $Q_\tau(u)$  в полуплоскости  $\text{Im } u > 0$  через равенство  $k_{z\tau} = c_\tau u_\tau$  ( $u_\tau \approx (3\pi/4)^{1/3} c_3^2$  для  $A \gg 1$ ).

Используем функции  $Q_\tau^+(u)$  и  $Q_\tau^\times(u)$ , определенные по функции  $Q_\tau(u)$  соотношениями типа (6) и требованием аналитичности функции  $Q_\tau^+(u)$  в полуплоскости  $\text{Im } u > 0$ , фиксируя знак так, что  $\lim_{u \rightarrow \infty} [Q_\tau^+(u)/u] = c_\tau$ . Вводя функции

$$X_\tau(u) = \Psi_\tau(-c_\tau u) Q_\tau^+(u),$$

$$Y_\tau(u) = \Phi_\tau(c_\tau u) [Q_\tau^+(u)]^{-1},$$

получаем функциональное уравнение

$$X_\tau(u) - pQ_\tau^\times(u)X_\tau(-u) = Y_\tau(-u)$$

причем можно ставить требование аналитичности функций  $X_\tau(u)$  и  $Y_\tau(u)$  в полуплоскости  $\text{Im } u \geq 0$ .

Асимптотика функции  $X_\tau(u)$  связана с поверхностным импедансом: обозначая через  $Z$  отношение касательных к границе составляющих напряженностей электрического и магнитного поля (так, что  $Z = 1$  при нормальном падении на пустое полупространство), имеем равенство

$$\frac{1}{c_\tau Z} = Q_{\tau 1} + \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ u - \frac{X_\tau(u)}{c_\tau \Psi_\tau(\infty)} \right],$$

где  $Q_{\tau 1} = \lim_{u \rightarrow \infty} [c_\tau^{-1} Q_\tau^+(u) - u]$ .

Если для  $p' = p$  и для  $p' = -p$  найти решения функционального уравнения

$$X(p'; u) - p' Q_\tau^\times(u) X(p'; -u) = Y(p'; -u) \quad (9)$$

с требованиями аналитичности и ограниченности функций  $X(p'; u)$  и  $Y(p'; u)$  в полуплоскости  $\text{Im}(u) \geq 0$  и условием  $X(p'; \infty) = 1$ , то функцию  $X_\tau(u)$  можно записать в виде линейной комбинации:

$$\frac{X_\tau(u)}{c_\tau \Psi_\tau(\infty)} = uX(-p; u) + [i\Psi_{\tau 1} - (c_\tau Z)^{-1}] X(p; u), \quad (10)$$

где  $\Psi_{\tau 1} = \lim_{u \rightarrow \infty} \{iu[X(-p; u) - 1]\} - iQ_{\tau 1}$ . Величину  $Q_{\tau 1}$  можно вычислить из определения, функции  $X(\pm p; u)$  можно получить через решение граничной задачи (9), а величина импеданса должна быть такой, чтобы величины  $R_\tau, R_{\tau 2}$  (4) соответствовали соотношению (5).

В предположении  $A \gg 1$  функция  $\tilde{Q}_\tau^\times(\zeta)$  при  $\zeta \ll A$  близка к фурье-образу  $\tilde{Q}_{\tau 0}^\times(\zeta)$  функции  $Q_{\tau 0}^\times(u)$ , построенной (согласно равенствам типа (6)) по четной функции, определенной равенством  $Q_{\tau 0}(u) = u^2 + 3\pi(4u)^{-1}$  для  $u > 0$ . В связи с асимптотикой  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\pi\zeta\tilde{Q}_{\tau 0}^\times(\zeta)] = 1$ , переход к уравнению, аналогичному (8), и решение его итерационным путем, позволяет получить  $\Psi_{\tau 1}$ , но такой способ неэффективен для вычисления некоторых величин, нужных для описания поведения функций  $X(\pm p; u)$  вблизи нуля и оценки импеданса. Для их вычисления обозначаем  $c_\sigma = c_3^2 A^{-1}$  и рассматриваем функциональное уравнение

$$X_\sigma(p'; u) - Y_\sigma(p'; -u) = p'Q_\tau^\times \left( \frac{c_\sigma}{u} \right) X_\sigma(p'; -u) \quad (11)$$

