УДК 532.51

П.Б. Руткевич
Институт Космических Исследований РАН,
Москва, Россия

Неустойчивость не конвективной природы в насыщенном влажном воздухе

Abstract

The present work is meant to investigate a new instability in moist air in the framework of the thermodynamic approach with the latent heat release of phase transformations in moist atmosphere. Severe weather events are well known to be strongly associated with heavy cloud systems. Hydrodynamic description of the instability responsible for these phenomena is obvious to take explicitly into account thermodynamics of moist air. The discovered instability can be responsible for the severe weather events, such as tornadoes and tropical cyclones.

Конвекция, то есть самопроизвольное возникновение движений в неустойчиво стратифицированной жидкости под действием архимедовых сил, является в настоящее время единственным примером гидродинамической неустойчивости в изначально неподвижной жидкости. Конвективная неустойчивость в атмосфере также проявляется при установлении распределения плотности воздуха, при котором всплывающий элемент объема воздуха оказывается легче, а погружающийся элемент объема — тяжелее окружающего воздуха, однако, обладает рядом свойств, отличающих ее от простейшего случая. Энергетика конвективной неустойчивости в атмосфере также отличается от классического случая, поскольку часто протекает в условиях фазовых превращений водяного пара, и тогда ее порог понижается [1, 2].

Однако существуют такие явления природы, как смерч и тайфун, происходящие во вращающихся плотных облачных системах, возникновение которых не поддается объяснению на основе только лишь конвективной неустойчивости. Таким образом, можно думать, что возможна какая-то отличная от конвекции гидродинамическая неустойчивость, развитие которой существенно зависит от вращения и термодинамики фазовых переходов в системе. Рассмотрим возможность возникновения новой (не конвективной, не связанной с архимедовыми силами) неустойчивости во вращающейся гетерогенной системе из двух газовых компонент, одна из которых находится в состоянии межфазного равновесия со своей жидкой или кристаллической фазой. При этом в смысле приложений для атмосферы понятно, что рассматриваемая система описывает смесь сухого воздуха и водяного пара, находящегося в состоянии насыщения.

Термодинамическое описание двухкомпонентной системы в качестве своих параметров должно содержать парциальные давления, плотности компонент и температуру смеси. Обозначим давление и плотность первой компоненты P и ρ, давление второй компоненты E, отношение плотности второй компоненты к плотности первой компоненты q, при этом $E \ll P$ и $q \ll 1$. Температуру смеси обозначим через T. Обе компоненты системы считаем идеальными газами, уравнение состояния первой компоненты примем в виде $P = \rho RT$, а для второй компоненты с учетом ее малого парциального давления получим $q = R/R_w \cdot E/P$, где R и R_w – удельные газовые постоянные первой и второй газовых компонент. Считая для второй (малой) компоненты выполненными условия межфазного равновесия с ее жидкой или кристаллической фазой, примем для нее во внимание уравнение Клапейрона–Клаузиуса $dE = EL/(R_w T^2)dT$, где L – скрытая теплота конденсации или сублимации.

Уравнение теплового баланса системы запишем в виде [3, стр. 17]:

$$C_V \frac{dT}{dt} + P\frac{dV}{dt} + L\frac{dq}{dt} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) и вышеуказанные термодинамические условия описывают равновесную термодинамику смеси, что обеспечивает определение всех ее термодинамических параметров. Так, для термодинамической скорости звука в смеси получаем формулу [1, 2]

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = RT \frac{1 + \dfrac{L^2 q}{C_P R_w T^2}}{\dfrac{C_V}{C_P} - \dfrac{Lq}{C_P T} + \dfrac{L^2 q}{C_P R_w T^2}}. \quad (2)$$

Адиабатические распределения термодинамических параметров по высоте вычисляются на основе приведенных соотношений с использованием уравнения статики. Они должны использоваться в качестве основного состояния при исследовании вопросов линейной или нелинейной устойчивости гидродинамических течений в рассматриваемой системе. Так, адиабатические профили вертикального распределения температуры и плотности второй компоненты определяются в результате интегрирования системы следующих дифференциальных уравнений:

$$\gamma_a = \frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\dfrac{R}{C_P} + \dfrac{Lq}{C_P T}}{1 + \dfrac{L^2 q}{C_P R_w T^2}}, \quad (3)$$

$$\gamma_q = \frac{1}{q}\frac{dq}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\dfrac{R}{R_w}\dfrac{L}{C_P T} - 1}{1 + \dfrac{L^2 q}{C_P R_w T^2}}. \quad (4)$$

