

## О механизмах насыщения циклотронных неустойчивостей электронного пучка в волноводах

### Содержание

1. Введение	490
2. Уравнения, описывающие возбуждение ТЕ волны	491
3. Уравнения, описывающие возбуждение ТМ волны	492
4. Интегралы систем уравнений	494
5. Оценка эффективности возбуждения колебаний в волноводе	494
Приложение	496

### Abstract

Systems of non-linear equations, which describe excitation of electromagnetic TE and TM waves in a cylindrical waveguide by an electron beam, are shown to have the same first integrals. This leads to similarity of mechanisms of damping of wave amplitude growth. The analysis of the integrals shows that for the values  $R = k_z^2 \cdot \omega_B / k_\perp^2 \cdot \delta$  ( $k_z$  and  $k_\perp$  are longitudinal and transversal wave numbers,  $\omega_B$  and  $\delta$  are cyclotron frequency and linear increment of instability) which are greater than unity the damping of field amplitude takes place at the expense of the longitudinal velocity of particles. If  $R \ll 1$  the damping of amplitude growth takes place at the expense of change in the particle Larmor radius. Estimates of maximally accessible energy in the wave depending on the parameter value  $R$  are obtained. It is shown that the efficiency or the ratio of energy stored in the wave to the initial energy of the beam for arbitrary but not very small  $R$  is of the order  $(\alpha/(\alpha+1)) \cdot (\omega/\omega_B) \cdot R^{-1} \cdot a_0^{-2}$ , where  $\omega$  is the wave frequency,  $\alpha$  is the ratio of initial transversal and longitudinal beam energies,  $a_0 = k_\perp r_{B0}$ ,  $r_{B0}$  is the initial Larmor radius of beam electrons. Under small values of  $R$  the efficiency is about of  $(\alpha/(\alpha+1)) \cdot (\omega/n\omega_B) \cdot (1 - x_{nk}^2/a_0^2)$ , where  $x_{nk}$  is the nearest to  $a_0$  root of Bessel function of the order  $m$  or its first derivative for TM and TE waves, respectively.

### 1. Введение

Используемые в последнее время для изучения и анализа сложных электромагнитных систем численные эксперименты и прямое численное моделирование рассчитаны на дорогостоящие специальные компьютерные программы и серьезное оборудование. К сожалению, они не позволяют быстро изменять параметры и условия задач. Они не прозрачны относительно выявления физических механизмов процессов. Поэтому, имеет смысл большее внимание уделить анализу более простых моделей физических явлений для их качественного исследования. Эти модели дают возможность детально

разобраться в характере процессов, которые исследуются.

В настоящее время существует несколько подходов [1–9] к теоретическому описанию нелинейных режимов возбуждения колебаний пучками электронов, движущимися во внешнем магнитном поле, или, так называемыми, пучками осцилляторов — электронов. Ларморовский радиус вращения этих электронов меньше или порядка толщины пучка (причем электроны пучка достаточно равномерно заполняют плоский или цилиндрический слой). Научной школой А.В. Гапонова в СССР была разработано продуктивное описание возбуждения собственных колебаний волноводов в присут-

ствие внешнего магнитного поля пучком электронов с малыми в сравнении с неоднородностью поля значениями ларморовского радиуса [1–2]. Эта модель использовала относительно простую систему нелинейных уравнений. Множество реально работающих приборов рассчитывались именно на основе теоретической модели этой научной школы. Однако, стремительное развитие нелинейной физики и теоретической электродинамики, быстро продемонстрировало слабость этой модели.

Позднее появилась необходимость возбуждения пучками заряженных частиц циклотронных колебаний плазмы, для дальнейшего её нагрева, в основном для целей управляемого термоядерного синтеза. Это привело в Харькове к целому циклу работ по нелинейной теории возбуждения волн в магнитоактивной среде пучками заряженных частиц с конечными значениями ларморовского радиуса (см. в частности, [3–6]).

В работе [5] было показано, что законы сохранения спонтанных элементарных классических эффектов аномального и нормального Доплера выполняются и для более сложных пучковых систем с вынужденным излучением. Именно это обстоятельство подтвердило конструктивность подходов работ [3–5], к формированию нелинейной теории обсуждаемых явлений. Подобные оригинальные описания нелинейных процессов возбуждения колебаний пучками заряженных частиц, которые больше опираются на подходы [3–6] и где основное внимание было уделено учету релятивистских эффектов и ограниченности резонансных систем были предложены позднее [7,9].

В данной работе авторы основное внимание уделяют качественному анализу систем нелинейных уравнений, описывающих возбуждение электронными пучками с конечным ларморовским радиусом электромагнитных волн различной поляризации в круглом цилиндрическом волноводе. Как для системы уравнений, описывающей ТМ волну, так и для системы уравнений, описывающей ТЕ волну, существуют интегралы одного вида, что как показано ниже, свидетельствует о подобии механизмов насыщения неустойчивостей с возбуждением каждой из волн. Показано, что в зависимости от значений параметра  $R$ , характер насыщения каждой из неустойчивостей может определяться изменениями или продольной скорости, или среднего значения ларморовского радиуса частиц пучка. Обсуждаются механизмы насыщения при различных значениях параметра  $R$ . Рассмотрены случаи, так называемых, временной и пространственной (граничной) задач. Обнаруженное изменение величины  $R$  в пространственной задаче приводит к сдвигу границы между областями применимости обсуждаемых механизмов насыщения неустойчивостей. Приведены оценки достигаемой мощности и КПД для протяженной волноводной системы.