с требованиями аналитичности и ограниченности функций  $X_\sigma(p'; u)$  и  $Y_\sigma(p'; u)$  в полуплоскости  $\text{Im} u > 0$  и условием  $X_\sigma(p'; \infty) = 1$ . При  $u \gg A^{-1}$  функция  $Q_\tau^\times(c_\sigma/u)$  близка к функции  $Q_{\tau 0}^\times(u)$ , построенной (согласно равенствам типа (6)) по функции  $Q_{\sigma 0}(u) = q_\tau(i/u)$  (четной, положительной для действительных  $u$ ), в связи с чем величина  $F_\sigma = i \lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ u^2 \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{X_\sigma(-p; u)}{Q_\tau^\times(c_\sigma/u)} \right\}$  при  $A \rightarrow \infty$  становится чисто действительной. Решения уравнений (9) и (11) связаны равенством

$$X(p'; u) = X(p'; 0) X_\sigma(p'; c_\sigma/u). \quad (12)$$

Учитывая (10) и (12), из (5) получаем приближенное равенство

$$ik_x^2 \beta^2 X(-p; 0) (F_\lambda - F_\sigma) \approx c_3 AX(p; 0) [(c_\tau Z)^{-1} - i\Psi_{\tau 1}], \quad (13)$$

для отыскания импеданса.

Отметим, что величины  $X(p; 0)$  и  $X(-p; 0)$  связаны равенством  $X(p; 0)X(-p; 0) = 1$ , которое можно получить, если приближать функцию  $Q_\tau^\times(u)$

(равномерно на действительной оси) последовательностью отношений полиномов и строить явно решение соответствующих уравнений типа (9) через применение правила Крамера к конечной системе алгебраических уравнений, соответствующих требованиям аналитичности правой части в нулях полинома в знаменателе.

Зависимости  $X(p'; u)$  и  $X_\sigma(p'; u)$  от  $u$  в области  $A^{-1} \ll u \ll 1$  близки к степенным, после некоторого преобразования уравнений (9) и (11) соответствующие коэффициенты эффективно вычисляются, после чего из равенства (12) можно получить  $X(p'; 0)$ . Для произвольного положительного  $a$ , обозначая

$$\begin{aligned} x(a, p'; u) &= X(p'; u) (ia + u)^{-1}, \\ g(a; u) &= Q_\tau^\times(u) (ia - u) (ia + u)^{-1}, \\ h(a, p'; u) &= Y(p'; ia) (ia + u)^{-1}, \end{aligned}$$

для фурье-образов можно получить интегральное уравнение

$$\tilde{x}(a, p'; \zeta) = \tilde{h}(a, p'; \zeta) + p' \int_0^\infty d\xi \tilde{g}(a; \zeta + \xi) \tilde{x}(a, p'; \xi), \quad (\zeta > 0). \quad (14)$$

Функция  $\tilde{g}(a; \zeta)$  при  $1 \ll \zeta \ll A$  близка к  $(\pi\zeta)^{-1}$ , поэтому после перехода  $A \rightarrow \infty$  уравнение (14) уже не является фредгольмовским. Для построения интегрального уравнения с ограниченным ядром на ограниченном интервале в случае  $p' = p$  при конечном  $A$  берем  $a = 1$  и вторым из двух методов работы [12] строим решение интегрального уравнения на интервале  $(1, A)$  с ядром  $p[\pi(\zeta + \xi)]^{-1}$  и свободным членом, равным разности между правой частью (14) и интегралом с написанным ядром. В полученном интегральном уравнении, введя переменную  $\bar{\zeta}$  так, чтобы величинами порядка единицы в разных интервалах были произведения  $d\bar{\zeta}/d\zeta$  с некоторыми множителями ( $1 -$  для  $0 < \zeta < 1, \zeta^{2-\kappa_p} -$  для  $1 < \zeta < A^{\kappa_p}, A(\zeta/A)^{1-\kappa_p} -$  для  $A^{\kappa_p} < \zeta < A, \zeta^2/A -$  для  $\zeta > A$ ), и взяв функцию  $\bar{x}(\bar{\zeta})$  так, чтобы отношение  $\bar{x}(\bar{\zeta})/\tilde{x}(1, p; \zeta)$  равнялось величинам  $1, \zeta^{1-\kappa_p}$  и  $\zeta A^{-\kappa_p}$  в интервалах  $0 < \zeta < 1, 1 < \zeta < A$  и  $\zeta > A$ , соответственно, приходим к интегральному уравнению на ограниченном интервале, ядро которого и при  $A \rightarrow \infty$  остается ограниченным.