Распределения давления и плотности первой газовой компоненты и давления второй компоненты определяются выражениями

$$\gamma_P = -\frac{g}{RT}, \quad \gamma_\rho = -\frac{g}{c^2}, \quad \gamma_E = \frac{L}{R_w T}\gamma_a. \quad (5)$$

Линеаризация полной системы уравнений гидродинамики на фоне основного состояния (2)–(5) приводит к следующей системе:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -l\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = l\Psi - p, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + gp\right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\Delta_\perp \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma c^2 \chi + c^2 \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (10)$$

Здесь $l = 2\Omega$ – параметр Кориолиса, $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по горизонтальным координатам, и вслед за [4, стр. 178] мы ввели обозначения:

$$\overline{\rho} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \overline{\rho} v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \overline{\rho} w = \chi,$$

где u, v, w – компоненты поля скорости среды, соответствующие декартовым координатам x, y, z (ось z направлена вертикально вверх). В этих обозначениях величина $\chi(x, y, z, t)$ принимает смысл вертикального потока массы газов системы. Стационарные термодинамические поля основного состояния так же как в монографии [4] обозначены черточкой над соответствующей буквой, а буквы без черточек описывают линейные поправки к соответствующим стационарным полям. Параметр состояния теплового режима γ описывает некоторое отличие фактического профиля температуры γ_T от адиабатического (3) $\gamma_T = \gamma_a + \gamma$. В случае конвекции $\gamma < 0$.

Отметим, что система (6)–(10) формально совпадает с линеаризованной системой уравнений динамики атмосферы в бездиссипативном приближении, и используется в монографии [4] для описания распространения звуковых и внутренних волн в "сухой" атмосфере. Однако в случае межфазного равновесия одной из газовых компонент вертикальные распределения термодинамических параметров системы газов могут приобретать особенности, существенно влияющие на спектральные характеристики задачи.

Систему дифференциальных уравнений (6)–(10) можно несколько упростить, вводя вместо производных по времени инкремент Γ, а вместо производных по горизонтальным координатам — горизонтальное волновое число k. Исключая последовательно зависимые функции и считая скорость звука функцией от вертикальной координаты, получим обыкновенное дифференциальное (по координате z) уравнение второго порядка для вертикального потока массы $\chi(z)$:

$$\chi'' + f_1(z)\chi' + f_2(z)\chi = 0, \quad (11)$$

где

$$f_1(z) = \gamma + \frac{g}{c^2} + \frac{\Gamma^2 + l^2}{\Gamma^2 + l^2 + c^2 k^2} r,$$

$$f_2(z) = \gamma r - \frac{\Gamma^2}{c^2}\left(1 + \frac{c^2 k^2}{\Gamma^2 + l^2}\right) - \frac{\gamma c^2 k^2 r}{\Gamma^2 + l^2 + c^2 k^2} - \frac{\gamma g k^2}{\Gamma^2 + l^2},$$

$$r(z) = \frac{(c^2)'}{c^2}.$$

Уравнение (11) можно преобразовать в уравнение, не содержащее слагаемого с первой производной, вводя новую зависимую функцию $U(z)$:

$$\chi(z) = U(z) \exp\left(-\int \frac{f_1(z)}{2} dz\right),$$
$$U'' + \left\{-\frac{f_1'}{2} - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2 + f_2\right\} U = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) для функции $U(z)$ имеет вид стационарного уравнения Шредингера, переменный коэффициент при свободном члене в этом уравнении часто называют потенциалом [5, стр. 99]. Выделяя принципиальную часть задачи, рассмотрим случай слабой неустойчивости, когда можно пренебречь старшими степенями инкремента. Ограничимся также случаем слабой зависимости скорости звука от высоты, так чтобы можно было пренебречь квадратом первой производной от скорости звука и второй производной по сравнению с первой. При этих предположениях уравнение Шредингера существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{U''}{U}+\frac{g}{2c^2}r(z)-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{g}{c^2}+\gamma\right)^2+ 2r(z)\left(\frac{g}{c^2}+\gamma\right)\frac{\Gamma^2+l^2}{\Gamma^2+l^2+c^2k^2}\right)- \frac{\gamma g k^2}{\Gamma^2+l^2}-\frac{\Gamma^2}{c^2}\left(1+\frac{c^2k^2}{\Gamma^2+l^2}\right)=0. \quad (13)$$