## 2. Уравнения, описывающие возбуждение ТЕ волны

Рассмотрим прежде возбуждение ТЕ волны в гладком металлическом цилиндрическом волноводе радиуса  $r_w$ . Ниже используем цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ . Дисперсионное уравнение, описывающее зависимость частоты волны  $\omega$  от продольного и поперечного волновых чисел  $k_z$  и  $k_\perp$ , соответственно, имеет вид<sup>1</sup>.

$$D(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{k_z^2 + k_\perp^2 - \omega^2/c^2}{k_z^2 - \omega^2/c^2} = 0, \quad (1)$$

а составляющие электромагнитного поля волны могут быть представлены в виде

$$(B_z, B_\theta, E_r) = \left( 1, -k_z \frac{m}{rk_\perp^2}, -\omega \frac{m}{crk_\perp^2} \right) \times bJ_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (2)$$

$$(B_r, E_\theta) = \left( -i \frac{k_z}{k_\perp}, -i \frac{\omega}{ck_\perp} \right) \times bJ_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (3)$$

где  $b$  – комплексная амплитуда волны,  $m$  – целое число,  $J_m(x)$  и  $J'_m(x) = dJ_m(x)/dx$  – функция Бесселя и её производная. Требование обращения в нуль составляющей поля  $E_\theta$  на границе волновода определяет значения поперечного волнового числа  $k_\perp = k_{ms} = x_{ms}/r_w$ , причем  $x_{ms}$  –  $s$ -корень уравнения  $dJ_m(x)/dx = 0$ .

Электронный пучок – нерелятивистский и слабый, то есть, собственными полями пучка в уравнениях движения частиц можно пренебречь.

Пучок электронов занимает цилиндрический слой в сечении волновода. Для определенности будем считать его достаточно тонким, полагая, что все центры ларморовского вращения электронов находятся на одном расстоянии от оси волновода.

Для перехода в систему координат, центр которой совпадает с центром вращения отдельного электрона пучка (см. Приложение рис. 1), то есть  $(R, \Phi, z)$  можно воспользоваться следующими соотношениями (см., например, [10]):

$$\begin{aligned} b_z &= B_z, \\ b_\Phi &= B_\theta \sin(\Phi - \theta) + B_r \cos(\Phi - \theta), \\ b_R &= -B_\theta \cos(\Phi - \theta) + B_r \sin(\Phi - \theta), \\ e_R &= -E_\theta \cos(\Phi - \theta) + E_r \sin(\Phi - \theta), \\ e_\Phi &= E_\theta \sin(\Phi - \theta) + E_r \cos(\Phi - \theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользовавшись значениями величин (2) и (3), найдем значения компонент электромагнитного по-

<sup>1</sup>Выбор такого дисперсионного уравнения определяется представлением плотности энергии волны в форме  $(\partial_\omega D(\omega, \mathbf{k})/\partial\omega)|_{B_z}^2$ .

ля в системе координат с центром вращения отдельного электрона (см. Приложение):

$$(b_z, b_\Phi, e_R) = b \sum_q J_q(k_{ms}r_c) J_{m+q}(k_{ms}r_B) \times \exp(-i\omega t + ik_z z + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times \left[ 1, -\frac{k_z(m+q)}{k_{ms}^2 r_B}, -\frac{\omega(m+q)}{k_{ms} c r} \right], \quad (5)$$

$$(b_R, e_\Phi) = b \sum_q J_q(k_{ms}r_c) J'_{m+q}(k_{ms}r_B) \times \exp(-i\omega t + ik_z z + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times [ik_z/k_{ms}, -i\omega/(k_{ms} \cdot c)]. \quad (6)$$

Легко видеть, что в данном случае  $\Phi_c = \Phi_{c0} + \omega_B t$ , где  $\Phi_{c0}$ ,  $\Phi_0$  медленно изменяющиеся фазы, вообще говоря, сохраняющие информацию о начальном положении частицы,  $z = z_0 + v_z t$ . В случае резонанса частиц пучка с волной

$$\omega - k_z v_z \approx n\omega_B, \quad (7)$$

где  $\omega_B = eB/mc$  – электронная циклотронная частота, выполняется соотношение  $m + q = n$  и в выражениях (5) и (6) можно удерживать только резонансные члены:

$$(b_z, b_\Phi, e_R) = b J_{m-n}(k_{ms}r_c) J_n(a) \exp(-2i\pi\zeta) \times \left[ 1, -\frac{k_z n}{k_{ms} a}, -\frac{\omega n}{k_{ms} c r} \right], \quad (8)$$

$$(b_R, e_\Phi) = b J_{m-n}(k_{ms}r_c) J'_n(a) \exp(-2i\pi\zeta) \times [ik_z/k_{ms}, -i\omega/(k_{ms} c)], \quad (9)$$