В случае  $p' = -p$ , с целью сохранения знака в асимптотике ядра уравнения (14), берем положительное  $\delta_1 \sim A^{-1}$  и рассматриваем задачу для  $a = \delta_1$ . В обоих случаях ( $p' = p, a = 1$  и  $p' = -p, a = \delta_1$ ) при увеличении  $\zeta$  в области  $1 \ll \zeta \ll A$  функции  $\tilde{x}(a, p'; \zeta)$  спадают, приблизительно, как степень с показателем, меньшим единицы, что позволяет эффективно вычислять соответствующие коэффициенты. Вводя обозначение  $\kappa_p = \pi^{-1} \arcsin(p)$

и полагая  $\delta_0 = -i c_\sigma^{1/2}$ ,  $C_0 = -i X(-p; i\delta_0) \delta_0^{-\kappa_p}$ ,  $C_1 = -i X(p; i\delta_0) \delta_0^{\kappa_p}$ , для  $1 \ll \zeta \ll A$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta_1, -p; \zeta) \Gamma(1 - \kappa_p) &\approx C_0 \zeta^{-\kappa_p}, \\ \tilde{x}(1, p; \zeta) \Gamma(\kappa_p) &\approx C_1 \zeta^{\kappa_p - 1}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma(\kappa)$  — гамма-функция Эйлера. При последовательных предельных переходах  $A \rightarrow \infty$ ,  $\delta_0 \rightarrow 0$  величины  $C_0$  и  $C_1$  приближаются к конечным действительным значениям, которые можно эффективно вычислять при решении уравнений типа (14).

Свободный член в уравнении для  $\tilde{x}(\delta_1, -p; \zeta)$ , слабо меняющийся при  $\zeta \ll A$ , уменьшается до нуля при  $A \rightarrow \infty$ , и для отыскания функции  $\tilde{x}(\delta_1, -p; \zeta)$  в приближении  $A \gg 1$  нужно найти решение однородного уравнения, но такое, что ограниченным при последовательных предельных переходах  $A \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , остается его произведение с величиной  $\zeta^{\kappa_p}$ , в связи с чем целесообразно перейти к неоднородному уравнению для разности функции  $\tilde{x}(\delta_1, -p; \zeta)$  с функцией, которая учитывает указанное поведение, и решать неоднородное уравнение через итерации, аналогично уравнению (8).

Преобразование, подобное переходу от (9) к (14), применяем, также, к уравнению (11), но для полученного уравнения (с другой функцией на месте  $\tilde{g}(a; \zeta + \xi)$ ) рассматриваем случаи  $p' = -p$ ,  $a = 1$  и  $p' = p$ ,  $a = \delta_1$  (с целью сохранения знака в асимптотике ядра). Для величин  $C_{\sigma 1} = -i X_\sigma(-p; i\delta_0) \delta_0^{\kappa_p}$  и  $C_{\sigma 0} = -i X_\sigma(p; i\delta_0) \delta_0^{-\kappa_p}$ , которые можно эффективно вычислить из асимптотики решений интегральных уравнений для соответствующих фурье-образов, и величины  $F_\tau = X(-p; 0) (c_3 A)^{\kappa_p}$  имеем равенства  $C_0 C_{\sigma 1}^{-1} = F_\tau = C_{\sigma 0} C_1^{-1}$ ,  $X(-p; 0) [X(p; 0)]^{-1} = F_\tau^2 (c_3 A)^{-2\kappa_p}$ .

## 5. Результаты

Обозначая  $F_Z = (F_\lambda - F_\sigma) F_\tau^2$ , из (13) получаем

$$\frac{\beta}{AZ} \approx \Psi_{\tau 1} \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right) + k_x^2 \frac{\beta^2}{A^{1+2\kappa_p}} \exp\left(-i \frac{2\pi\kappa_p}{3}\right) F_Z. \quad (15)$$

Поскольку соотношение (15) написано в предположении  $A \gg 1$ ,  $\beta \ll 1$ , то в нем следует использовать значения величин  $\Psi_{\tau 1}$  и  $F_Z$ , полученные после предельных переходов  $A \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ; при этом указанные величины становятся чисто действительными. Выявление комплексного множителя в соотношении (15) является следствием выбора соответствующих комплексных переменных, пропорциональной и обратно пропорциональной  $k_z$ , для которых множитель в функциональном уравнении, полученном из (1) или (2), после предельных переходов  $A \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$  становится положительным

для действительной переменной. Методами работы [4] можно показать, что

$$\Psi_{\tau 1} \approx \left(\frac{\pi^2}{48}\right)^{1/6} \left[\frac{\sin(\alpha_p/2)}{\sin(\alpha_p/3)}\right]^2,$$

где  $\alpha_p = \arccos(p)$ , а также, получить явные выражения (которые содержат определенные интегралы) для  $C_1$  и  $C_0$ , что было использовано для контроля вычислений. Эффективность поглощения характеризуется действительной частью импеданса. Второе слагаемое в правой части (15) характеризует влияние продольного поля, и при нормальном падении исчезает.