Как хорошо известно, собственные функции и собственные значения уравнения Шредингера можно найти аналитически только для весьма ограниченного набора потенциалов. Уравнение (13) можно привести к такому типу, если приближенно принять на некоторой высоте вертикальное распределение относительной плотности второй газовой компоненты в виде экспоненты $q(z)=q_0\exp(-\gamma_{q_0}z)$, где γ_{q_0} определяется локально на основе адиабатического распределения (4). Тогда квадрат скорости звука выражается в терминах гиперболических функций

$$c^2=\frac{RT}{2}\frac{C_P}{C_V}\left[\left(1+\frac{C_V/C_P}{1-R_wT/L}\right)+ \left(1-\frac{C_V/C_P}{1-R_wT/L}\right)\operatorname{th}\frac{\gamma_{q_0}(z-z_0)}{2}\right].$$

Координата $z_0=\gamma_{q0}^{-1}\ln\left(\frac{L^2q_0}{C_VR_wT^2}-\frac{Lq_0}{C_VT}\right)$ имеет смысл некоторого уровня, расположенного вблизи наиболее существенного изменения скорости звука с высотой. Рассматриваемая неустойчивость, очевидно, будет локализована вблизи этого уровня. В дальнейшем для упрощения будем отсчитывать вертикальную координату от этого уровня. Тогда величина q_0 принимает смысл относительной плотности второй (малой) компоненты на этой высоте.

Параметр $r(z)$ в этом случае определяется выражением (считаем $L\gg R_wT$):

$$r(z)\approx\frac{1}{2}\gamma_{q_0}r_0\operatorname{ch}^{-2}(\gamma_{q0}z/2),\quad r_0=\frac{1}{2}\left(\frac{C_V}{C_P}\right).$$

В результате уравнение Шредингера принимает вид

$$U''+\left(\frac{A}{\operatorname{ch}^2\alpha z}-E\right)U=0, \quad (14)$$

для которого известно аналитическое решение [5]

$$U=(1-\operatorname{th}^2\alpha z)^{\varepsilon/2}F(\varepsilon-s,\varepsilon+s+1,\varepsilon+1,0.5(1-\operatorname{th}\alpha z)).$$

Здесь $F(a,b,c,d)$ – гипергеометрическая функция,

$$\varepsilon=\frac{1}{\alpha}\sqrt{E},\qquad s=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4A}{\alpha^2}}\right).$$

Решения, конечные при $z\to-\infty$, получатся, если принять $\varepsilon-s=-n$, где $n=0,1,2,\ldots$ Тогда функция F примет вид полиномов степени n. Соответствующие собственные значения равны

$$E_n=\frac{\alpha^2}{4}\left((1+2n)-\sqrt{1+\frac{4A}{\alpha^2}}\right)^2.$$

Для низшей моды $n=0$. В случае "мелкой ямы" решение, соответствующее дискретному спектру, характеризуется единственной собственной функцией

$$U_0=\frac{\alpha^2}{A}\left(1-\operatorname{th}^2\alpha z\right)^{A/2\alpha^2},\qquad \varepsilon\approx\frac{A^2}{\alpha^2}.$$

Собственное значение в этом случае определяется как $E_0=A^2/\alpha^2$ и располагается вблизи "верха потенциальной ямы" [5]. Тогда выражение для квадрата инкремента слабой неустойчивости, в котором учтены лишь линейные слагаемые по параметрам l^2, γ и r_0^2 принимает вид

$$\Gamma^2=-\gamma g+\left[r_0^2\frac{g}{c^2}-10\gamma-\frac{g}{c^2}\right]\frac{gl^2}{4c^2k^2}. \quad (15)$$