где  $\zeta = (2\pi)^{-1}[-\omega t + k_z z + n\omega_B t + m\Phi_0 + (n-m)\Phi_{c0} + \pi m/2]$ ,  $a = k_{ms}r_B$ ,  $r_B = v_\Phi/\omega_B$  – ларморовский радиус частицы пучка. Можно (см. Приложение) показать, что уравнение для поля волны принимает вид

$$\omega D(\omega, \mathbf{k}) b + i \left[ \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial k_z} \frac{\partial b}{\partial z} \right] = i \left[ \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right] \left\{ \frac{\partial b}{\partial t} + v_g \frac{\partial b}{\partial z} - i\Delta b + \Theta b \right\} = 4i [r_w^2 b^* J_m^2(x_{ms}) (1 - m^2/x_{ms}^2)]^{-1} \times \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{J} \mathbf{E}^*. \quad (10)$$

Таким образом, возбуждение ТЕ волны в волноводе пучком заряженных частиц может быть описано уравнением (10), где для групповой скорости колебаний  $v_g$ , расстройки  $\Delta$  и декремента затухания волны в отсутствие пучка  $\Theta$  справедливы выражения  $v_g = -\frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial k_z} / \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega}$ ,  $\Delta = \frac{\omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega}$ ,  $\Theta = \frac{\text{Im} \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega}$ ,  $b = |b| \exp(i\varphi)$

– комплексная амплитуда. Для энергии волны на единицу длины волновода справедливо выражение

$$W_E = (8\pi)^{-1} \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \times |b|^2 \pi r_w^2 J_m^2(x_{ms}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{ms}^2} \right). \quad (11)$$

В однородном протяженном волноводе уравнение (10) упрощается и может быть представлено в виде

$$\left( \frac{d}{d\tau} - i\Delta_\delta + \Theta_\delta \right) \mathcal{E}_e \exp(i\varphi_e) = iN^{-1} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) \exp(-2i\pi\zeta_j), \quad (12)$$

где  $N$  – число частиц, моделирующих пучок. Уравнения движения для частиц пучка можно представить следующим образом:

$$2\pi \frac{d\zeta}{d\tau} = \eta - n\mathcal{E}_e J_n(a) [1 - n^2/a^2] \times \cos(2\pi\zeta + \varphi_e), \quad (13)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -R\mathcal{E}_e a J'_n(a) \sin(2\pi\zeta + \varphi_e)$$

$$\frac{da}{dt} = -n\mathcal{E}_e J'_n(a) \sin(2\pi\zeta + \varphi_e),$$

где  $\tau = \delta_e t$ ,  $\delta_e^2 = 4N_{b0} e^2 \omega_B [m_e c^2 k_{ms}^2 r_w^2 J_m^2(x_{ms}) (1 - m^2/x_{ms}^2) D_\omega]^{-1} [J_{m-n}(k_{ms}r_c)]^2$ ,  $R_e = k_z^2 \omega_B / k_{ms}^2 \delta_e$ ,  $\mathcal{E}_e = eb J_{m+n}(k_{ms}r_c) / m_e c \delta_e$ ,  $\eta = (k_z v_z - \omega + n\omega_B) / \delta_e$ ,  $N_{b0}$  – количество частиц невозмущенного пучка на единицу длины. Уравнение (10) удобно представить в виде двух уравнений для амплитуды  $\mathcal{E}_e$  и фазы  $\varphi_e$  волны, соответственно

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} - \Theta_\delta \mathcal{E}_e =$$

$$N^{-1} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) \sin(2\pi\zeta_j + \varphi_e), \quad (14)$$

$$\mathcal{E}_e \frac{d\varphi_e}{d\tau} - \Delta_\delta \mathcal{E}_e =$$

$$N^{-1} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) \cos(2\pi\zeta_j + \varphi_e), \quad (15)$$

где  $\Theta_\delta = \Theta/\delta_e$ ,  $\Delta_\delta = \Delta/\delta_e$ .

### 3. Уравнения, описывающие возбуждение ТМ волны

Получим систему нелинейных уравнений, которая описывает возбуждение электронным пучком ТМ волны в цилиндрическом гладком металлическом волноводе радиуса  $r_w$ . Дисперсионное уравнение, определяющее зависимость частоты волны от волнового вектора колебаний в отсутствие электронного пучка совпадает с (1). Составляющие электромагнитного поля ТМ волны могут

быть представлены в виде:

$$(E_z, E_\theta, B_r) = \left( 1, m \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{r k_z}, -\omega m \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c r k_z^2} \right) \times h J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + i k_z z + i m \theta), \quad (16)$$

$$(E_r, B_\theta) = \left( -i k_\perp \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{k_z}, -i k_\perp \omega \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c k_z^2} \right) \times h J'_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + i k_z z + i m \theta), \quad (17)$$

где  $h$  – комплексная амплитуда волны, остальные обозначения прежние. Поперечное волновое число  $k_\perp = k_{ms} = x_{ms}/r_w$  определяется из требования обращения в нуль тангенциальных составляющих поля на границе волновода, причем  $x_{ms}$  –  $s$ -корень уравнения  $J_m(x_{ms}) = 0$ .