Скорость уменьшения поля с глубиной в рассматриваемых условиях определяется квазиволной, а также объемными волнами: поперечной электромагнитной и продольной плазменной. Формально, квазиволна связана с точкой ветвления  $k_{zq}$  функций  $\Psi_\lambda(k_z)$  и  $\Psi_\tau(k_z)$ , поперечная электромагнитная волна — с полюсом  $k_{z\tau}$  функции  $\Psi_\tau(k_z)$ , а продольная плазменная волна — с полюсом  $k_{z\lambda}$  функции  $\Psi_\lambda(k_z)$ . Оценки функций вблизи указанных точек ветвления и полюсов позволяют оценить вклады волн и квазиволны в поле при  $z\omega/v_F \gg 1$ . Обозначаем через  $e_x(z)$ ,  $e_z(z)$  отношения соответствующих компонент упомянутых вкладов к значению  $x$ -компоненты электрического поля на границе. Для вклада квазиволны, вводя обозначения

$$\begin{aligned} f_q &= (2/3) F_\tau (c_3 A)^{-(3/2) - \kappa_p}, \\ e_\lambda(z) &= Q_\lambda^+(u_q) Y_\lambda(u_q) \frac{\exp(i\bar{z})}{\bar{z} (\ln \bar{z})^2}, \\ e_\tau(z) &= Q_\tau^+\left(\frac{c_\sigma}{u_q}\right) Y_\sigma(-p; u_q) \frac{\exp(i\bar{z})}{i\Omega \bar{z}^2}, \end{aligned}$$

в которых величина  $\bar{z}$  связана с координатой  $z$  равенством  $\bar{z} = z\omega v_F^{-1} (1 - \beta^2 k_x^2)^{1/2}$ , получаем:

$$\begin{aligned} e_x(z) &\approx f_q [e_\tau(z) - i\beta^2 k_x^2 e_\lambda(z)], \\ e_z(z) &\approx -\beta k_x f_q [e_\tau(z) + i e_\lambda(z)]. \end{aligned}$$

Для вкладов поперечной электромагнитной волны и продольной плазменной волны получаем приближенные равенства

$$\begin{aligned} e_x(z) &\approx \frac{Q_\tau^+(u_\tau)}{3c_\tau u_\tau} Y(-p; u_\tau) \times \\ &\quad \exp(-A u_\tau c_3^{-2} \omega v_F^{-1} z), \\ e_z(z) &\approx i\beta k_x (A u_\tau c_3^{-2})^{-1} e_x(z) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} e_z(z) &\approx -k_x (c_3 A)^{-\kappa_p} X_\lambda(u_\lambda) F_\tau \times \\ &\quad \exp(-z\omega v_F^{-1} u_\lambda^{-1}), \\ e_x(z) &\approx -i\beta k_x (\Omega\sqrt{3})^{-1} e_z(z), \end{aligned}$$

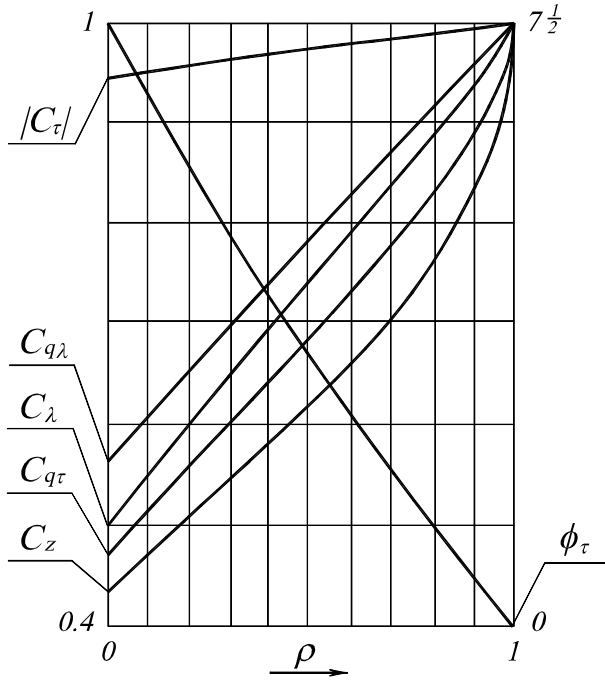


Рис. 1.