Правая часть выражения (15) состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое — γg связано с конвекцией (в случае конвекции $\gamma<0$), а второе при положительной определенности выражения в квадратных скобках описывает новую неустойчивость. Эту неустойчивость можно назвать вращательной, поскольку соответствующее слагаемое пропорционально параметру Кориолиса. Инкремент вращательной неустойчивости в рассматриваемом случае определяется кривизной профиля скорости звука, вращением системы отсчета и стратификацией среды. При увеличении силы Кориолиса и горизонтальных размеров возмущения вращательная неустойчивость может доминировать над конвективной, которая в этих условиях, как известно, проявляется слабее. Положительная определенность выражения в квадратных скобках подразумевает, что первые два члена в нем превалируют над последним, которое описывает адиабатическое распределение плотности первой газовой компоненты (5). Таким образом, вращательная неустойчивость может проявиться, если суммарный эффект аномалии распределения скорости звука и конвективного профиля превзойдет некоторое значение. В противном случае появятся осцилляции аналогичной природы. Это определяет порог вращательной неустойчивости даже в отсутствие эффектов диссипации. Напомним, что упрощенное выражение для инкремента (15) получено в предположении слабой неустойчивости и соответствует случаю, когда положительные факторы в квадратных скобках выражения (15) незначительно превышают отрицательные.

Отвлекаясь от эффектов диссипации, мы не можем трактовать конвективную неустойчивость и, следовательно, слагаемое $-\gamma g$ в выражении (15). Поэтому рассмотрим случай достаточно больших горизонтальных размеров возмущения и значений параметра Кориолиса, чтобы иметь возможность говорить о вращательной неустойчивости непосредственно. Предполагая также значение конвективного профиля имеющим порядок $|\gamma| \sim 0.1g/c^2$ (так, чтобы второе и третье слагаемые в квадратных скобках компенсировали друг друга), получим еще более упрощенное выражение для инкремента вращательной неустойчивости, связанное только с кривизной профиля скорости звука:

$$\Gamma \approx \left(1 - \frac{C_V}{C_P}\right) \frac{g}{c^2} \frac{\Omega}{k}. \tag{16}$$

Формула (16) показывает, что вращательная неустойчивость существенно связана с вращением системы отсчета, в которой она развивается. Механизм неустойчивости оказывается обусловленным возникновением положительной обратной между вертикальным потоком газовой смеси и связи вертикальным перепадом давления. Эффект проявляется наиболее сильно в области максимума производной вертикального распределения скорости звука. Легко видеть, что рассмотренная в работе система газов описывает влажную тропическую атмосферу, если под первой газовой компонентой понимать сухой воздух, а под второй — насыщенный водяной пар. В этом случае вращательная неустойчивость трактует развитие в тропической атмосфере вихревых крупномасштабных структур типа тропического циклона. Тогда формулу (16) можно применить для оценки времени развития этих структур. Такого рода оценка, выполненная для типичных параметров тропической атмосферы, имеет порядок одних суток. Таким образом, можно думать, что обнаружена настоящая неустойчивость, лежащая в основе возникновения тропических циклонов, и их описание на основе этой новой неустойчивости окажется свободным от многих трудностей, возникающих при использовании для этих целей других неустойчивостей, например, конвективной или условной неустойчивости второго рода (CISK).

В заключение следует отметить, что в работе рассмотрен один из простейших (допускающий аналитическое исследование) вариантов вращательной неустойчивости. Более полный анализ требует включения в уравнение Шредингера вторых производных от скорости звука по высоте и квадратов первых производных, что резко усложняет нахождение собственных значений. Учет конвекции и, следовательно, диссипации еще более усугубляет положение и требует для своего исследования обширных численных расчетов. Вопросы такого рода будут рассмотрены в последующих работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-05-64372).

Поступила в редакцию 5 сентября 2001 года

References

[1] Руткевич П.Б. Гидродинамическое движение насыщенного воздуха в терминах равновестной гидродинамики // Электромагнитные явления – 1998. – Т.1, N 4. – С. 538–544.

[2] Руткевич П.Б. Гидродинамика. Сборник научных статей. – Пермь: Изд. ПГУ. – 1998. – Вып. 11. – С. 249–253.

[3] Атмосфера (Справочник под ред. Ю.С.Седунова). – Л.: Гидрометеоиздат. – 1991. – 508 с.

[4] Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы – Л.: Гидрометеоиздат. – 1988. – 178 с.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика – М.: Наука. – 1989. – 767 с.