Пусть также как и в предыдущем случае пучок электронов занимает цилиндрический слой в сечении волновода, причем все центры ларморовского вращения электронов находятся на одном расстоянии от оси волновода. При переходе в систему координат, центр которой совпадает с центром вращения отдельного электрона пучка воспользуемся соотношениями (4), где  $b_z$  и  $z$  следует заменить на  $z$  и  $z$  соответственно. Значения компонент электромагнитного поля в системе координат вращения отдельного электрона имеют вид:

$$(e_z, e_\Phi, b_R) = h \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J_{m+q}(k_{ms} r_B) \times \exp(-i\omega t + i k_z z + i m \Phi + i q \Phi_c + i \pi m/2) \times \left( 1, (m+q) \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{r_B k_z}, -\omega(m+q) \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c r_B k_z^2} \right), \quad (18)$$

$$(e_R, b_\Phi) = h \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J'_{m+q}(k_{ms} r_B) \times \exp(-i\omega t + i k_z z + i m \Phi + i q \Phi_c + i \pi m/2) \times \left( -i k_\perp \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{k_z}, -i k_\perp \omega \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c k_z^2} \right). \quad (19)$$

Так как  $\Phi_c = \Phi_{c0} + \omega_B t$ ,  $\Phi = \Phi_0 + \omega_B t$ ,  $z = z_0 + v_z t$ , то в случае резонанса частиц пучка с волной (7) выполняется соотношение  $m + q = n$  и в выражениях (18) и (19), как и предыдущем случае, удерживаем только резонансные члены:

$$(e_z, e_\Phi, b_R) = h J_{m-n}(k_{ms} r_c) J_n(a) \exp(-2i\pi\zeta) \times \left( 1, n \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{r_B k_z}, -\omega n \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c r_B k_z^2} \right) \quad (20)$$

$$(e_R, b_\Phi) = h J_{m-n}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \exp(-2i\pi\zeta) \times \left( -i k_{ms} \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{k_z}, -i k_{ms} \omega \frac{(1 - \omega^2/c^2 k_z^2)^{-1}}{c k_z^2} \right), \quad (21)$$

где использованы обозначения из предыдущего раздела.

Можно показать, что уравнение для поля волны принимает вид

$$\omega D(\omega, \mathbf{k}) + i \left[ \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial k_z} \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \left[ \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_g \frac{\partial h}{\partial z} - i \Delta h + \Theta h \right\} = 4i [r_w^2 b^* J_m^2(x_{ms})]^{-1} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{J} \mathbf{E}^*. \quad (22)$$

Таким образом, возбуждение ТМ волны в волноводе пучком заряженных частиц может быть описано уравнением (22), где для групповой скорости колебаний  $v_g$  расстройки  $\Delta$  и декремента затухания волны в отсутствие пучка  $\Theta$  справедливы выражения  $v_g = -\frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial k_z}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega}$ ,  $\Delta = \frac{\omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega}$ ,

$\Theta = \frac{\text{Im } \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega}$ ,  $h = |h| \exp(i\varphi)$  – комплексная амплитуда.

Отметим, что для энергии волны на единицу длины волновода в этом случае справедливо выражение

$$W_E = (8\pi)^{-1} \frac{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} |h|^2 \pi r_w^2 J_m^2(x_{ms}). \quad (23)$$

В однородном протяженном волноводе уравнение (22) упрощается и может быть представлено в виде

$$\left( \frac{d}{d\tau} - i\Delta_\delta + \Theta_\delta \right) \mathcal{E}_h \exp(i\varphi) = N^{-1} \sum_{j=1}^N J_n(a_j) \exp(-2i\pi\zeta_j), \quad (24)$$

где  $N$  – число частиц, моделирующих пучок. Уравнения движения для частиц пучка можно представить следующим образом:

$$2\pi \frac{d\zeta}{d\tau} = \eta + n \mathcal{E}_h J'_n(a) \sin(2\pi\zeta + \varphi_h), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -R_h \mathcal{E}_h J_n(a) \cos(2\pi\zeta + \varphi_h), \quad \frac{da}{d\tau} = -\frac{n}{a} \mathcal{E}_h J_n(a) \cos(2\pi\zeta + \varphi_h), \quad (25)$$

где  $\tau = \delta_h t$ ,

$$\delta_h^2 = 4N_{b0} e^2 [m_e r_w^2 J_m^2(x_{ms}) D_\omega]^{-1} \times (k_{ms}^2 / k_z^2 \omega_B) [J_{m-n}(k_{ms} r_c)]^2,$$

$$R_h = k_z^2 \omega_B / k_{ms}^2 \delta_h,$$

$$\mathcal{E}_h = e J_{m+n}(k_{ms} r_c) (k_{ms}^2 / k_z \omega_B) h / m_e \delta_h,$$

$\eta = (k_z v_z - \omega + n \omega_B) / \delta_h$ ,  $N_{b0}$  – количество частиц невозмущенного пучка на единицу длины. Уравнение (24) можно представить в виде двух уравнений для амплитуды  $\mathcal{E}_h$  и фазы  $\varphi_n$  волны, соответственно

$$\frac{d\mathcal{E}_h}{d\tau} - \Theta_\delta \mathcal{E}_h = N^{-1} \sum_{j=1}^N J_n(a_j) \cos(2\pi\zeta_j + \varphi_h), \quad (26)$$

$$\mathcal{E}_h \frac{d\varphi_h}{d\tau} - \Delta_\delta \mathcal{E}_h = N^{-1} \sum_{j=1}^N J_n(a_j) \sin(2\pi\zeta_j + \varphi_h), \quad (27)$$

здесь  $\Theta_\delta = \Theta / \delta_h$ ,  $\Delta_\delta = \Delta / \delta_h$ .