соответственно. Основной вклад в поле при  $\bar{z} \gg 1$  дает квазиволна.

Зависимость амплитуд волн и импеданса от параметра зеркальности отражения электронов от границы содержится в величинах

$$\begin{aligned}
 C_{q\lambda} &= \frac{2F_\tau Q_\lambda^+(u_q) Y_\lambda(u_q)}{3a_\tau (1 - \ln 2) \sqrt{3}}, \\
 C_{q\tau} &= \frac{4F_\tau Y_\sigma(-p; u_q) Q_\tau^+ \left( \frac{c_\sigma}{u_q} \right)}{3i\Omega a_\tau \sqrt{3}}, \\
 C_\lambda &= \frac{2(1-p)}{3a_\tau} F_\tau X_\lambda(u_\lambda), \\
 C_\tau &= \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) \frac{2Q_\tau^+(u_\tau) Y(-p; u_\tau)}{\sqrt{27}c_\tau u_\tau}, \\
 C_z &= 16(1-p)(3a_\tau)^{-2} F_z,
 \end{aligned}$$

где  $a_\tau = (3\pi/4)^{1/3}$ , а коэффициенты и множитель  $(1-p)$  взяты так, чтобы после переходов  $A \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ , а потом  $p \rightarrow 1$  написанные величины приобрели значение 1.

На рис. 1 показаны зависимости от  $p$  предельных значений, после перехода  $\{A \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0\}$ , величин  $|C_\tau|$ ,  $C_{q\lambda}$ ,  $C_\lambda$ ,  $C_{q\tau}$ ,  $C_z$  и величины  $\phi_\tau = 180\pi^{-1} \text{Im} \ln C_\tau$  (которая изменяется от 7.5 до 0). При изменении последовательности переходов  $\{A \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0\}$  и  $p \rightarrow 1$  предельные значения изменяются. При  $p \approx 1$ ,  $\Omega \gg 1$  для величин, связанных с продольным полем, можно получить при-

ближенные равенства

$$\begin{aligned}
 Q_\lambda^+(u_q) Y_\lambda(u_q) &\approx \frac{4 [2 + i(1 - \ln 2)(1-p)\Omega\sqrt{3}]}{4 + i(1-p)\Omega\sqrt{3}}, \\
 X_\lambda(u_\lambda) &\approx \frac{4i\Omega}{4 + i(1-p)\Omega\sqrt{3}} \approx F_\lambda \sqrt{3},
 \end{aligned}$$

то есть быстрое изменение написанных величин происходит при изменении  $p$  на величину порядка  $\Omega^{-1}$ . А величина  $F_\tau$ , связанная с поперечным полем, уменьшается вдвое (от значения  $(27/16)^{1/2} a_\tau$  для  $A \rightarrow \infty, p \rightarrow 1$ ) при уменьшении  $p$  на величину порядка  $(\ln A)^{-2}$ , поскольку решение упомянутого выше однородного уравнения с асимптотикой  $\zeta^{-\kappa_p}$  (после перехода  $A \rightarrow \infty$ ) для  $p \neq 1, 1-p \ll 1$  близко к сумме двух функций, которые близки при  $(1-p)(\ln \zeta)^2 \ll 1$ , но оцениваются как  $\zeta^{-\kappa_p}$  и  $\zeta^{\kappa_p-1}$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Хотя полученные в работе результаты, вследствие выбора простой модели отражения электронов от границы, могут иметь ограниченное применение к отражению электромагнитной волны от реальной поверхности металла, можно надеяться, что изложенные методы решения задачи и отыскания вклада продольного поля в импеданс могут быть использованы также и для анализа моделей, которые ближе описывают реальные ситуации.

## 6. Выводы

Таким образом, при рассмотрении падения наклонной электромагнитной волны на резкую границу плазмы поверхностный импеданс и поле в глубине плазменного полупространства можно рассчитать через решение интегральных уравнений, построенных при решении соответствующих граничных задач Римана-Гильберта. Упомянутые уравнения являются уравнениями Фредгольма второго рода и в условиях АСЭ, но при переходе к ПАСЭ в ядре уравнения для поперечного поля появляется особенность. Часть величин, связанных с импедансом, можно эффективно вычислять, решая уравнения путем итераций, часть — преобразуя указанное уравнение к уравнению Фредгольма с ограниченным ядром через применение частичного обращения интегрального оператора. Использование определенных замен переменных в пространстве комплексных волновых чисел дает возможность построить такие уравнения для фурье-образов компонент поля в коротковолновой и длинноволновой области, решения которых в приближении ПАСЭ связаны только через соответствующие асимптотики, что позволяет явно выделить комплексные множители в соотношении для импеданса с поправкой, обусловленной возбуждением продольного электрического поля в связи с р-поляризацией наклонно падающей волны, и выявить порядок указанной поправки. Рассматривая

поведение аналитических функций (решений граничных задач Римана-Гильберта) вблизи особенностей, можно оценить явно, по порядку величины, амплитуды продольной плазменной волны, поперечной электромагнитной волны и квазиволны, которые определяют характер затухания поля с глубиной, и получить численно значения коэффициентов в выражениях для упомянутых амплитуд.

В условиях АСЭ продольная плазменная волна спадает с глубиной быстрее поперечной электромагнитной волны и квазиволны, но в случае, когда доля  $p$  электронов, отраженных от границы зеркально, приближается к единице, амплитуда продольной волны возрастает как  $(1-p)^{-1}$  до тех пор, пока разность  $1-p$  не достигает по порядку величины отношения частоты колебаний к плазменной частоте. Подобным образом изменяется также коэффициент в слагаемом, характеризующем влияние продольного поля на величину поверхностного импеданса плазменной границы. Такая чувствительность к появлению небольшой доли электронов, отраженных от границы диффузно, обусловлена тем, что диффузно отражаемые электроны образуют поверхностный слой заряда, переменный во времени с частотой волны и экранирующий продольное поле.

Хотя полученные в работе результаты, вследствие выбора простой модели отражения электронов от границы, могут иметь ограниченное применение к отражению электромагнитной волны от реальной поверхности металла, можно надеяться, что изложенные методы решения задачи могут быть использованы также и для анализа моделей, которые ближе описывают реальные ситуации.

Поступила в редакцию 1 ноября 2001 года

## Список литературы

- [1] Reuter G.E.H., Sondheimer E.H. The theory of the anomalous skin effect in metals. // Proc. Royal Soc. – 1948. – V. 195. – P. 336–364.
- [2] Азбель М.Я., Канер Э.А. Аномальный скин-эффект при произвольном интеграле столкновений. // ЖЭТФ. – 1955. – Т. 29, Вып. 6(12). – С. 876–878.
- [3] Окулов В.И., Устинов В.В. Поверхностное рассеяние электронов проводимости и кинетические явления в металлах. // ФНТ. – 1979. – Т. 5, N 3. – С. 213–252.
- [4] Hartmann L.E., Luttinger J.M. Exact solution of the integral equations for the anomalous skin effect and cyclotron resonance in metals. // Phys.Rev. – 1966. – V. 151, N 2. – P. 430–433.
- [5] Гохфельд В.М., Каганов М.И., Любарский Г.Я. Аномальное проникновение продольного переменного электрического поля в вырожденную плазму при произвольном параметре зеркальности. // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 92, N 2. – С. 523–530.
- [6] Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о скин-эффекте при произвольном коэффициенте аккомодации тангенциального импульса электронов. // ЖТФ. – 2000. – Т.70, N 8. – С. 1–7.
- [7] Кондратенко А.Н., Мирошниченко В.И. Кинетическая теория прохождения электромагнитных волн через плазменный слой. II. // ЖТФ. – 1966. – Т. 36, N 1. – С. 25–32.
- [8] Мирошниченко В.И. Электромагнитные свойства полуограниченной плазмы при диффузном отражении электронов от границы. // ЖТФ. – 1966. – Т. 36, N 6. – С. 1008–1016.
- [9] Гахов Ф.Д. Краевые задачи – М.: Наука. – 1977. – 640 с.
- [10] Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения – М.: Наука. – 1968. – 512 с.
- [11] Курилко В.И., Попов В.А. К кинетической теории возбуждения продольных волн в ограниченной плазме. // ЖТФ. – 1966. – Т. 36, N 3. – С. 466–469.
- [12] Сологуб В.Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования. // ЖВМиМФ. – 1971. – Т. 11, N 4. – С. 837–854.