Отметим, что при замене  $\varphi_h$  на  $\varphi_h + \pi/2$  система уравнений (25)–(27) сводится к рассмотренной в работах [4,5]. В отличие от этих работ [4,5], где подобное описание было применено к системе уравнений, описывающей возбуждение квазиэлектростатических волн в протяженной волноводной системе, данные волны – электромагнитные.

#### 4. Интегралы систем уравнений

Замечательным обстоятельством является существование у двух систем уравнений одинаковых интегралов. Так, можно показать, что аналогично тому, как это сделано в работе [5], для каждой частицы пучка существует следующий интеграл систем уравнений (13) и (25):

$$Ra^2 - 2n\eta = Const. \quad (28)$$

Кроме этого, существуют интегралы полных систем уравнений (13)–(15) и (25)–(27):

$$|\mathcal{E}|^2 - (2/R)N^{-1} \sum_{j=1}^N \eta_j = Const, \quad (29)$$

$$|\mathcal{E}|^2 - n^{-1}N^{-1} \sum_{j=1}^N a_j^2 = Const. \quad (30)$$

Для изменений поперечной

$$\Delta W_\perp = N_{b0}N^{-1} \sum_{j=1}^N m_e (v_{\phi j}^2 - v_{\phi 0j}^2) / 2, \quad (31)$$

и продольной

$$W_\parallel = N_{b0}N^{-1} \sum_{j=1}^N m_e (v_z - v_{z0})v_{z0}, \quad (32)$$

кинетической энергии частиц пучка (на единицу его длины), а также изменений энергии колебаний (на единицу длины волновода)

$$\Delta W_E = W_E - W_{E0} \quad (33)$$

справедливы соотношения, имеющие смысл количества квантов, которыми обмениваются частицы пучка с волной:

$$\Delta W_E / \omega = \Delta W_\perp / \omega_B = \Delta W_\parallel / k_z v_{z0}. \quad (34)$$

#### 5. Оценка эффективности возбуждения колебаний в волноводе

Проанализируем механизмы ограничения роста амплитуды волны для вакуумного волновода, возбуждаемого пучком электронов. Поскольку рост амплитуды волны возможен только для положительных значений  $n > 0$  (соответствующего нормальному эффекту Доплера), то источником энергии для возбуждения колебаний является кинетическая энергия движения частиц пучка в продольном и поперечном направлениях. Под поперечным движением здесь следует понимать вращение частиц под воздействием внешнего магнитного поля. Для возбуждения электромагнитных волн каждой из двух поляризаций (фазовая скорость которой превышает скорость света в вакууме) в гладком вакуумном волноводе представляет интерес только случай, когда величина  $(0) = |_{t=0}$  принимает конечные значения.

Системы уравнений (13)–(15) и (25)–(27) описывают резонансное взаимодействие электромагнитных ТЕ и ТМ волн, соответственно, со спиральными возмущениями плотности пучка. В этом случае амплитуда каждой из волн растет за счет уменьшения продольной и поперечной энергии частиц пучка. Отношение вкладов поперечного и продольного движения электронов в возбуждение колебаний, согласно интегралам (28)–(30) и выражениям (34), порядка  $n\omega_B / k_z v_{z0}$ . Параметром, который определяет преимущественный механизм ограничения роста энергии волны является  $R$ .

1. При  $R \gg 1$  согласно (28), изменения величины  $\eta$  (в начальный момент  $\eta = \eta_0 = 0$ ) порядка единицы [11,12], кстати вполне достаточные для срыва процесса возбуждения волны (за счет захвата частиц в её потенциальную яму), приведут к значительно меньшим изменениям порядка  $(2n/R)^{1/2}$ . Если изменяется мало, то аргумент Функций Бесселя можно считать постоянным. В этих условиях системы уравнений (13)–(15) и (25)–(27) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\eta}{2\pi}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\mathcal{E}_1 \sin(S\pi\zeta + \varphi_1), \quad (35)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{d\tau} - \Theta_\delta \mathcal{E}_1 = N^{-1} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi\zeta_j + \varphi_1), \quad (36)$$

$$\mathcal{E}_1 \frac{d\varphi_1}{d\tau} - \Delta_\delta \mathcal{E}_1 = N^{-1} \sum_{j=1}^N \cos(2\pi\zeta_j + \varphi_1), \quad (37)$$

где для ТЕ волны

$$\mathcal{E}_1 \exp(i\varphi_1) = [k_z^2 \omega_B e / k_{ms}^2 m_e c \delta_1^2] b J_{m-n}(k_{ms} r_c) J'_n(a_0) a_0,$$

величину  $\delta_e$  в остальных выражениях следует заменить на  $\delta_1$ , где

$$\delta_1^3 = 4N_{b0} e^2 k_z^2 v_{z0}^2 \times [m_e c^2 k_{ms}^2 r_w^2 J_m^2(x_{ms}) (1 - m^2/x_{ms}^2) D_\omega]^{-1} \times [J_{m-n}(k_{ms} r_c) J'_n(a_0)]^2. \quad (38)$$

Максимальная энергия электромагнитной волны на единице длины волновода, достигаемая в этом случае, определяется из оценки  $\mathcal{E}_1 \sim 1$  или

$$W_E \sim W_{z0} (\delta_1 \omega / k_z^2 v_{z0}^2), \quad (39)$$

для ТМ волны

$$\mathcal{E}_1 \exp(i\varphi_1) = [k_z e / m_e \delta_1^2] h J_{m_n}(k_{ms} r_c) J_n(a_0),$$

величину  $\delta_h$  в остальных выражениях следует заменить на  $\delta_1$ , где

$$\delta_1^3 = 4N_{b0} e^2 [m_e r_w^2 J_m^2(x_{ms}) D_\omega]^{-1} \times [J_{m-n}(k_{ms} r_c) J_n(a_0)]^2. \quad (40)$$

Максимальная энергия электромагнитной волны на единице длины волновода, достигаемая в этом случае, определяется также из оценки  $\mathcal{E}_1 \sim 1$ . Оказывается и в этом случае остается справедливым выражение (39).

Изменения поперечной энергии  $\Delta W_\perp$  порядка  $(n\omega_B/\omega)W_E$ , при этом изменения  $^2$ , то есть  $|^2 - ^0| \sim n/R$  и достаточно малы.

**2.** Для произвольных, но не слишком малых  $R$  также оказывается справедливой оценка (39). Используя соотношения (28)–(34) и условие  $\eta \sim 1$  можно оценить коэффициент полезного действия, определяемый как отношение энергии волны к начальной энергии пучка, то есть

$$\frac{W_E}{W_{\parallel 0} + W_{\perp 0}} \sim [\alpha/(\alpha + 1)] (\omega/\omega_B) R^{-1} a_0^2, \quad (41)$$

где  $\alpha$  – отношение начальных поперечной и продольной энергии пучка, то есть  $\alpha = W_{\perp 0}/W_{\parallel 0}$ ,  $\alpha_0 = k_\perp r_{B0}$ ,  $r_{B0}$  – начальный ларморовский радиус электронов пучка.

**3.** При  $R \ll 1$ , изменения величины  $\eta$  согласно интегралу (15) практически не влияют на процесс ограничения роста энергии возбуждаемой пучком электромагнитной волны. Основным механизмом ограничения роста амплитуды волны является

изменение радиуса вращения электронов. Действительно, при приближении величины к корню  $x_{nk}$  уравнения  $dJ_n(x_{nk})/dx = 0$ , причем  $> x_{nk}$ , обмен энергией между электроном пучка и ТЕ волной сильно ослабляется. Для ТМ волны ослабление обмена энергией с частицами пучка наблюдается при приближении  $a$  к корню  $x_{nk}$  уравнения  $J_n(x_{nk}) = 0$ . Подобное явление было рассмотрено в работе [5]. Оценка максимальной амплитуды поля в уравнениях (13)–(15) и (25)–(27) может быть сделана при использовании интегралов (28)–(30)

$$|\mathcal{E}_{\max}|^2 \sim (a_0^2 - x_{nk}^2)/n, \quad (42)$$

где  $x_{nk}$  – ближайший к значению 0 корень функции  $J'_n(x_{nk}) = dJ_n(x_{nk})/dx$  в случае ТЕ волны и  $J_n(x_{nk})$  в случае ТМ волны. Отсюда можно получить оценку энергии электромагнитной волны на единицу длины волновода:

$$W_E \sim (W_{\perp 0} - W_{\perp k}) (\omega/n\omega_B), \quad (43)$$

где граничная поперечная энергия

$$W_{\perp k} = m_e (x_{nk} \omega_B / k_{ms})^2 / 2.$$

Коэффициент полезного действия, определяемый как отношение энергии волны к начальной энергии пучка, в этом случае порядка

$$\frac{W_E}{W_{\parallel 0} + W_{\perp 0}} \sim [\alpha/(\alpha + 1)] (\omega/\omega_B) \frac{a_0^2 - x_{nk}^2}{a_0^2 n}. \quad (44)$$

Отметим, что при небольших начальных значениях 0 величина убывает практически до нуля (граничная поперечная энергия  $W_{\perp k}$  при этом равна нулю).

Относительная эффективность возбуждения волн разной поляризации определяется отношением характерных обратных времен развития неустойчивостей

$$\delta_e/\delta_h = [(k_z h \omega_B r_w^2)/(x_{ms} x_{m's} c)] \times \{J'_{m'}(x_{m's}) J_m^{-1}(x_{ms}) (1 - m^2/x_{ms}^2)^{-1/2}\},$$

где  $x_{ms} = k_{ms} r_w$  – корень уравнения  $J'_m(x_{ms}) = 0$ ,  $x_{m's} = k_{m's} r_w$  – корень уравнения  $J'_{m'}(x_{m's}) = 0$ . Для  $k_z$  справедливо соотношение  $k_z = (v_{z0} \omega_B / c) + (\omega_B^2 - k_{ms}^2 c^2)^{-1/2}$ , которое есть следствием совместного решения дисперсионного уравнения и условия (7), причем здесь представлен случай нерелятивистского пучка и  $n = 1$ . Если отношение  $\delta_e/\delta_h$  превышает единицу, то преимущественно развивается неустойчивость с возбуждением ТЕ волны, в противном случае преимущество в развитии получает волна ТМ типа. Для выяснения преимущественного механизма ограничения амплитуд возбуждаемых волн можно воспользоваться отношением управляющих параметров

$$R_e/R_h = [(x_{ms}^{-1} x_{m's}^3 k_{ze}^2 c)/(k_{zh}^3 \omega_B r_w^2)] \times \{J'_{m'}(x_{m's}) J_m^{-1}(x_{ms}) (1 - m^2/x_{ms}^2)^{-1/2}\}^{-1}.$$

Вообще говоря, для формирования достаточно узких спектральных линий возбуждения или усиления колебаний дополнительно следует воспользоваться предварительной модуляцией пучка на выбранных частотах или тщательно подобрать резонансные условия.

В заключении отметим, что система уравнений, описывающая стационарное усиление ТЕ волны в режиме конвективной неустойчивости пучка электронов, при заданных на границе системы значениях амплитуды волны и параметров пучка практически совпадает с вышеприведенной (12)–(13), где следует сделать следующие замены:  $\tau \rightarrow \xi = \rho z$ ,  $\rho^2 = \delta_e'^2(k_z/\omega)(D_\omega/D_{kz})$ ,  $\eta \rightarrow \mu = (k_z/\rho)(1 - \omega/k_z v_z)$ ,  $R_e \rightarrow (1 - \lambda\mu)^2 R_z$ , где  $R_z = R_e(\delta'/\rho)(k_z/\omega)$ ,  $\mathcal{E}_e \rightarrow (1 - \lambda\mu)\mathcal{E}_z$ ,  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_e(\delta_e/\rho)(k_z/\omega)$  причем  $\lambda = \rho/k_z$  должно оставаться достаточно меньшим единицы, кроме того, для нормированных расстройки и декремента поглощения в отсутствие пучка  $\Delta_e \rightarrow \Delta' = \frac{\omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})/\partial k_z} \rho^{-1}$ ,  $\Theta_e = \Theta' = \frac{\text{Im} \omega D(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega D(\omega, \mathbf{k})/\partial k_z} \rho^{-1}$ . Аналогично преобразуется система уравнений (24)–(25) для ТМ волны для случая пространственного усиления.

В случае пространственного усиления соотношение (28) следует заменить на

$$\lambda R_z a^2 - 2n(1 - \lambda\mu)^{-1} = Const, \quad (45)$$

которое, при малых  $\lambda$ , переходит в (28). Кроме этого, существует интеграл полной системы уравнений (ср. с (29))

$$|\mathcal{E}_z|^2 - (\lambda R_z)^{-1} N^{-1} \sum_{j=1}^N (1 - \lambda\mu_j)^{-2} = Const. \quad (46)$$

Обратим внимание на тот факт, что в случае пространственного усиления параметр  $R_z$  отличается от  $R$  на величину  $(\delta/\rho)(k_z/\omega) = (D_{kz}/D_\omega)^{1/2}(k_z/\omega)^{1/2} = (v_{gz}/v_{\Phi z})^{1/2}$  где  $v_{gz}/v_{\Phi z}$  – отношение групповой скорости к фазовой скорости вдоль оси волновода, которое в ряде случаев может быть весьма мало. Это означает, что в этих условиях основным механизмом ограничения роста амплитуды будет изменение скорости вращения электронов пучка (режим гиротрона).

## Приложение

Переход от выражений (4) и (16), (17) к выражениям (5), (6) и (18), (19) осуществляется на основе применения следующего преобразования:

$$\exp\{in\theta_{12}\} J_n(x_1) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} j_{n+q}(x_2) j_q(x_3) \exp\{in\theta_{23}\},$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – стороны треугольника,  $\theta_{12}$  – угол между сторонами  $x_1$  и  $x_2$  соответственно  $\theta_{23}$  – угол между сторонами  $x_2$  и  $x_3$  треугольника.

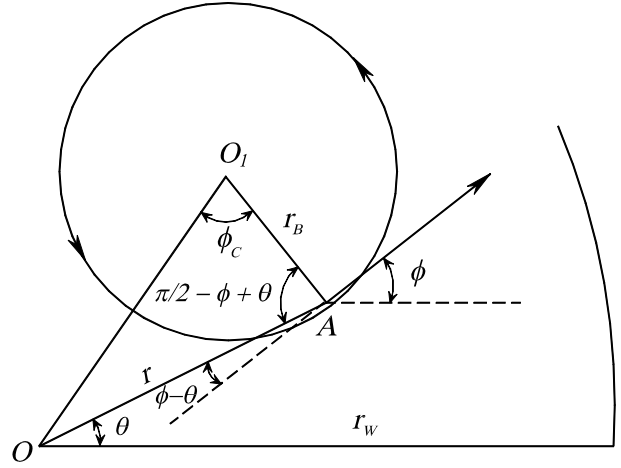


Рис. 1.

Ниже на рисунке 1 представлена ларморовская орбита электрона в сечении волновода. Легко видеть, что  $x_1, x_2, x_3$  можно определить как  $r, r_B, r_c$ , соответственно. Здесь –  $r_w$  – радиус волновода,  $r$  определяет положение электрона пучка,  $r_c$  – положение центра ларморовского вращения электрона,  $r_B$  – ларморовский радиус. Углы  $\theta_{12}$  и  $\theta_{23}$  соответствуют углам  $\pi/2 - \phi - \theta$  и  $\phi_c$ . Используя приведенное выше соотношение получим выражения для полей в системе вращения отдельного электрона (5), (6) и (18), (19) Остановимся также на получении выражений (10) и (22). Для случая ТЕ волны из уравнений Максвелла следует соотношение

$$(k_z^2 + k_\perp^2 - \omega^2/c^2) B_z = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r J_\theta) - im \frac{J_r}{r} \right].$$

После применения оператора

$$\int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_m(k_{ms} r) \exp\{-im\theta\}$$

к обеим сторонам этого уравнения получим

$$\begin{aligned} & (k_z^2 + k_\perp^2 - \omega^2/c^2) b\pi r_w^2 \left\{ J_m'^2(k_{ms} r_w) + \right. \\ & \left. J_m^2(k_{ms} r_w) \left[ 1 - \frac{m^2}{(k_{ms} r_w)^2} \right] \right\} = \\ & (4\pi i/\omega) k_{ms}^2 \exp\{i\omega t - ik_z z\} \times \\ & \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \exp\{-im\theta\} \left[ i\omega \frac{J_m'(k_{ms} r_w) J_\theta}{k_{ms} c} - \right. \\ & \left. m\omega \frac{J_m(k_{ms} r_w) J_r}{k_{ms}^2 r c} \right] = \\ & 4\pi i/(\omega b^*) (k_z^2 - \omega^2/c^2) \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\mathbf{J}\mathbf{E}^*). \end{aligned}$$

В случае ТМ волны действовать тем же оператором следует на уравнение, которое также является следствием уравнений Максвелла:

$$(k_z^2 + k_{\perp}^2 - \omega^2/c^2)E_z = -(4\pi k_z/\omega)(1 - \omega^2/k_z^2 c^2) \times \left[ ik_z J_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r J_r) / (1 - \omega^2/k_z^2 c^2) + im \frac{J_{\theta}}{r(1 - \omega^2/k_z^2 c^2)} \right].$$

В результате получим уравнение

$$(k_z^2 + k_{\perp}^2 - \omega^2/c^2) h \pi r_w^2 \left\{ J_m'^2(k_{ms} r_w) + J_m^2(k_{ms} r_w) [1 - m^2/(k_{ms} r_w)^2] \right\} = \frac{4\pi i}{\omega h^*} (k_z^2 - \omega^2/c^2) \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\mathbf{J} \mathbf{E}^*).$$

Используя полученные уравнения для поля волн с учетом граничных условий, приходим к уравнениям (10) и (22), соответственно.

## Список литературы

- [1] Gaponov A.V., Petelin M.I. and Yulpatov V.K. The induced radiation of excited classical oscillators and its use in high-frequency electronics // Radiophysics and Quantum Electronics. – 1967. – V. 10. – P. 794–813
- [2] Flyagin V.A., Gaponov A.V., Petelin M.I. and Yulpatov V.K. The Gyrotron. // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 1977. – V. MTT-25, N 6. – P. 514–521.
- [3] Панченко И.П., Сотников В. И. Нелинейная теория возбуждения монохроматических волн электронным пучком в плазме, помещенной в магнитное поле. // Физика плазмы. – 1976. – Т. 2, В. 6. – С. 945–952.
- [4] Абурджания Х.Д., Киценко А.Б., Панкратов И.М. Нелинейная стадия взаимодействия потока заряженных частиц с плазмой в магнитном поле // Физика плазмы. – 1978. – Т. 4, В. 1. – С. 227–234.
- [5] Кондратенко А.Н., Круша Й., Куклин В.М, Об особенностях развития пучково-плазменной неустойчивости в условиях аномального эффекта Доплера // Beitr. Plasmaphys. – 1979. – V. 19, N 4. – P. 201–209.
- [6] Балакирев В.А., Карбушев Н.И., Островский А.О., Ткач Ю.В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках – Киев: Накова Думка. – 1993. – 207 с.
- [7] Гинзбург Н.С. Нелинейная теория усиления и генерации электромагнитных волн на аномальном эффекте Доплера. // Изв. ВУЗов Радиофизика. – 1979. – Т. 22, Вып. 12. – С. 470–479.
- [8] Айзацкий Н.И. Релаксация релятивистского пучка электронов в замагниченной плазме // Физика плазмы. – 1980. – Т. 6, Вып. 3. – С. 597–602.
- [9] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме – М.: Наука. – 1990. – 336 с.
- [10] Chu K. R., Lin A.T. Gain and Bandwidth of the Gyro-TWT and CARM Amplifiers // IEEE Transactions on Plasma Science. – 1988. – V. 16, N 2. – P. 90–104.
- [11] Edgcombe C.J., Gyrotron Oscillators: Their Principles and Practice – London: Taylor & Francis. – 1993. – 325 p.
- [12] Granatstein V.L. and Alexeff I. High-Power Microwave Source – Boston: Arlech House. – 1987. – 430 p.